PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PER L'ANALISI DI TRAVI ELASTICHE.

NELL'AMBITO DEL CALCOLO DI STRUTTURE ELASTICHE IL P.L.V. VIENE TIPICAMENTE IMPIEGATO PER QUESTE GRANDI CLASSI DI PROBLEMI:

1. DETERMINAZIONE DI REAZIONI VINCOLARI DI STRUTTURE ISOSTATICHE;
2. CALCOLO DI COMPONENTI DI SPOSTAMENTO DI STRUTTURE ISOSTATICHE
3. CALCOLO DELLE INCOGNITE IPERSTATICHE
4. CALCOLO DI COMPONENTI DI SPOSTAMENTO DI STRUTTURE IPERSTATICHE.

I PROBLEMI APPARTENENTI ALLA PRIMA CATEGORIA SONO GIA' STATI PRESI IN CONSIDERAZIONE NEL TRATTARE IL P.L.V. PER SISTEMI RIGIDI; RESTANO DA CONSIDERARE LE ALTRE CATEGORIE, NELLE QUALI SI TIENE ESPLICITAMENTE CONTO DELLA DEFORMABILITA'.

E' NOTO CHE IL P.L.V. STABILISCE CHE:

- DATO UN SISTEMA DI FORZE (GENERALIZZATE(*)) E SFORZI (EVENTUALMENTE GENERALIZZATI) CHE SODDISFINO LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO;

- DATO UN SISTEMA DI SPOSTAMENTI (GENERALIZZATI(*)) E DEFORMAZIONI (EVENTUALMENTE GENERALIZZATE) CHE SODDISFINO LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA INTERNA ED ESTERNA (OVVERO IL RISPETTO DEI VINCOLI)

$\Rightarrow$ IL LAVORO COMPIUTO DAL SISTEMA DI FORZE PER I CORRISPONDENTI SPOSTAMENTI [VALUTATI NEI PUNTI DI APPLICAZIONE DELLE FORZE STESSE, NELLA DIREZIONE DI QUESTE] RISULTA PARI AL LAVORO COMPIUTO DAGLI SFORZI (ASSOCIATI AL SISTEMA DI FORZE) PER LE DEFORMAZIONI (CORRISPONDENTI AL SISTEMA DI SPOSTAMENTI).
IN ALTRI TERMINI $\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$, CIOE' IL LAVORO ESTERNO EGUAGLIA IL LAVORO INTERNO.

SI OSSERVI CHE I DUE SISTEMI: FORZE/SFORZI E SPOSTAMENTI/DEFORMAZIONI SONO DEL TUTTO ARBITRARI E INDIPENDENTI L'UNO DALL'ALTRO: NON DEVONO ESSERE CAUSA L'UNO DELL'ALTRO.

IN FORMULE: DETTE F_i LE FORZE DI VOLUME (COMPONENTI DELLE), p_i LE FORZE DI SUPERFICIE (COMPONENTI DELLE), σ_{ij} GLI SFORZI IN EQUILIBRIO CON QUESTE; E POI s_i LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO (NELLE DIREZIONI D'AZIONE DI F_i E p_i) E ε_{ij} LE CORRISPONDENTI DEFORMAZIONI CONGRUENTI, SI HA:

QUANTITA' CONGRUENTI

$$\mathcal{L}_e = \int_V F_i s_i \, dV + \int_{S} p_i s_i \, dS = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, dV = \mathcal{L}_i \qquad [*]$$

QUANTITA' EQUILIBRATE

PER SISTEMI RIGIDI $\varepsilon_{ij} = 0$ E IL SECONDO MEMBRO ($\mathcal{L}_i$) SI ANNULLA.

NEL CASO DI TRAVI LA [*] DIVIENE:

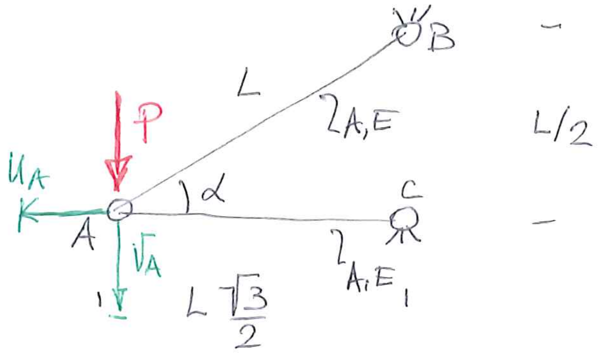
DEFORMAZIONI ASSIALI, FLESSIONALI, A TAGLIO

$$\mathcal{L}_e = \underbrace{\sum F_i s_i}_{\text{FORZE CONCENTRATE}} + \underbrace{\sum \int_{l_i} q_i s_i \, dx}_{\text{CARICHI DISTRIBUITI}} = \sum \left(\int_{l_i} N_i \varepsilon_i \, dx_i + \int_{l_i} M_i \chi_i \, dx_i + \int_{l_i} T_i \gamma_i \, dx_i \right) = \mathcal{L}_i$$

AZIONI INTERNE

(*) SONO FORZE GENERALIZZATE LE FORZE VERE E PROPRIE E LE COPPIE; SFORZI GENERALIZZATI LE RISULTANTI (P.ES: N, T, M) DEGLI SFORZI LOCALI σ_{ij}; IN MODO ANALOGO SI PERVIENE A DEFINIRE SPOSTAMENTI GENERALIZZATI (= SPOSTAMENTI E ROTAZIONI) E DEFORMAZIONI GENERALIZZATE

CALCOLO DI COMPONENTI DI SPOSTAMENTO DI STRUTTURE ISOSTATICHE IN PRESENZA DI SOLA AZIONE ASSIALE.

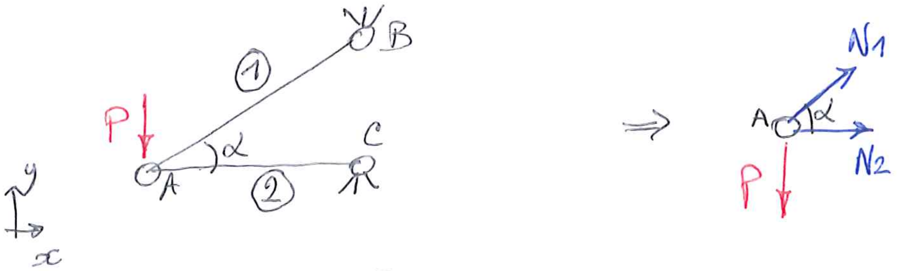


$\alpha = 30°$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

SISTEMA CONGRUENTE = SISTEMA REALE



EQUILIBRIO DEL NODO A:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & N_1\cos\alpha + N_2 = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & N_1\sin\alpha - P = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 \cdot \frac{1}{2} = P \\ N_2 = -N_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

SI OTTIENE COSÌ

$N_1 = 2P$ (TRAZIONE)

$N_2 = -\sqrt{3}P$ (COMPRESSIONE)

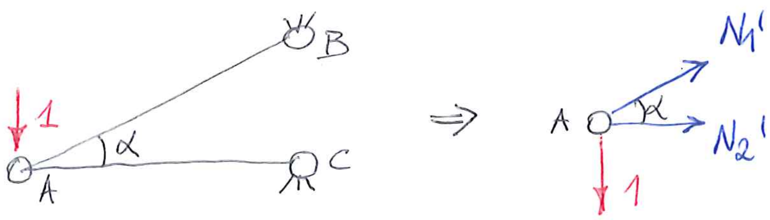
CON IL LEGAME ELASTICO SI OTTENGONO LE DEFORMAZIONI (GENERALIZZATE)

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1}{EA} = \frac{2P}{EA}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{N_2}{EA} = \frac{-\sqrt{3}P}{EA}$$

CONGRUENTI CON GLI SPOSTAMENTI, IN PARTICOLARE CON u_A, v_A.

SISTEMA EQUILIBRATO (AUSILIARIO) PER IL CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO VERTICALE, v_A:



EQUILIBRIO DEL NODO A.

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & N_1'\cos\alpha + N_2' = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & N_1'\sin\alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1' \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ N_2' = -N_1' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

E SI OTTIENE:

$N_1' = 2 \cdot 1$ (TRAZIONE)

$N_2' = -\sqrt{3} \cdot 1$ (COMPRESSIONE)

SISTEMA CONGRUENTE

P.L.V.: $\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i \Rightarrow 1 \cdot v_A = \int_0^L N_1' \cdot \varepsilon_1 \, dx_1 + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} N_2' \cdot \varepsilon_2 \, dx_2$

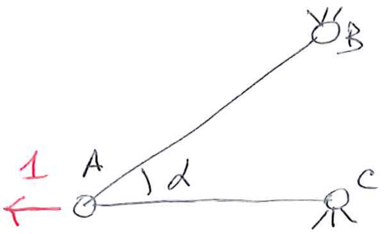
SISTEMA EQUILIBRATO

$$1 \cdot v_A = \int_0^L 2\cdot\left(\frac{2P}{EA}\right)dx_1 + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} -\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}P}{EA}\right)dx_2$$

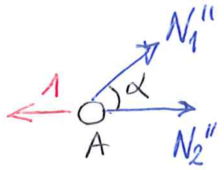
$$1 \cdot v_A = \frac{4P}{EA}\left[x_1\right]_0^L + \frac{3P}{EA}\left[x_2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} = \frac{4PL}{EA} + \frac{3P}{EA}\frac{\sqrt{3}}{2}L = \frac{PL}{EA}\left(4+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

DUNQUE $\boxed{v_A = \frac{PL}{EA}\left(4+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$

SISTEMA EQUILIBRATO (AUSILIARIO) PER IL CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE, u_A.



$\Rightarrow$



EQUILIBRIO DEL NODO (A)

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & N_1''\cos\alpha + N_2'' - 1 = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & N_1''\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1'' \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ N_1'' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2'' = 1 \end{cases}$$

E SI OTTIENE:

$N_1'' = 0$

$N_2'' = 1$ (TRAZIONE)

P.L.V.: $\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i \Rightarrow$

$$1 \cdot u_A = \int_0^L N_1'' \cdot \varepsilon_1 \, dx_1 + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} N_2'' \cdot \varepsilon_2 \, dx_2$$

SISTEMA CONGRUENTE

SISTEMA EQUILIBRATO ''

$$1 \cdot u_A = \cancel{\int_0^L 0 \cdot \left(\frac{2P}{EA}\right)dx_1} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} 1\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}P}{EA}\right)dx_2$$

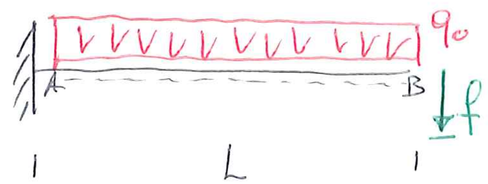
$$1 \cdot u_A = -\frac{\sqrt{3}P}{EA}\left[x_2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}L} = -\frac{\sqrt{3}P}{EA}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L = -\frac{3}{2}\frac{PL}{EA}$$

DUNQUE $\boxed{u_A = -\frac{3}{2}\frac{PL}{EA}}$

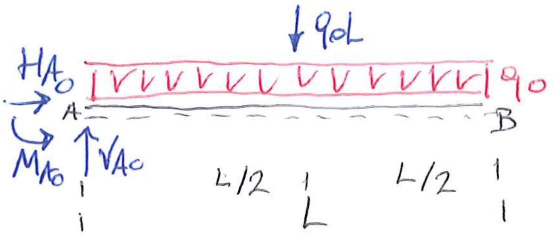
IL FATTO CHE $u_A < 0$ INDICA CHE LO SPOSTAMENTO È IN REALTÀ ORIENTATO VERSO DESTRA: DUNQUE PER EFFETTO DEL CARICO P (CHE "ACCORCIA" LA TRAVE (2)) SI HA CHE IL NODO (A) SI SPOSTI VERSO DESTRA.

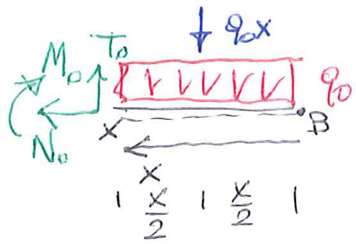
SI NOTI CHE INVECE $v_A > 0$: CIÒ SEGNALA CHE LO SPOSTAMENTO È DIRETTO VERSO IL BASSO: DEL RESTO LA TRAVE (1) PER EFFETTO DEL CARICO P SI "ALLUNGA" E CIÒ RICHIEDE PER COMPATIBILITÀ CHE IL NODO (A) SI ABBASSI.

SI CONSIDERA UNA TRAVE ISOSTATICA SOGGETTA A CARICO DISTRIBUITO: SI VUOLE CALCOLARE LO SPOSTAMENTO f ALL'ESTREMO LIBERO, NELL'IPOTESI $EJ = \text{cost}$.



SI ASSUME COME SISTEMA CONGRUENTE IL SISTEMA REALE:





$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_{A_0} = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_{A_0} - q_0 L = 0 \\ \circlearrowright M_{z(A)} = 0 \quad M_{A_0} - \dfrac{q_0 L^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{A_0} = 0 \\ V_{A_0} = q_0 L \\ M_{A_0} = \dfrac{q_0 L^2}{2} \end{cases}$$

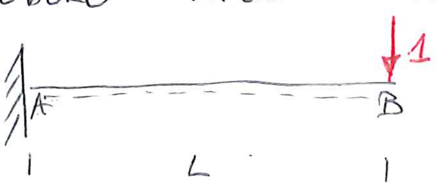
LE AZIONI INTERNE (COSTRUITE A PARTIRE DA B) VALGONO

$$\begin{cases} N_0(x) = 0 \\ T_0(x) = q_0 x \qquad 0 \leq x \leq L \\ M_0(x) = -q_0 \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

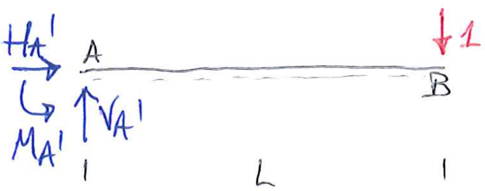
A CUI CORRISPONDONO LE DEFORMAZIONI

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \dfrac{N_0(x)}{EA} = 0 \\ \chi(x) = \dfrac{M_0(x)}{EJ} = \dfrac{-q_0 x^2}{2EJ} \\ \gamma(x) = \dfrac{T_0(x)}{GA_T} = \dfrac{q_0 x}{GA_T} \end{cases}$$

SI ASSUME COME SISTEMA AUSILIARIO QUELLO COSTITUITO DA UN'UNICA FORZA DI MODULO UNITARIO APPLICATA IN B SULLA MEDESIMA TRAVE ISOSTATICA:

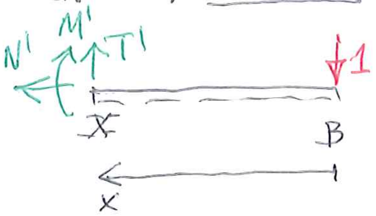


IN QUESTO MODO LA FORZA 1 COMPIE LAVORO PER LO SPOSTAMENTO f.



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_A' = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A' - 1 = 0 \\ \circlearrowright M_{z(A)} = 0 \quad M_A' - 1 \cdot L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A' = 0 \\ V_A' = 1 \\ M_A' = 1 \cdot L \end{cases}$$

NEL SISTEMA AUSILIARIO LE AZIONI INTERNE, SEMPRE VALUTATE A PARTIRE DA (B) (USANDO LA MEDESIMA ASCISSA x) VALGONO:



$$\left.\begin{aligned} N'(x) &= 0 \\ T'(x) &= 1 \\ M'(x) &= -1\cdot x \end{aligned}\right\} \quad 0 \le x \le L$$

AZIONI IN EQUILIBRIO CON LA FORZA UNITARIA

FACENDO QUINDI "LAVORARE" LE QUANTITÀ STATICHE DELLA STRUTTURA AUSILIARIA PER LE QUANTITÀ CINEMATICHE DELLA STRUTTURA REALE SI HA:

$$1 \cdot f = \int_0^L T'(x)\,\gamma(x)\,dx + \int_0^L M'(x)\,\chi(x)\,dx$$

$$1 \cdot f = \int_0^L 1 \cdot \frac{q_0 x}{GA_T}\,dx + \int_0^L (-1\cdot x)\,\frac{-q_0 x^2}{2EJ}\,dx$$

$$1 \cdot f = \frac{q_0}{GA_T}\int_0^L x\,dx + \frac{q_0}{2EJ}\int_0^L x^3\,dx \quad \Rightarrow \quad 1\cdot f = \frac{q_0}{GA_T}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L + \frac{q_0}{2EJ}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L$$

$$\Rightarrow f = \underbrace{\frac{q_0 L^2}{2GA_T}}_{\text{CONTRIBUTO DEFORMAZIONE A TAGLIO (1)}} + \underbrace{\frac{q_0 L^4}{8EJ}}_{\text{CONTRIBUTO DEFORMAZIONE FLESSIONALE (2)}}$$

(2) PRODUCE EFFETTI A DISTANZA MOLTO PIÙ PRONUNCIATI

PER VALUTARE L'IMPORTANZA RELATIVA DI f_T E f_M SI PUÒ SCRIVERE

$$f = \underbrace{\frac{q_0 L^4}{8EJ}}_{f_M}\left[1 + \underbrace{\frac{8EJ}{2GA_T L^2}}_{\text{TERMINE CORRETTIVO}}\right] = f_M\left[1 + 4\,\frac{E}{G}\,\frac{J}{A_T}\cdot\frac{1}{L^2}\right]$$

SI ASSUME UNA SEZIONE RETTANGOLARE: $J = \frac{1}{12}BH^3$; $A_T = \frac{5}{6}A = \frac{5}{6}BH$

SICCHÉ $\frac{J}{A_T} = \frac{\frac{1}{12}BH^3}{\frac{5}{6}BH} = \frac{H^2}{10}$

SI HA POI $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ SICCHÉ PER $0 \le \nu \le \frac{1}{2}$ $\quad \frac{E}{G} = 2(1+\nu) \Rightarrow 2 \le \frac{E}{G} \le 3$

E DUNQUE IL MASSIMO VALORE POSSIBILE È $\frac{E}{G} = 3$

SI HA COSÌ $f = f_M\left[1 + \cancel{4}^{\,2}\cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{10}_{\,5}}\cdot\left(\frac{H}{L}\right)^2\right] \Rightarrow f = f_M\left[1 + \frac{6}{5}\left(\frac{H}{L}\right)^2\right]$

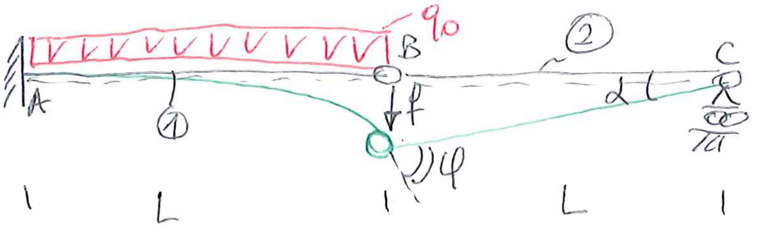
PER $H/L = \frac{1}{5}$, $\frac{6}{5}\left(\frac{H}{L}\right)^2 = 0.048 = 4.8\%$ $\qquad$ PER $H/L = \frac{1}{20}$, $\frac{6}{5}\left(\frac{H}{L}\right)^2 = 0.003 = 0.3\%$

PER $H/L = \frac{1}{10}$, $\frac{6}{5}\left(\frac{H}{L}\right)^2 = 0.012 = 1.2\%$ $\qquad$ PER $H/L = \frac{1}{50}$, $\frac{6}{5}\left(\frac{H}{L}\right)^2 = 0.0005 = 0.05\%$

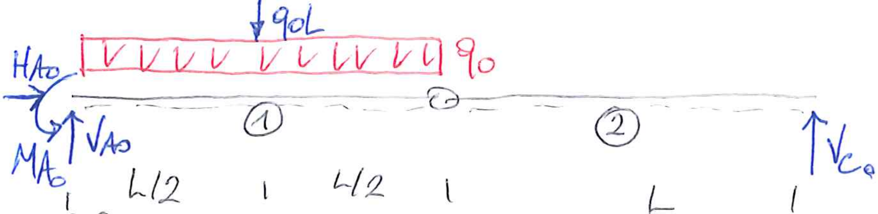
DUNQUE PER VALORI "COMUNI" DI H/L $\left(\frac{1}{10} < \frac{H}{L} < \frac{1}{20}\right)$ IL CONTRIBUTO DOVUTO ALLA

DEFORMABILITA' A TAGLIO È TRASCURABILE.

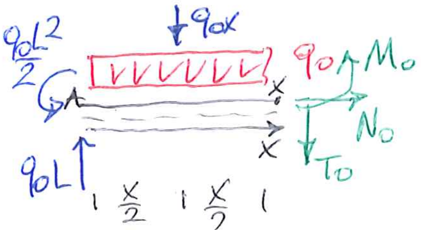
PER LA STRUTTURA ISOSTATICA IN FIGURA (NELLA QUALE LA TRAVE CB È SCARICA!) SI VOGLIONO CALCOLARE LA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO f SOTTO LA CERNIERA INTERMEDIA (B), LA ROTAZIONE α IN CORRISPONDENZA DELLA CERNIERA (C) E LA ROTAZIONE RELATIVA φ FRA LE ESTREMITA' DELLE TRAVI COLLEGATE DALLA CERNIERA (B).



PROCEDENDO COME NELL'ESEMPIO PRECEDENTE SI HA:



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_{A0} = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_{A0} - q_0 L + V_{C0} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_{A0} - \frac{q_0 L^2}{2} + V_{C0}\, 2L \\ \circlearrowleft M^{(2)}_{z(B)} = 0 & V_{C0} \cdot L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{A0} = 0 \\ V_{A0} = q_0 L \\ M_{A0} = \frac{q_0 L^2}{2} \\ V_{C0} = 0 \end{cases}$$



SI TROVA QUINDI PER LE AZIONI INTERNE:

$$N_0(x) = 0 \quad \forall x$$

$$T_0(x) = \begin{cases} q_0 L - q_0 x & 0 \le x \le L \\ 0 & L \le x \le 2L \end{cases}$$

$$M_0(x) = \begin{cases} -\frac{q_0 L^2}{2} + q_0 L x - \frac{q_0 x^2}{2} & 0 \le x \le L \\ 0 & L \le x \le 2L \end{cases}$$

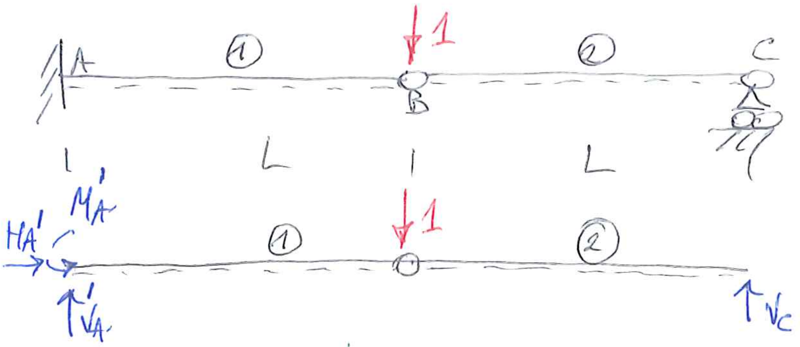
E LE DEFORMAZIONI DELLA STRUTTURA REALE VALGONO:

$$\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{q_0 (L-x)}{GA^*} & 0 \le x \le L \\ 0 & L \le x \le 2L \end{cases}$$

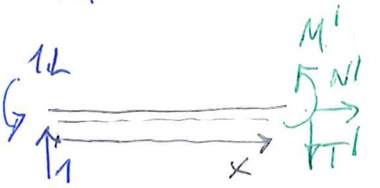
$$\chi(x) = \begin{cases} \frac{-q_0 L^2 + 2 q_0 L x - q_0 x^2}{2EJ} & 0 \le x \le L \\ 0 & L \le x \le 2L \end{cases}$$

SISTEMA AUSILIARIO 1 (EQUILIBRATO):



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A' = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A' - 1 + V_{C}' = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_A' - 1 \cdot L + V_C' \, 2L = 0 \\ \circlearrowleft M^{(2)}_{z(B)} = 0 & V_C' \cdot L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H_A' = 0; \quad V_A' = 1; \quad M_A' = 1 \cdot L; \quad V_C' = 0$$



$$N'(x) = 0 \qquad \forall x$$

$$T'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le L \\ 0 & L \le x \le 2L \end{cases}$$

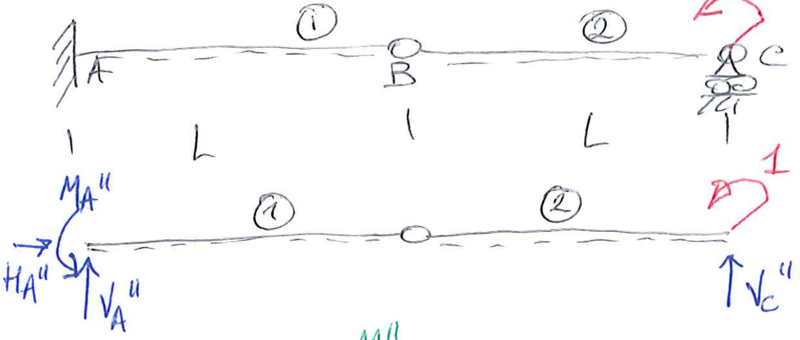
$$M'(x) = \begin{cases} -1 \cdot L + 1 \cdot x & 0 \le x \le L \\ 0 & L \le x \le 2L \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i \Rightarrow 1 \cdot f = \int_0^L 1 \cdot \frac{q_0 (L-x)}{GA_T} dx + \int_0^1 -1(L-x) \frac{-\frac{q_0}{2}\overbrace{(L^2 - 2Lx + x^2)}^{(L-x)^2}}{EJ} dx$$

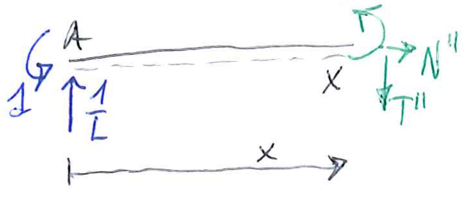
$$1 \cdot f = \frac{q_0}{GA_T} \int_0^L (L-x) dx + \frac{q_0}{2EJ} \int_0^L (L-x)^3 dx = \frac{q_0}{GA_T} \left[-\frac{(L-x)^2}{2} \right]_0^L + \frac{q_0}{2EJ} \left[-\frac{(L-x)^4}{4} \right]_0^L$$

$$f = \frac{q_0 L^2}{2GA_T} + \frac{q_0 L^4}{8EJ}.$$

SISTEMA AUSILIARIO 2 (EQUILIBRATO)



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A'' = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A'' + V_C'' = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_A'' + 1 + V_C'' \cdot 2L = 0 \\ \circlearrowleft M^{(2)}_{z(B)} = 0 & 1 + V_C'' \cdot L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A'' = 0 \\ V_A'' = \frac{1}{L} \\ M_A'' = 1 \\ V_C'' = -\frac{1}{L} \end{cases}$$



$$N''(x) = 0 \qquad \forall x$$

$$T''(x) = \frac{1}{L} \qquad 0 \le x \le 2L$$

$$M''(x) = -1 + \frac{1}{L} x \qquad 0 \le x \le 2L$$

$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$

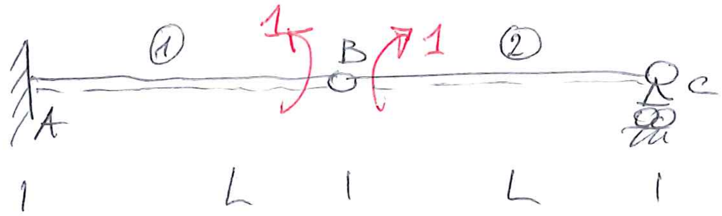
$$1\cdot\alpha = \int_0^L \frac{1}{L}\cdot\frac{q_0(L-x)}{GA_t}dx + \int_L^{2L}\cancel{\frac{1}{L}\cdot 0\, dx} + \int_0^L -\frac{1}{L}(L-x)\cdot\frac{-q_0(L-x)^2}{2EJ}dx + \int_L^{2L}\cancel{-\frac{1}{L}(L-x)\cdot 0\, dx}$$

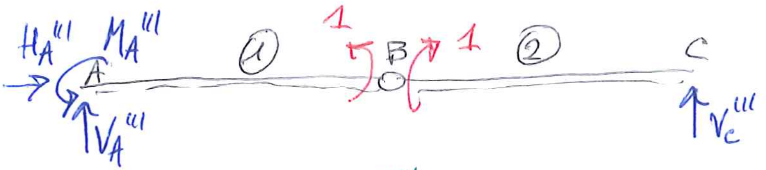
$$1\cdot\alpha = \frac{q_0}{LGA_t}\int_0^L (L-x)dx + \frac{q_0}{2LEJ}\int_0^L (L-x)^3 dx = \frac{q_0}{LGA_t}\left[-\frac{(L-x)^2}{2}\right]_0^L + \frac{q_0}{2LEJ}\left[-\frac{(L-x)^4}{4}\right]_0^L$$

$$\alpha = \frac{1}{L}\Big[\underbrace{\frac{q_0L^2}{GA_t} + \frac{q_0L^4}{8EJ}}_{f}\Big] \Rightarrow \alpha = \frac{f}{L}$$

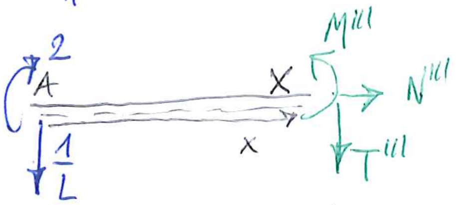
INQUANTO LA TRAVE (2) RUOTA MANTENENDOSI RIGIDA.

SISTEMA AUSILIARIO 3 (EQUILIBRATO)





$$\begin{cases} \to R_x = 0 \quad H_A''' = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A''' + V_C''' = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad M_A''' + V_C'''\cdot 2L = 0 \\ \circlearrowleft M^{(2)}_{z(B)} = 0 \quad -1 + V_C'''\cdot L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A''' = 0 \\ V_A''' = -\frac{1}{L} \\ V_C''' = \frac{1}{L} \\ M_A''' = -2 \end{cases}$$



$N'''(x) = 0 \quad \forall x$

$T'''(x) = -\frac{1}{L} \quad 0 \le x \le 2L$

$M'''(x) = 2 - \frac{1}{L}x \quad 0 \le x \le 2L$

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i \qquad 1(\underbrace{\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}}_{\varphi}) = \int_0^L -\frac{1}{L}\cdot\frac{q_0(L-x)}{GA_t}dx + \int_L^{2L}\cancel{-\frac{1}{L}\cdot 0\,dx} + \int_0^L\left(2-\frac{1}{L}x\right)\frac{-\frac{q_0}{2}(L-x)^2}{EJ}dx + \int_L^{2L}\cancel{\left(2-\frac{1}{L}x\right)\cdot 0\,dx}$$

$$1\cdot\varphi = -\frac{1}{L}\frac{q_0}{GA_t}\int_0^L (L-x)\,dx - \frac{\frac{q_0}{2EJ}}{L}\int_0^L (L+L-x)(L-x)^2dx$$

$$1\cdot\varphi = -\frac{1}{L}\frac{q_0}{GA_t}\int_0^L (L-x)dx - \frac{1}{L}\frac{q_0}{2EJ}\left[\int_0^L L(L-x)^2dx + \int_0^L (L-x)^3dx\right]$$

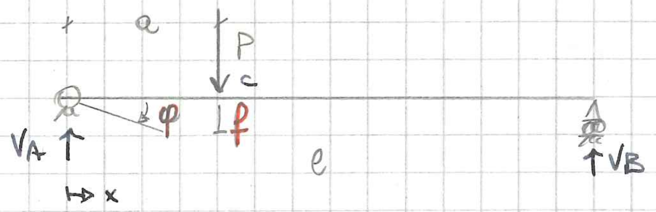
$$1\cdot\varphi = -\frac{q_0}{GA_t}\frac{1}{L}\left[-\frac{(L-x)^2}{2}\right]_0^L - \frac{q_0}{2EJ}\left\{\left[-\frac{(L-x)^3}{3}\right] + \frac{1}{L}\left[-\frac{(L-x)^4}{4}\right]_0^L\right.$$

$$1\cdot\varphi = -\frac{q_0L^2}{2GA_t}\cdot\frac{1}{L} - \frac{q_0L^3}{6EJ} - \frac{q_0L^4}{8EJ}\cdot\frac{1}{L}$$

$$1\cdot\varphi = -\frac{1}{L}\Big[\underbrace{+\frac{q_0L^2}{2GA_t}+\frac{q_0L^4}{8EJ}}_{f}\Big] - \frac{q_0L^3}{6EJ}$$

$$\varphi = -\frac{f}{L} - \frac{q_0L^3}{6EJ}$$

Altro esempio:



Per effetto del carico

$$H_A = 0$$
$$V_A = P\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$
$$V_B = P\,(a/l)$$

In corrispondenza si hanno i seguenti diagrammi di azione interna:

$$N(x) = 0 \quad \forall x$$

$$M(x) = \begin{cases} P\left(1-\frac{a}{l}\right)x & 0 \le x < a \\ P\left(1-\frac{x}{l}\right)a & a < x \le l \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} P(1-a/l) & 0 \le x < a \\ -Pa/l & a < x \le l \end{cases}$$

in corrispondenza le relative deformazioni valgono:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = 0 \quad \forall x$$

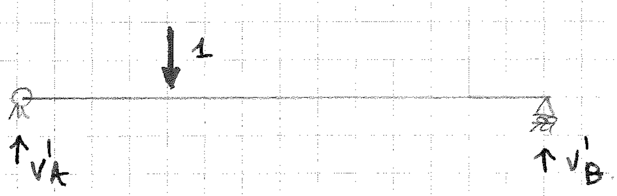
$$\chi = \frac{M}{EI} = \begin{cases} \frac{P}{EI}\left(1-\frac{a}{l}\right)x & a \le x < a \\ \frac{P}{EI}\left(1-\frac{x}{l}\right)a & a < x \le l \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{T}{GA_T} = \begin{cases} \frac{P}{GA_T}\left(1-\frac{a}{l}\right) & 0 \le x < a \\ +\frac{P}{GA_T}\left(-\frac{a}{l}\right) & a < x \le l \end{cases}$$

Queste sono le deformazioni (generalizzate) reali, congruenti con il reale campo di spostamenti (linea d'asse della trave deformata) chiaramente compatibile con i vincoli esterni.

Per evidenziare la componente di spostamento sotto il carico si deve utilizzare un campo di forze - sforzi fittizi in cui tuttavia una forza compia lavoro per lo spostamento f (o almeno per una sua componente).
Tale sistema di forze e sforzi è per il resto arbitrario, purché sia soddisfatto l'equilibrio: ci si vale di tale arbitrarietà per scegliere il sistema più semplice possibile

Tale sistema si assume costituito da una forza unitaria applicata in C alla struttura reale che esercita reazioni di intensità rispettivamente di valore $(1-a/\ell)$ in A e (a/ℓ) in B. I corrispondenti sforzi generalizzati valgono



$$N'(x) = 0 \qquad \forall x$$

$$M'(x) = \left(1-\frac{a}{\ell}\right)x \cdot 1 \qquad 0 \le x < a$$

$$M'(x) = \left(1-\frac{x}{\ell}\right)a \cdot 1 \qquad a < x \le \ell$$

$$T'(x) = \left(1-\frac{a}{\ell}\right) \cdot 1 \qquad 0 \le x < a$$

$$T'(x) = -\frac{a}{\ell} \cdot 1 \qquad a < x \le \ell$$

Tenuto conto che l'azione assiale $N'(x)$ è ovunque nulla (e comunque è ovunque nulla la deformazione assiale) l'equazione dei lavori virtuali ottenuta facendo lavorare le quantità statiche "fittizie" per le quantità cinematiche reali, diviene

$$1 \cdot f = \int_0^a 1 \cdot \left(1-\frac{a}{\ell}\right)x \cdot \frac{P}{EI}\left(1-\frac{a}{\ell}\right)x\,dx + \int_a^\ell 1 \cdot \left(1-\frac{x}{\ell}\right)a \cdot \frac{P}{EI}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)a\,dx +$$

$$+ \int_0^a 1 \cdot \left(1-\frac{a}{\ell}\right) \cdot \frac{P}{GA_m}\left(1-\frac{a}{\ell}\right)dx + \int_a^\ell 1 \cdot \left(-\frac{a}{\ell}\right)\frac{P}{GA_T}\left(-\frac{a}{\ell}\right)dx$$

se, al solito, si trascura la deformabilità a taglio della trave, si eliminano gli ultimi due integrali e si ottiene:

$$1 \cdot f = \int_0^a \left(1-\frac{a}{\ell}\right)x\,\frac{P}{EI}\left(1-\frac{a}{\ell}\right)x\,dx + \int_a^\ell \left(1-\frac{x}{\ell}\right)a\,\frac{P}{EI}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)a\,dx$$

e questi integrali, se le caratteristiche geometriche e meccaniche della trave risultano costanti forniscono per f il valore

$$f = -\frac{P(\ell-a)}{\ell}\,\frac{a^3}{6EI} + \frac{Pa^2}{6EI}(2\ell-a)\left(1-\frac{a}{\ell}\right) = \frac{Pa^2}{6EI}\left(2\ell + \frac{2a^2}{\ell} - 4a\right)$$

nel caso che sia $a = \frac{\ell}{2}$ (carico in mezzeria) si trova il valore

$$f = \frac{P\ell^3}{48EI}$$

Se si vuole invece valutare la rotazione della trave sotto l'estremo di sinistra occorre adottare un diverso sistema di forze, un sistema nel quale almeno una coppia lavori per la rotazione che si produce in A; il più semplice sistema equilibrato che soddisfa questo requisito è costituito da una coppia concentrata con momento "orario" pari a 1 agente in A, dalle reazioni della struttura a tale coppia: $V_A' = -1/l$ e $V_B' = +1/l$ e dalle corrispondenti azioni interne:

$$N'(x) = 0$$

$$M'(x) = 1\cdot\left(1-\frac{x}{l}\right) \qquad 0 \le x \le l$$

$$T'(x) = -\frac{1}{l}\cdot 1 \qquad 0 \le x \le l$$

Nell'equazioni ai lavori virtuali occorre fare attenzione ai limiti di integrazione: poiché il diagramma di $M(x)$ ha doppia espressione(*), a sinistra e a destra della sezione $x=a$ occorre spezzare il campo di integrazione in modo conseguente, si trova

$$1\cdot\varphi = \int_0^a 1\cdot\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{P}{EI}\left(1-\frac{a}{l}\right)x\,dx + \int_a^l 1\cdot\left(1-\frac{x}{l}\right)\cdot\frac{P}{EI}\left(1-\frac{x}{l}\right)a\,dx +$$

$$+ \int_0^a 1\cdot\left(-\frac{1}{l}\right)\frac{P}{GA_T}\left(1-\frac{a}{l}\right)dx + \int_a^l 1\,(1/l)\cdot\frac{P}{GA_T}\left(-\frac{a}{l}\right)dx$$

e se si trascura la deformabilità a taglio,

$$1\cdot\varphi = \int_0^a 1\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{P}{EI}\left(1-\frac{a}{l}\right)x\,dx + \int_a^l 1\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{P}{EI}\left(1-\frac{x}{l}\right)a\,dx$$

per travi a rigidezza costante ($EI = \text{cost}$) il risultato che si trova è:

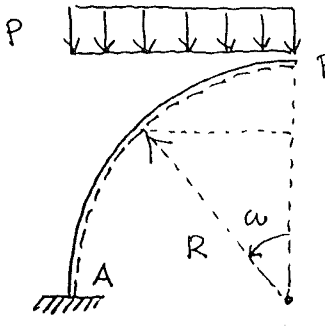
$$\varphi = \frac{Pa}{6EI}(2l-a)\left(1-\frac{a}{l}\right) = \frac{Pa}{6EI}\left(2l-3a+\frac{a^2}{l}\right)$$

nel caso particolare che sia $a = \frac{l}{2}$ (carico in mezzeria) si trova il valore

$$\varphi = \frac{Pl^2}{16EI}$$

(*) mentre quello di $T(x)$ è addirittura discontinuo

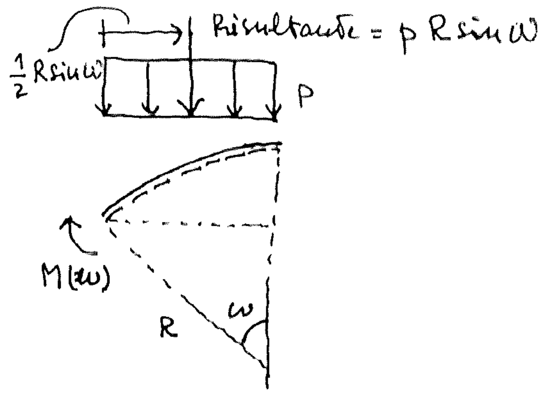
ESEMPIO. Determinare la rotazione dell'estremo libero della seguente mensola ad asse circolare:



Teniamo conto del solo contributo flessionale

Si assume come sistema congruente la struttura reale.

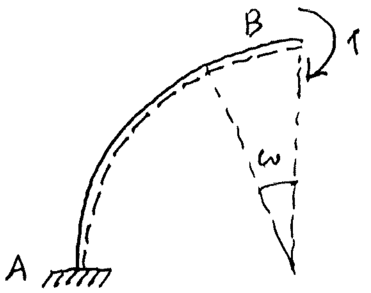
Nel sistema di riferimento polare di figura, il momento flettente si esprime come:



$$M(\omega) = -\frac{pR^2}{2}\sin^2\omega$$

$$d\varphi = -\frac{1}{EJ}\,\frac{pR^2}{2}\sin^2\omega \cdot dS$$

Come sistema equilibrato si assume la mensola reale, soggetta ad una coppia concentrata, nel punto in cui è richiesta la rotazione:



$$M(\omega) = -1$$

Il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$1 \cdot \varphi_B = \int_0^{\pi/2} (-1) \cdot d\varphi$$

dove:

$$d\varphi = \frac{M(\omega)}{EJ}\, ds \qquad e \qquad ds = R\, d\omega$$

quindi:

$$\varphi_B = \int_0^{\pi/2} (-1) \left(-\frac{1}{EJ} \frac{pR^3}{2} \sin^2\omega \right) d\omega =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EJ} \frac{pR^3}{2} \sin^2\omega\, d\omega = \frac{pR^3}{2EJ} \int_0^{\pi/2} \sin^2\omega\, d\omega =$$

$$= \frac{pR^3}{2EJ} \left[\frac{1}{2} (\omega - \sin\omega \cos\omega) \right]_0^{\pi/2}$$

da cui:

$$\varphi_B = \frac{pR^3}{8EJ} \pi .$$

PER IL CALCOLO DI STRUTTURE IPERSTATICHE MEDIANTE IL PLV SI OPERA TRADUCENDO IN TERMINI DI LAVORO VIRTUALE LE CONDIZIONI CINEMATICHE IMPOSTE DAI VINCOLI SOVRABBONDANTI (RISPETTO A QUELLI INDISPENSABILI A GARANTIRE L'EQUILIBRIO NELLA STRUTTURA RESA ISOSTATICA).

SI IMPONE QUINDI CHE LE INCOGNITE IPERSTATICHE SCELTE NON COMPIANO LAVORO PER LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO AD ESSE RELATIVE, E CHE VENGONO EVIDENZIATE QUANDO IL VINCOLO SOVRABBONDANTE VIENE RIMOSSO.

SI CONSIDERA QUINDI COME <u>SISTEMA CONGRUENTE</u> DI SPOSTAMENTI – DEFORMAZIONI <u>QUELLO DELLA STRUTTURA REALE</u>, VALUTATO IN BASE ALLE CONDIZIONI DI CARICO REALI (SOVRAPPOSIZIONE DEI CARICHI ESTERNI APPLICATI ALLA STRUTTURA RESA ISOSTATICA E NON LABILE E DELLE AZIONI IPERSTATICHE APPLICATE ALLA STRUTTURA MEDESIMA).

NEL SISTEMA CONGRUENTE, LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO ASSOCIATE ALLE IPERSTATICHE DEVONO RISULTARE DI VALORE NULLO (OVVERO NON NULLO, MA COMUNQUE NOTO NEL CASO DI CEDIMENTI IMPOSTI).

SI ASSUME COME <u>SISTEMA EQUILIBRATO</u> DI FORZE E SFORZI <u>QUELLO COSTITUITO DI VOLTA IN VOLTA DA UNA DELLE IPERSTATICHE ASSUNTE DI VALORE UNITARIO</u> (E IN EQUILIBRIO CON LE REAZIONI CHE NASCONO NELLA STRUTTURA RESA ISOSTATICA, DETTA "STRUTTURA PRINCIPALE")

SI PERVIENE COSÌ PER <u>OGNI</u> SISTEMA EQUILIBRATO (CIOÈ PER OGNI INCOGNITA IPERSTATICA) A UN'EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI DI QUESTO TIPO: [SI BADI CHE <u>NON</u> SI TRATTA DI EQUAZIONI OMOGENEE!]

$$1\cdot 0 = \int_0^l N_i \frac{N_0 + X_1 N_1 + \ldots + X_N N_N}{EA} dx + \int_0^l T_i \frac{T_0 + X_1 T_1 + \ldots + X_N T_N}{GA_T} dx + \int_0^l M_i \frac{M_0 + X_1 M_1 + \ldots + X_N M_N}{EJ} dx \qquad i = 1, \ldots, N$$

OVVERO:

$$1\cdot 0 = \varphi_{i0} + X_1 \varphi_{i1} + X_2 \varphi_{i2} + \ldots + X_N \varphi_{iN} \qquad i = 1, N$$

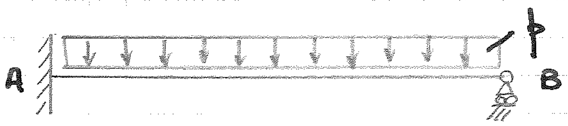
CON $\varphi_{i0} = \int_0^l N_i \frac{N_0}{EA} dx + \int_0^l T_i \frac{T_0}{GA_T} dx + \int_0^l M_i \frac{M_0}{EJ} dx$; $\varphi_{i1} = \int_0^l N_i \frac{N_1}{EA} dx + \int_0^l T_i \frac{T_1}{GA_T} dx + \int_0^l M_i \frac{M_1}{EJ} dx$

$\varphi_{i2} = \int_0^l N_i \frac{N_2}{EA} dx + \int_0^l T_i \frac{T_2}{GA_T} dx + \int_0^l M_i \frac{M_2}{EJ} dx$; … ; $\varphi_{iN} = \int_0^l N_i \frac{N_N}{EA} dx + \int_0^l T_i \frac{T_N}{GA_T} dx + \int_0^l M_i \frac{M_N}{EJ} dx$

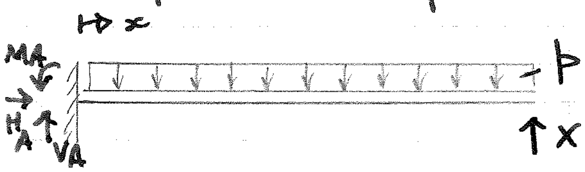
CIOÈ $X_1 \varphi_{i1} + X_2 \varphi_{i2} + \ldots + X_N \varphi_{iN} = -\varphi_{i0} \qquad i = 1, \ldots, N$

LA RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI N EQUAZIONI IN N INCOGNITE PERMETTE DI DETERMINARE TUTTE LE IPERSTATICHE.

Si consideri la seguente struttura, una volta iperstatica.



Si considera dapprima come incognita iperstatica la reazione V_B del carrello: si considera quindi come struttura principale una mensola caricata dalla distribuzione uniforme di forze p e dalla reazione - incognita X -:



Conviene analizzare separatamente le due condizioni di carico e sovrapporre poi gli effetti (il che è lecito poiché si è in un ambito di elasticità lineare): detta "0" la condizione di carico esterna e "1" la condizione di carico corrispondente all'iperstatica di valore unitario, si ha:

$$H_{A_0} = 0 \qquad H_{A_1} = 0 \qquad H_{A_X} = 0$$

$$V_{A_0} = pl \qquad V_{A_1} = -1 \quad \Rightarrow \quad V_{A_X} = -1 \cdot X$$

$$M_{A_0} = \frac{pl^2}{2} \qquad M_{A_1} = -1 \cdot l \qquad M_{A_X} = -X \cdot l$$

corrispondentemente le azioni interne valgono:

$$N_0 = 0 \qquad N_1 = 0 \qquad N_X = 0$$

$$M_0 = -\frac{p}{2}(l-x)^2 \qquad M_1 = 1 \cdot (l-x) \quad \Rightarrow \quad M_X = X M_1 = X(l-x)$$

$$T_0 = p(l-x) \qquad T_1 = -1 \qquad T_X = X T_1 = -X$$

e le deformazioni generalizzate

$$\varepsilon = 0$$

$$\chi = \frac{-\frac{p}{2}(l-x)^2 + X(l-x)}{EI}$$

$$\gamma = \frac{p(l-x) - X}{G A_T}$$

L'iperstatica è una soltanto, per cui è da considerare come condizione di carico che fornisce il sistema di forze - sforzi in equilibrio quella già effettuata con "1"; osservando che in virtù del vincolo in B il punto stesso non può subire spostamento in direzione verticale. Si ha dunque:

$$1\cdot 0 = \int_0^l 1\cdot(l-x)\cdot\left(\frac{-\frac{p}{2}(l-x)^2+X(l-x)}{EI}\right)dx + \int_0^l -1\left(\frac{p(l-x)-X}{GA_T}\right)dx$$

$$1\cdot 0 = \int_0^l\left(-\frac{p}{2}\frac{(l-x)^3}{EI}+X\frac{(l-x)^2}{EI}\right)dx + \int_0^l\left(-\frac{p(l-x)}{GA_T}+\frac{X}{GA_T}\right)dx$$

$$\int_0^l \frac{p(l-x)^3}{2EI}dx + \int_0^l \frac{p(l-x)}{GA_T} = X\left[\int_0^l \frac{(l-x)^2}{EI}dx + \int_0^l \frac{dx}{GA_T}\right]$$

$$\frac{pl^4}{8EI}+\frac{pl^2}{2GA_T} = X\left(\frac{l^3}{3EI}+\frac{l}{GA_T}\right)$$

$$X = \frac{p\left(\frac{l^4}{8EI}+\frac{l^2}{2GA_T}\right)}{\frac{l^3}{3EI}+\frac{l}{GA_T}}$$

nel caso che si consideri trascurabile la deformabilità a taglio si ottiene

$$X = \frac{3pl}{8}$$

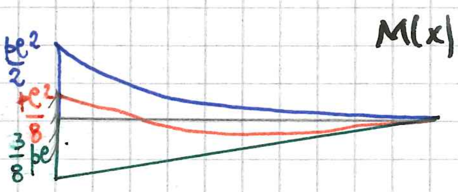
la struttura iperstatica è quindi lo stato di sollecitazione è ottenuto dalla sovrapposizione degli effetti del carico esterno e della reazione iperstatica: cioè

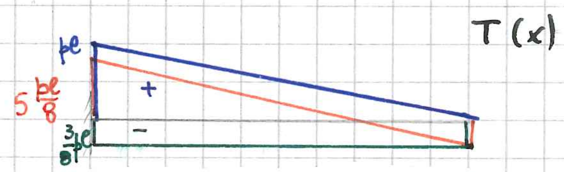
$$V_A = pl - \frac{3pl}{8} = \frac{5}{8}pl \qquad N(x) = 0$$

$$M_A = \frac{pl^2}{2} - \frac{3}{8}pl^2 = \frac{pl^2}{8} \qquad T(x) = p(l-x) - \frac{3pl}{8}$$

$$H_A = 0 \qquad M(x) = -\frac{p}{2}(l-x)^2 + \frac{3}{8}p(l-x)l$$

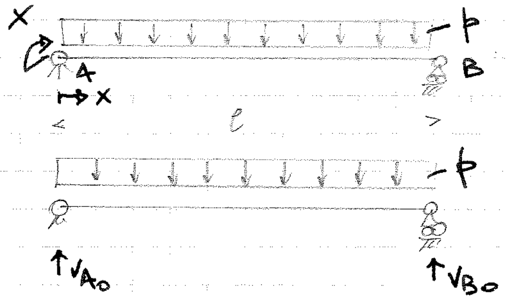
Si osservi che il diagramma dei momenti flettenti si annulla in corrispondenza del valore $x = l/4$ e ammette un massimo in corrispondenza della sezione $x = 5/8\, l$





Per la scelta delle incognite iperstatiche, basarsi sulle considerazioni fatte su "Castigliani, Petrini, Urbano - Esercizi di Scienza delle Costruzioni"
Interessa solo mettere in luce che la struttura principale deve essere isostatica non labile: in altri termini la quantità (o le quantità, se si tratta di più d'una) individuate come iperstatica deve effettivamente essere una quantità incognita non determinabile sulla base di sole considerazioni di equilibrio.
La iperstatica può essere costituita da una componente di reazione vincolare oppure da una componente delle azioni interne, opportunamente evidenziata tramite uno svincolo (che ha da essere una cerniera se si vuole utilizzare come incognita un momento flettente, un pattino se si impiega il taglio, un manicotto nel caso dell'azione assiale).

Per la struttura già considerata, due scelte lecite di incognite iperstatiche sono qui evidenziate:



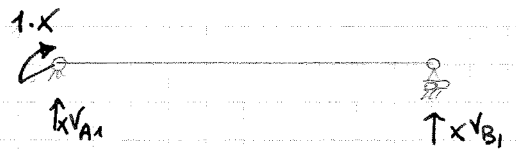
$V_{A_0} = \frac{pl}{2}$ $\quad H_{A_0} = 0$

$V_{B_0} = \frac{pl}{2}$

$N_0(x) = 0$

$M_0(x) = \frac{px}{2}(l-x)$

$T_0(x) = \frac{pl}{2} - px$



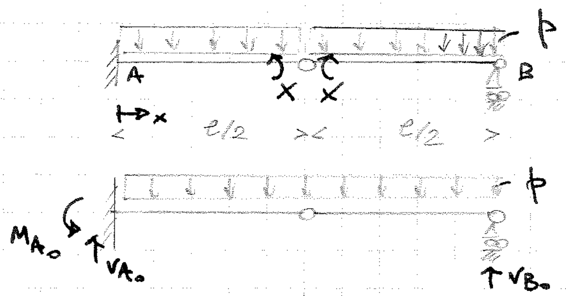
$XV_{A1} = -X \cdot \frac{1}{l}$ $\quad XH_{A1} = 0$

$XV_{B1} = +X \cdot \frac{1}{l}$

$XN_1(x) = 0$

$XM_1(x) = X \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$

$XT_1(x) = -X\left(\frac{1}{l}\right)$



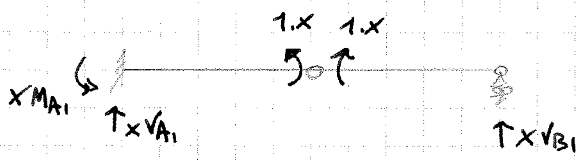
$V_{A_0} = \frac{3pl}{4}$ $\quad H_{A_0} = 0$

$V_{B_0} = \frac{pl}{4}$ $\quad M_{B_0} = \frac{pl^2}{4}$

$N_0(x) = 0$

$M_0(x) = -\frac{pl^2}{4} + \frac{3}{4}plx - \frac{px^2}{2}$ $\quad \left[M_0\left(\frac{l}{2}\right) = 0\right]$

$T_0(x) = \frac{3}{4}pl - px$



$XV_{A1} = -X \cdot \frac{2}{l}$ $\quad XH_{A1} = 0$

$XV_{B1} = X \cdot \frac{2}{l}$ $\quad XM_{A1} = -2 \cdot X$

$XN_1(x) = 0$

$XM_1(x) = 2X\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ $\quad [M_1(l) = 0]$

$XT_1(x) = -X\left(\frac{2}{l}\right)$

da qui si deducono le deformazioni generalizzate:

$$\varepsilon(x) = 0$$

$$\chi(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{px}{2}(\ell - x) + X\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{GA_T}\left[\frac{p\ell}{2} - px - X\left(\frac{1}{\ell}\right)\right]$$

$$\varepsilon(x) = 0$$

$$\chi(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{p\ell^2}{4} + \frac{3}{4}p\ell x - \frac{px^2}{2} + 2X\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{GA_T}\left[\frac{3}{4}p\ell - px - X\left(\frac{2}{\ell}\right)\right]$$

I sistemi di forze-sforzi in equilibrio si deducono immediatamente dalle condizioni di carico "1" applicate alla struttura principale, andando a scegliere valori unitari per l'iperstatica: si ottiene così, nei due casi:

$$1\cdot 0 = \int_0^\ell 1\cdot\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\left[\frac{\frac{px}{2}(\ell-x) + X\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}{EI}\right]dx + \int_0^\ell 1\left(-\frac{1}{\ell}\right)\left[\frac{\frac{p\ell}{2} - px - X\left(\frac{1}{\ell}\right)}{GA_T}\right]dx$$

$$0 = \frac{1}{EI}\int_0^\ell\left(\frac{px}{2}\ell - \frac{px^2}{2} - \frac{px^2}{2} + \frac{px^3}{2\ell}\right)dx + \frac{1}{EI}X\int_0^\ell\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2 dx + \frac{1}{GA_T}\int_0^\ell\left(-\frac{p}{2} + \frac{px}{\ell}\right)dx + \frac{1}{GA_T}X\int_0^\ell\left(\frac{1}{\ell}\right)^2 dx$$

$$0 = \frac{1}{EI}\left[\frac{px^2}{4}\ell - \frac{px^3}{3} + \frac{px^4}{8\ell}\right]_0^\ell + \frac{1}{EI}X\left[\left(-\frac{1}{\ell}\right)^{-1}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\right]_0^\ell + \frac{1}{GA_T}\left[-\frac{px}{2} + \frac{px^2}{2\ell}\right]_0^\ell + \frac{1}{GA_T}X\left(\frac{1}{\ell}\right)^2\cdot[x]_0^\ell$$

$$0 = \frac{1}{EI}\left[\frac{p\ell^3}{4} - \frac{p\ell^3}{3} + \frac{p\ell^3}{8}\right] + \frac{X}{3EI}\cdot\ell + \frac{1}{GA_T}\left[-\frac{p\ell}{2} + \frac{p\ell}{2}\right] + \frac{X}{GA_T}\frac{[x]_0^\ell}{\ell^2}$$

$$X\left(\frac{\ell}{3EI} + \frac{1}{\ell}\frac{1}{GA_T}\right) = -\frac{p\ell^3}{24EI}$$

$$X = \frac{-\frac{p\ell^3}{24EI}}{\frac{\ell}{3EI} + \frac{1}{GA_T\ell}} \simeq -\frac{p\ell^2}{8}$$

$$1(\varphi_s + \varphi_d) = \int_0^\ell 1\cdot\left(2 - \frac{2x}{\ell}\right)\left[\frac{-\frac{p\ell^2}{4} + \frac{3}{4}p\ell x - \frac{px^2}{2} + 2X\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}{EI}\right]dx + \int_0^\ell 1\cdot\left(-\frac{2}{\ell}\right)\left[\frac{\frac{3}{4}p\ell - px - X\frac{2}{\ell}}{GA_T}\right]dx$$

$$1\cdot 0 = \frac{1}{EI}\int_0^\ell\left(-\frac{p\ell^2}{2} + \frac{3}{2}p\ell x - px^2 + \frac{p\ell x}{2} - \frac{3}{2}px^2 + \frac{px^3}{\ell}\right)dx + \frac{4X}{EI}\int_0^\ell\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2 dx + \frac{1}{GA_T}\int_0^\ell\left(-\frac{3}{2}p + \frac{2px}{\ell}\right)dx + \frac{1}{GA_T}X\int_0^\ell\frac{4}{\ell^2}dx$$

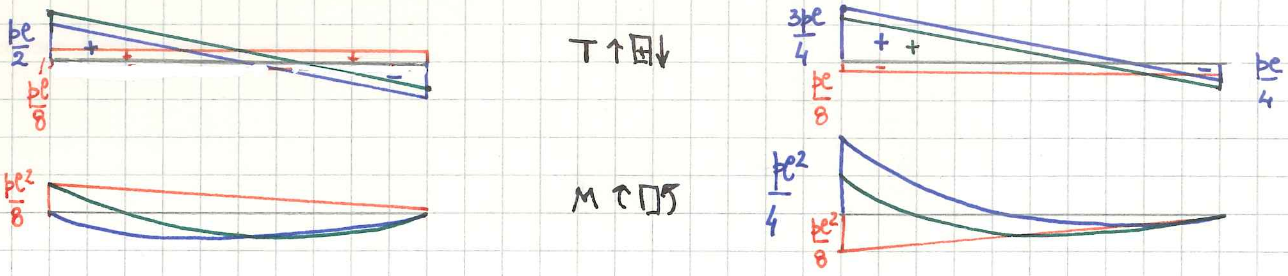
$$0 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{p\ell^2 x}{2} + \frac{3}{4}p\ell x^2 - \frac{px^3}{3} + \frac{p\ell x^2}{4} - \frac{px^3}{2} + \frac{px^4}{4\ell}\right]_0^\ell + \frac{4X}{EI}\left[-\ell\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^3\frac{1}{3}\right]_0^\ell + \frac{1}{GA_T}\left[-\frac{3px}{2} + \frac{px^2}{\ell}\right]_0^\ell + \frac{1}{GA_T}X\frac{4}{\ell^2}[x]_0^\ell$$

$$0 = \frac{1}{EI}\left[-p\ell^3 + \frac{5}{4}p\ell^3 - \frac{p\ell^3}{3}\right] + 4\frac{X}{EI}\ell + \frac{1}{GA_T}\left(-\frac{p\ell}{2}\right) + \frac{X}{GA_T 3\ell^2}4[x]_0^\ell$$

$$X\left(\frac{4\ell}{3EI} + \frac{4}{\ell}\cdot\frac{1}{GA_T}\right) = +\frac{p\ell^3}{12EI} + \frac{\left(+\frac{p\ell}{2}\right)}{GA_T}$$

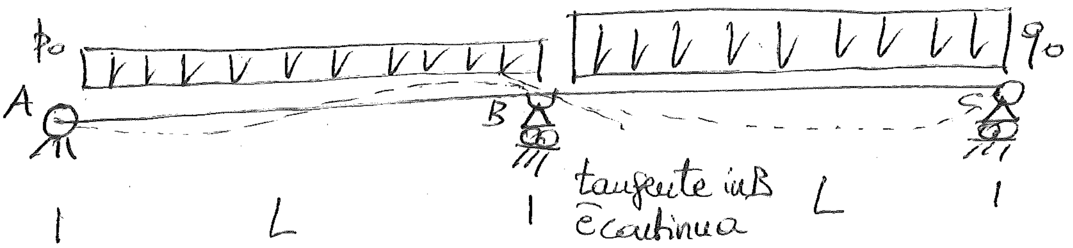
$$X = \frac{+\frac{p\ell^3}{12EI} + \frac{p\ell}{2GA_T}}{\frac{4\ell}{3EI} + \frac{4}{\ell GA_T}} \simeq +\frac{p\ell^2}{16}$$

I diagrammi delle azioni interne risultano nei due casi:

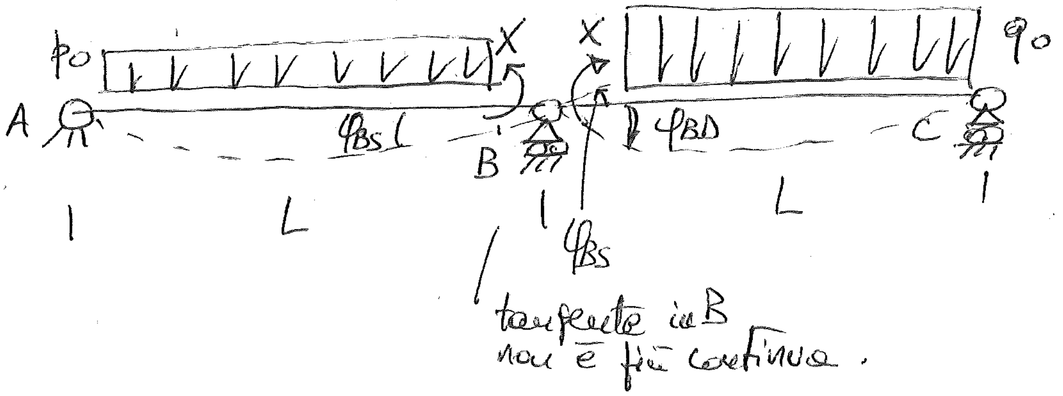


Principio dei lavori virtuali per travi iperstatiche

Applicazione al caso di travi continue.

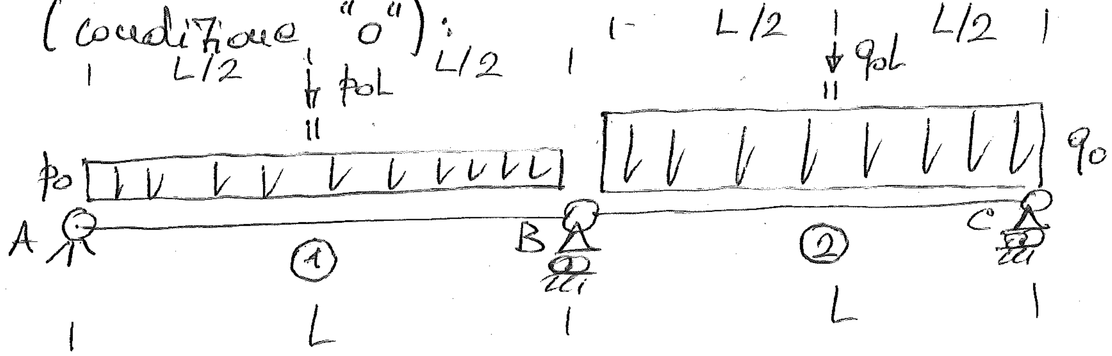


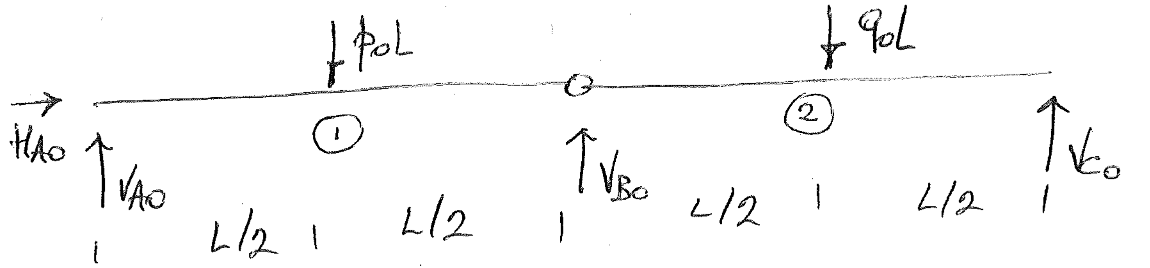
Struttura iperstatica: $\Delta\varphi_B = 0$



Struttura resa isostatica: $\Delta\varphi_B = \varphi_{BS} + \varphi_{BD} \neq 0$

A) Struttura resa isostatica soggetta a sole azioni esterne (condizione "0"):





$$\rightarrow R_x = 0 \qquad H_{A0} = 0$$

$$\uparrow R_y = 0 \qquad V_{A0} + V_{B0} + V_{C0} - p_0 L - q_0 L = 0$$

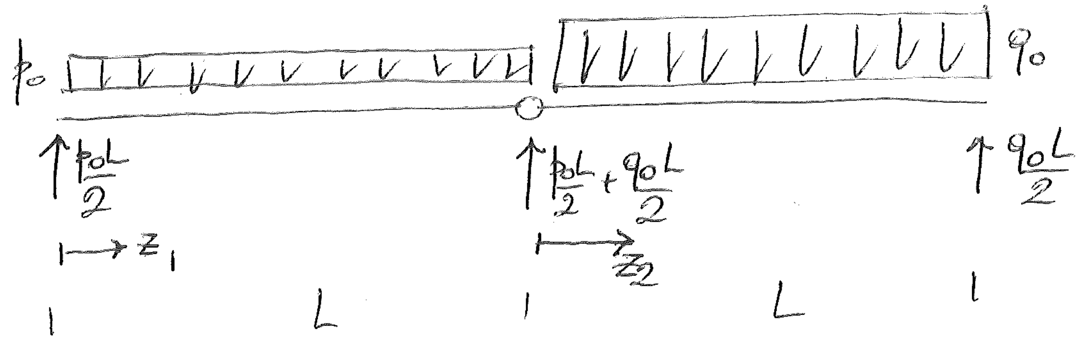
$$\circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \qquad -\frac{p_0 L^2}{2} + V_{B0} L - \frac{3}{2} q_0 L^2 + V_{C0}\, 2L = 0$$

eq. cardinali

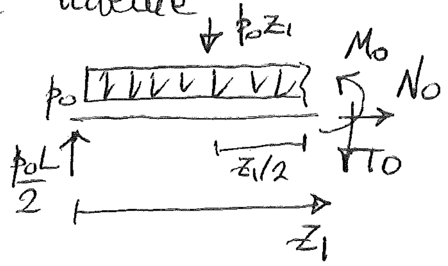
$$\circlearrowleft M^{(2)}_{z(B)} = 0 \qquad -\frac{q_0 L^2}{2} + V_{C0} L = 0$$

eq. ausiliaria

segue: $H_{A0} = 0$; $V_{C0} = \frac{q_0 L}{2}$; $V_{B0} = \frac{p_0 L}{2} + \frac{q_0 L}{2}$; $V_{A0} = \frac{p_0 L}{2}$



Azioni interne

① 

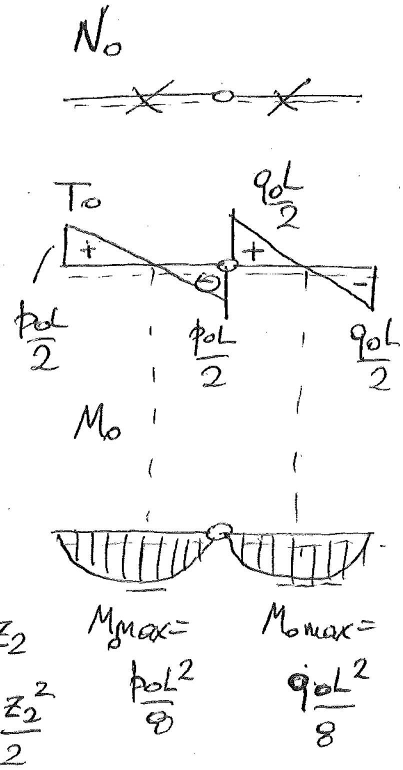
A → B

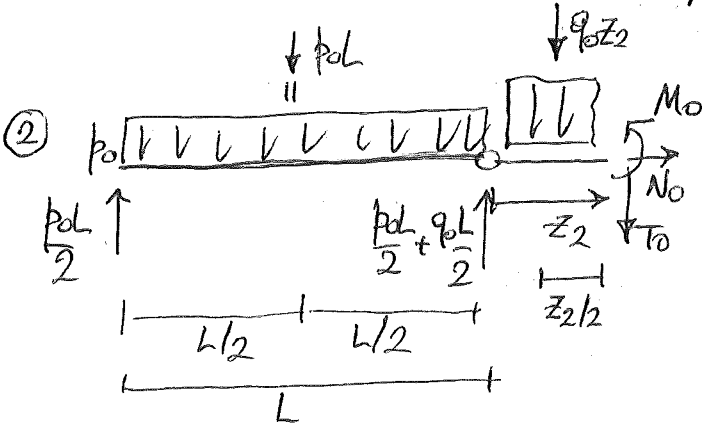
$0 \leq z_1 < L$

$N_0(z_1) = 0$

$T_0(z_1) = \frac{p_0 L}{2} - p_0 z_1$

$M_0(z_1) = \frac{p_0 L}{2} z_1 - \frac{p_0 z_1^2}{2}$



② 

B → C

$0 < z_2 \leq L$

$N_0(z_2) = 0$

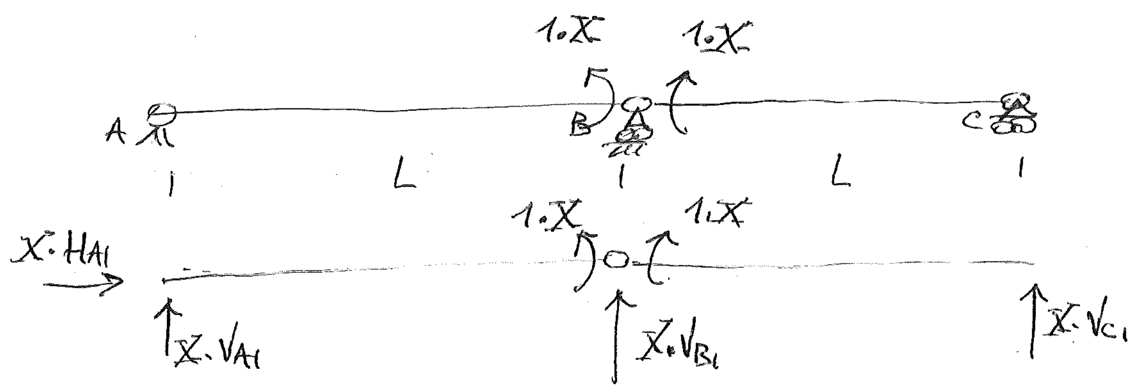
$T_0(z_2) = \frac{q_0 L}{2} - q_0 z_2$

$M_0(z_2) = \frac{q_0 L z_2}{2} - q_0 \frac{z_2^2}{2}$

infatti $\circlearrowleft M_{(z_2)} = 0 \quad -\frac{p_0 L}{2}(L + z_2) + p_0 L\left(\frac{L}{2} + z_2\right) - \left(\frac{p_0 L}{2} + \frac{q_0 L}{2}\right) z_2 + q_0 \frac{z_2^2}{2} + M_0(z_2) = 0$

$$M_0(z_2) = \cancel{\frac{p_0 L^2}{2}} + \cancel{\frac{p_0 L}{2} z_2} - \cancel{\frac{p_0 L^2}{2}} - \cancel{p_0 L z_2} + \cancel{\frac{p_0 L}{2} z_2} + \frac{q_0 L}{2} z_2 - q_0 \frac{z_2^2}{2} = \frac{q_0 L}{2} z_2 - \frac{q_0 z_2^2}{2}.$$

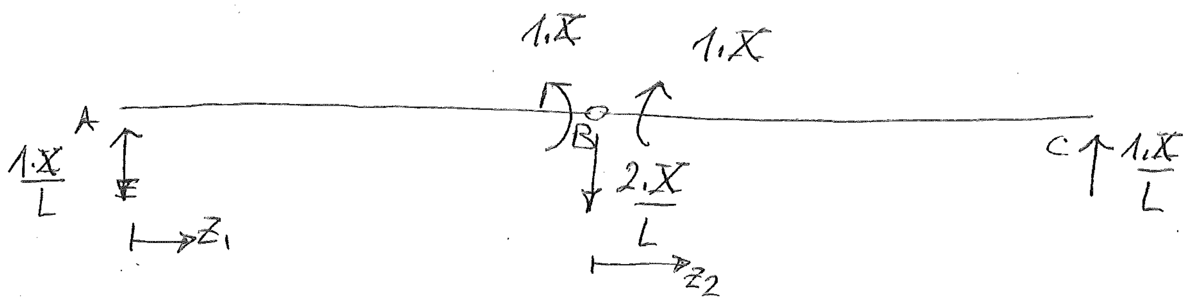
B) Struttura resa isostatica soggetta alla sola azione della iperstatica $X = 1 \cdot X$ (condizione "1"$\cdot X$)

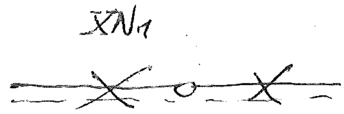


$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow R_x = 0 \quad X H_{A1} = 0 \\ &\uparrow R_y = 0 \quad X V_{A1} + X V_{B1} + X V_{C1} = 0 \\ &\circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad X V_{B1} \cdot L + X \cdot V_{C1} \cdot 2L = 0 \end{aligned}\right\} \text{eq. cardinali}$$

$5.\ M_{z(B)}^{(2)} = 0 \quad -1 \cdot X + X \cdot V_{c_1} L = 0$ eq. ausiliaria

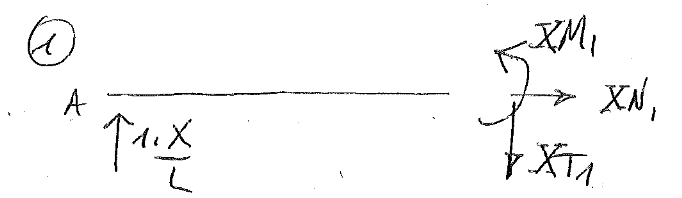
ne segue: $XH_{A1} = 0;\ XV_{C1} = \frac{1 \cdot X}{L};\ XV_{B1} = -2\frac{1 \cdot X}{L};\ XV_{A1} = \frac{1 \cdot X}{L}$





Azioni interne:

(1)



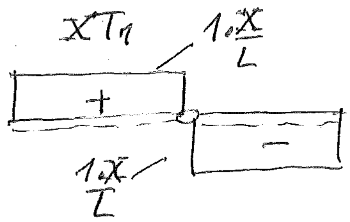
A → B

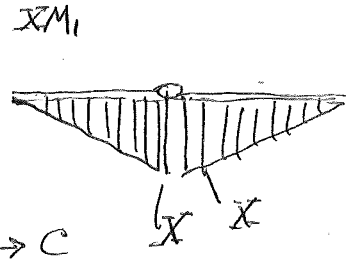
$0 \leq z_1 < L$

$XN_1(z_1) = 0$

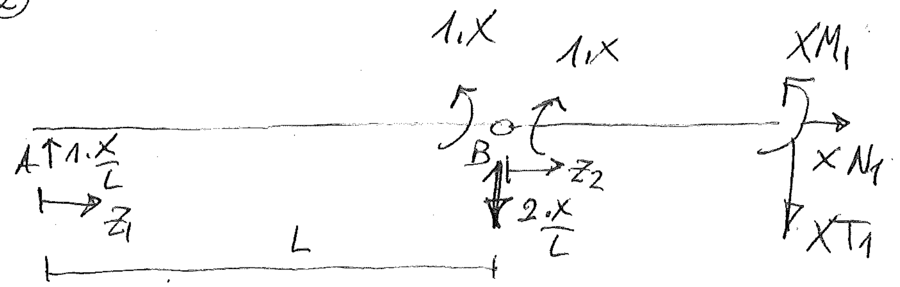
$XT_1(z_1) = \frac{1 \cdot X}{L}$

$XM_1(z_1) = \frac{1 \cdot X}{L} z_1$





(2)



B → C

$0 \leq z_2 \leq L$

$XN_1(z_1) = 0$

$XT_1(z_1) = -\frac{1 \cdot X}{L}$

$XM_1(z_1) = X\left(1 - \frac{z_2}{L}\right)$

infatti $\quad 5M_{(z_2)} = 0 \quad -\frac{1 \cdot X}{L}(L + z_2) + 1 \cdot X - 1 \cdot X + \frac{2 \cdot X}{L} z_2 + XM_1(z_2) = 0$

$$XM_1(z_2) = \frac{1 \cdot X}{L} L + \frac{1 \cdot X}{L} z_2 - \cancel{1 \cdot X} + \cancel{1 \cdot X} - \frac{2X}{L} z_2 = 1 \cdot X - \frac{1 \cdot X}{L} z_2$$

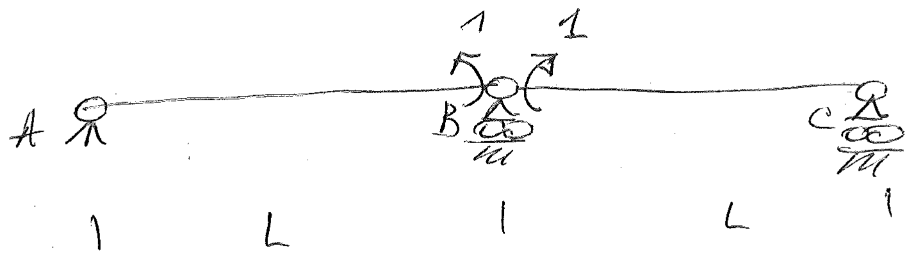
c) Sistema reale: spostamenti e deformazioni congruenti

$$\varepsilon = \frac{N_0 + XN_1}{EA} = 0 \qquad \forall z_1, \forall z_2$$

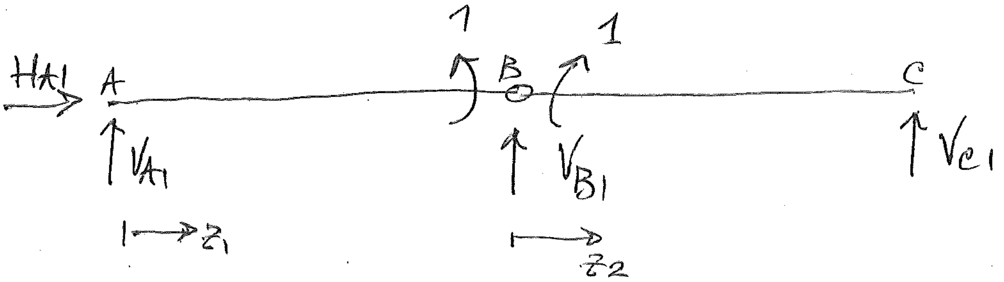
$$\gamma = \frac{T_0 + XT_1}{GA_T} = \begin{cases} \dfrac{\frac{p_0 L}{2} - p_0 z_1 + X\frac{1}{L}}{GA_T} & \begin{matrix} A \to B \\ 0 \leq z_1 < L \end{matrix} \\[2ex] \dfrac{\frac{q_0 L}{2} - q_0 z_2 - X\frac{1}{L}}{GA_T} & \begin{matrix} B \to C \\ 0 \leq z_2 \leq L \end{matrix} \end{cases}$$

$$\chi = \frac{M_0 + X M_1}{EJ} = \begin{cases} \dfrac{q_0 \frac{L}{2} z_1 - q_0 \frac{z_1^2}{2} + X \frac{z}{L}}{EJ} & A \to B \quad 0 \le z_1 < L \\[2ex] \dfrac{q_0 \frac{L}{2} z_2 - q_0 \frac{z_2^2}{2} + X\left(1 - \frac{z_2}{L}\right)}{EJ} & B \to C \quad 0 < z_2 \le L \end{cases}$$

D) Sistema ausiliario: forze e sforzi in equilibrio



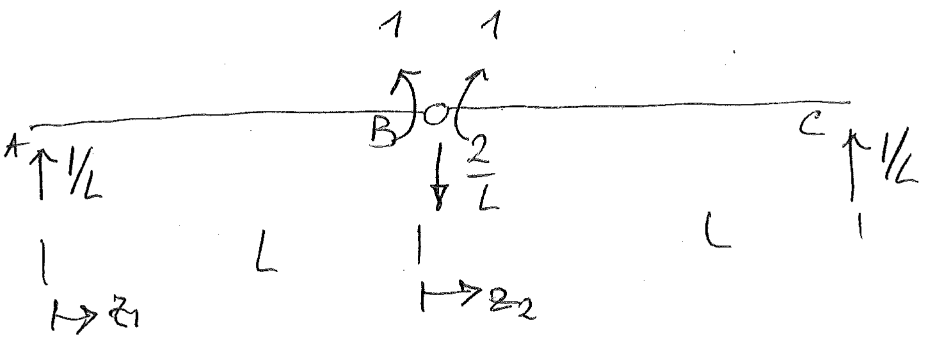
NB: Le 2 coppie applicate lavorano rispettivamente per φ_{BS} e φ_{BD}



NOTA: È EQUIVALENTE alla struttura resa isostatica soggetta alla sola azione dell'iperstatica quando si sceglie $X = 1$.

Pertanto:

$H_{A1} = 0$; $V_{A1} = \dfrac{1}{L}$; $V_{B1} = -\dfrac{2}{L}$; $V_{C1} = \dfrac{1}{L}$



e analogamente per le azioni interne

$$\left.\begin{aligned} N_1(z_1) &= 0 \\ T_1(z_1) &= \frac{1}{L} \\ M_1(z_1) &= \frac{1}{L} z_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &A \to B \\ &0 \le z_1 < L \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} N_1(z_2) &= 0 \\ T_1(z_2) &= -\frac{1}{L} \\ M_1(z_2) &= 1\left(1-\frac{z_2}{L}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &B \to C \\ &0 \le z_2 \le L \end{aligned}$$

E) APPLICAZIONE DEL P.L.V. (trascurando deformazione a taglio)

$$L_e = 1 \cdot \varphi_{BS} + 1 \cdot \varphi_{BD} = 1 \cdot \Delta\varphi_B = 0$$

$\uparrow$ $\Delta\varphi_B = 0$ per congruenza.

$$L_i = \cancel{\int_0^L N_1 \cdot \varepsilon \, dz_1} + \cancel{\int_0^L N_1 \cdot \varepsilon \, dz_2} + \int_0^L M_1 \chi \, dz_1 + \int_0^L M_1 \chi \, dz_2 .$$

$$L_i = \int_0^L 1 \cdot \frac{z_1}{L} \cdot \left(\frac{p_0 \frac{L}{2} z_1 - p_0 \frac{z_1^2}{2} + X \frac{z_1}{L}}{EJ} \right) dz_1 + \int_0^L 1 \cdot \left(1-\frac{z_2}{L}\right) \left[\frac{q_0 \frac{L}{2} z_2 - q_0 \frac{z_2^2}{2} + X\left(1-\frac{z_2}{L}\right)}{EJ} \right] dz_2$$

$$L_e = L_i \quad \Rightarrow \quad L_i = 0 \qquad \text{ovvero} \quad C_{10} + X C_{11} = 0$$

$$L_i = \int_0^L 1 \cdot \frac{z_1}{L} \, \frac{p_0 \frac{L}{2} z_1 - p_0 \frac{z_1^2}{2}}{EJ} dz_1 + X \int_0^L 1 \cdot \frac{z_1}{L} \, \frac{\frac{z_1}{L}}{EJ} dz_1 +$$

$$+ \int_0^L 1\left(1-\frac{z_2}{L}\right) \frac{q_0 \frac{L}{2} z_2 - q_0 \frac{z_2^2}{2}}{EJ} dz_2 + X \int_0^L 1 \cdot \left(1-\frac{z_2}{L}\right) \frac{\left(1-\frac{z_2}{L}\right)}{EJ} dz_2$$

$$L_i = \underbrace{\left\{ \int_0^L \frac{p_0 \frac{L}{2} \frac{z_1^2}{L} - p_0 \frac{z_1^3}{2L}}{EJ} dz_1 + \int_0^L \frac{q_0 \frac{L}{2} z_2 - \frac{q_0 z_2^2}{2} - \frac{q_0 z_2^2}{2} + \frac{q_0 z_2^3}{2L}}{EJ} dz_2 \right\}}_{C_{10}} +$$

$$+ X \underbrace{\left\{ \int_0^L \frac{\frac{z_1^2}{L^2}}{EJ} dz_1 + \int_0^L \frac{\left(1-\frac{z_2}{L}\right)^2}{EJ} dz_2 \right\}}_{C_{11}}$$

$$C_{10} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^L \left(\frac{p_0}{2}z_1^2 - \frac{p_0 z_1^3}{2L}\right)dz_1 + \int_0^L \left(\frac{q_0 L}{2}z_2 - q_0 z_2^2 + \frac{q_0 z_2^3}{2L}\right)dz_2\right\}$$

$$C_{10} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{p_0 z_1^3}{6} - \frac{p_0 z_1^4}{8L}\right]_0^L + \frac{1}{EJ}\left[\frac{q_0 L z_2^2}{4} - \frac{q_0 z_2^3}{3} + \frac{q_0 z_2^4}{8L}\right]_0^L$$

$$C_{10} = \frac{p_0 L^3}{6EJ} - \frac{p_0 L^3}{8EJ} + \frac{q_0 L^3}{4EJ} - \frac{q_0 L^3}{3EJ} + \frac{q_0 L^3}{8EJ} = \frac{(4-3)p_0 L^3}{24EJ} + \frac{(6-8+3)q_0 L^3}{24EJ}$$

$$C_{10} = \frac{p_0 L^3}{24EJ} + \frac{q_0 L^3}{24EJ}$$

$$C_{11} = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^L \frac{z_1^2}{L^2}dz_1 + \int_0^L \left(\frac{L-z_2}{L}\right)^2 dz_2\right\}$$

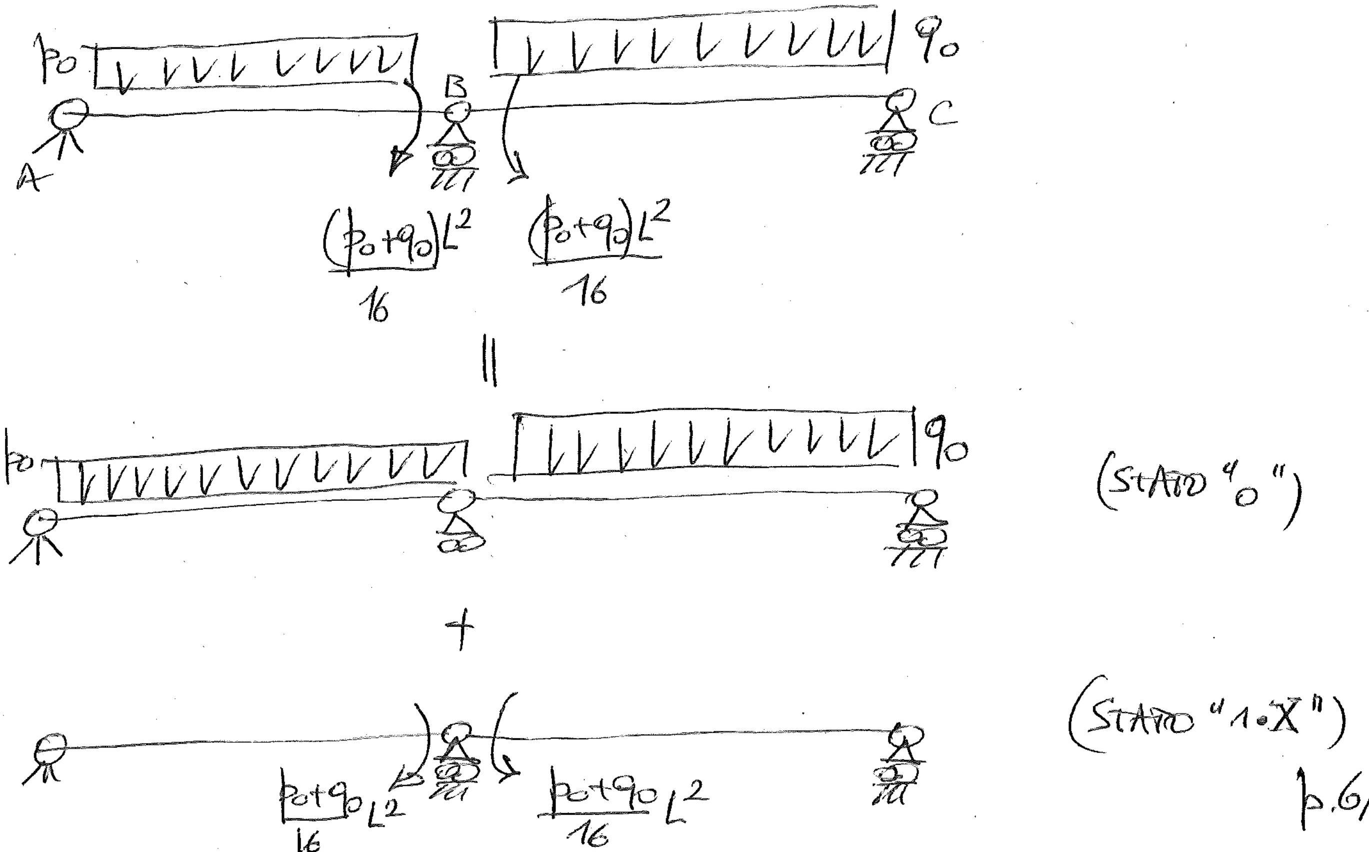
$$C_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{z_1^3}{3L^2}\right]_0^L + \frac{1}{EJ}\left[\left(1-\frac{z_2}{L}\right)^3 \cdot \left(-\frac{L}{3}\right)\right]_0^L$$

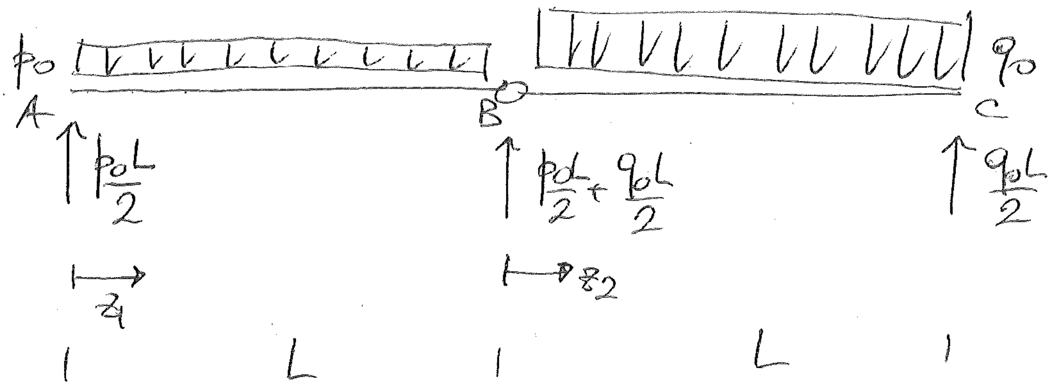
$$C_{11} = \frac{L}{3EJ} + \frac{L}{3EJ} = \frac{2L}{3EJ}$$

$$C_{10} + XC_{11} = 0 \Rightarrow X = -\frac{C_{10}}{C_{11}} = -\frac{\frac{p_0 L^3}{24EJ} + \frac{q_0 L^3}{24EJ}}{\frac{2}{3}\frac{L}{EJ}}$$

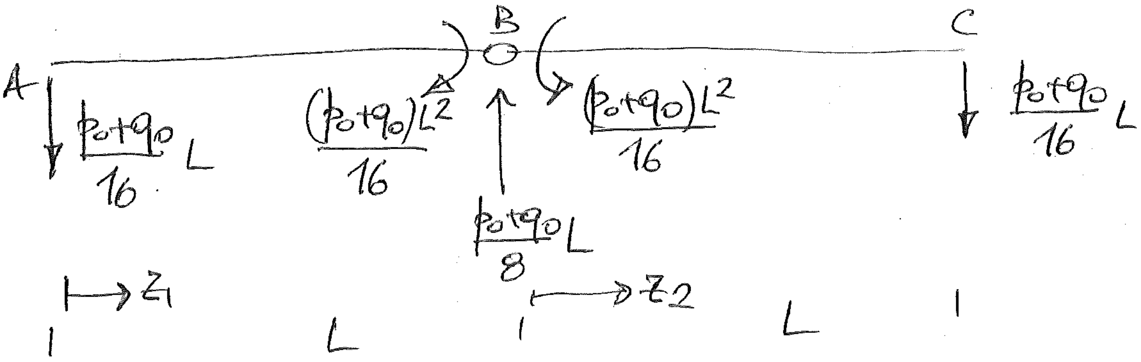
ovvero $\boxed{X = -\frac{p_0 L^2}{16} - \frac{q_0 L^2}{16}}$

F) SOSTITUZIONE DEL VALORE DELL' IPERSTATICA





+

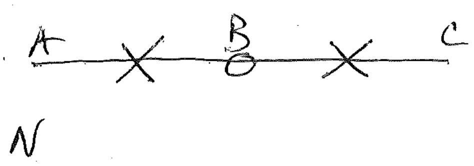


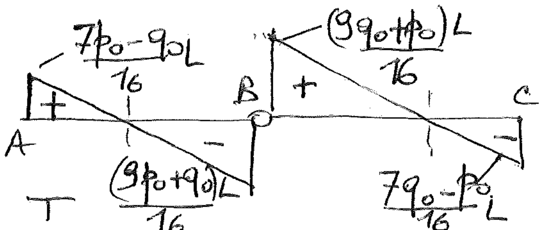
Pertanto

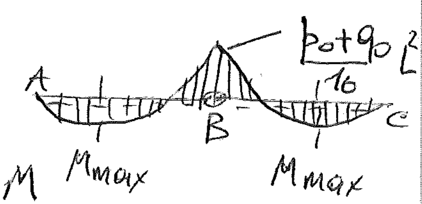
$$N = N_0 - \frac{(p_0+q_0)L^2}{16}N_1 = \begin{cases} 0 & A\to B \quad 0\le z_1 < L \\ 0 & B\to C \quad 0 < z_2 \le L \end{cases}$$

$$T = T_0 - \left(\frac{p_0+q_0}{16}\right)L^2 T_1 = \begin{cases} \frac{7}{16}p_0L - p_0 z_1 - \frac{1}{16}q_0 L & A\to B \quad 0\le z_1 < L \\ \frac{9}{16}q_0L - q_0 z_2 + \frac{1}{16}p_0 L & B\to C \quad 0 < z_2 \le L \end{cases}$$

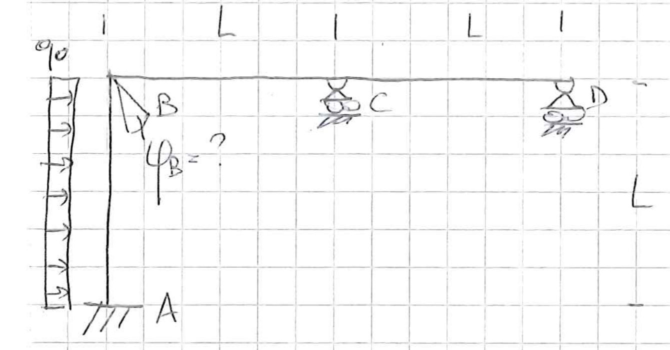
$$M = M_0 - \left(\frac{p_0+q_0}{16}\right)L^2 M_1 = \begin{cases} \frac{7}{16}p_0Lz_1 - \frac{p_0z_1^2}{2} - \frac{1}{16}q_0Lz_1 & A\to B \quad 0\le z_1 < L \\ -\frac{q_0L^2}{16} + \frac{9}{16}q_0Lz_2 - \frac{q_0z_2^2}{2} - \frac{p_0L^2}{16} + \frac{p_0Lz_2}{16} & B\to C \quad 0 < z_2 \le L \end{cases}$$

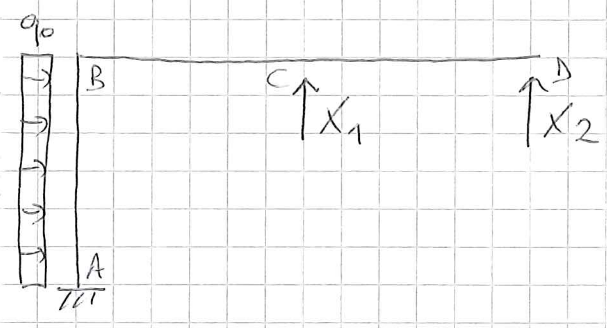


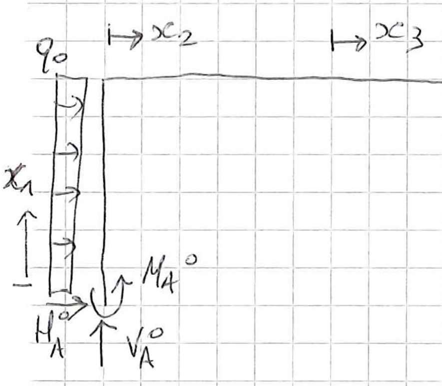




STRUTTURA 2 VOLTE IPERSTATICA.



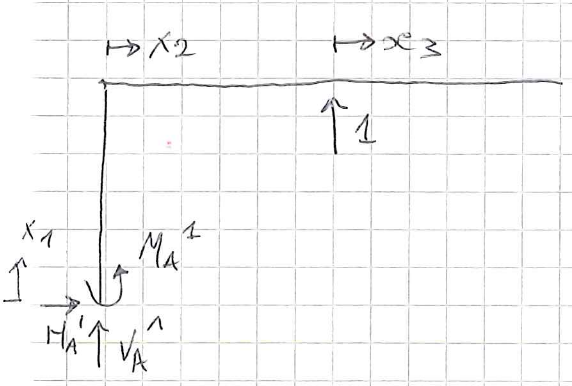




$V_A^0 = 0$ $\qquad M_0(x_1) = q_0 L x_1 - q_0 \frac{L^2}{2} - q_0 \frac{x_1^2}{2}$

$H_A^0 = -qL$ $\qquad M_0(x_2) = 0$

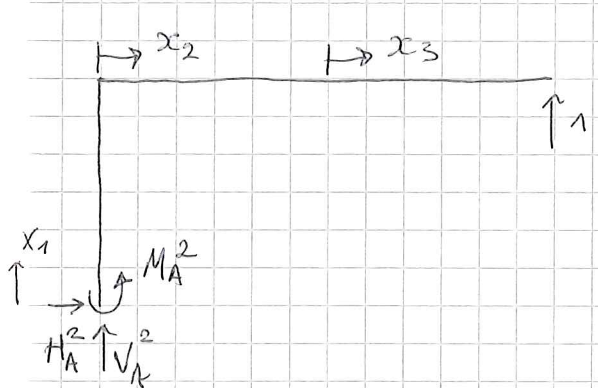
$M_A^0 = q\frac{L^2}{2}$ $\qquad M_0(x_3) = 0$



$V_A^1 = -1$ $\qquad M_1(x_1) = 1 \cdot L$

$H_A^1 = 0$ $\qquad M_1(x_2) = 1(L - x_2)$

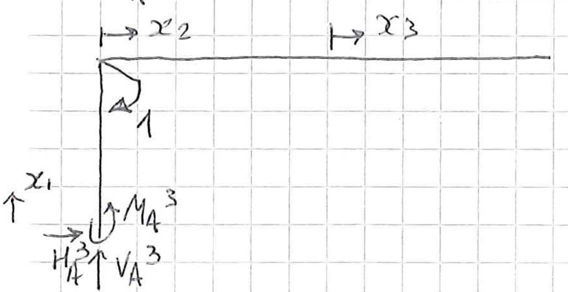
$M_A^1 = -1 \cdot L$ $\qquad M_1(x_3) = 0$



$V_A^2 = -1$ $\qquad M_2(x_1) = 1 \cdot 2L$

$H_A^2 = 0$ $\qquad M_2(x_2) = 1(2L - x_2)$

$M_A^2 = -1 \cdot 2L$ $\qquad M_2(x_3) = 1 \cdot (L - x_3)$



$V_A^3 = 0$ $\qquad M_3(x_1) = -1$

$H_A^3 = 0$ $\qquad M_3(x_2) = 0$

$M_A^3 = 1$ $\qquad M_3(x_3) = 0$

p.l.v.

1° eq: $\underbrace{1\cdot 0}_{L_e:\,1\cdot v_C} = \underbrace{\int_S M_1 \frac{M_0+X_1M_1+X_2M_2}{EJ}\,ds}_{L_i} = \eta_{10}+\eta_{11}X_1+\eta_{12}X_2$

$$\eta_{10} = \int_0^L 1\cdot L\,\frac{-\frac{q_0}{2}(L-x_1)^2}{EJ}\,dx_1 = -\frac{q_0L}{2EJ}\int_0^L (L-x_1)^2\,dx_1 = \frac{-q_0L}{2EJ}\left[-\frac{(L-x_1)^3}{3}\right]_0^L$$

$$= -\frac{q_0L}{2EJ}\,\frac{L^3}{3} = -\frac{q_0L^4}{6EJ}$$

$$\eta_{11} = \int_0^L 1\cdot L\,\frac{(1\cdot L)}{EJ}\,dx_1 + \int_0^L 1\cdot(L-x_2)\,\frac{1\cdot(L-x_2)}{EJ}\,dx_2 = 1\cdot\frac{L^2}{EJ}\int_0^L dx_1 + \frac{1}{EJ}\int_0^L (L-x_2)^2\,dx_2$$

$$= 1\cdot\frac{L^3}{EJ} + \frac{1}{EJ}\left[-\frac{(L-x)^3}{3}\right]_0^L = \frac{L^3}{EJ} + \frac{L^3}{3EJ} = \frac{4}{3}\,\frac{L^3}{EJ}$$

$$\eta_{12} = \int_0^L 1\cdot L\,\frac{1\cdot 2L}{EJ}\,dx_1 + \int_0^L 1(L-x_2)\,\frac{1(2L-x_2)}{EJ}\,dx_2 = \frac{2L^2}{EJ}\int_0^L dx_1 + \frac{1}{EJ}\int_0^L (2L^2-3Lx_2+x_2^2)\,dx_2$$

$$= 1\left(\frac{2L^3}{EJ} + \frac{2L^3}{EJ} - \frac{3L^3}{2EJ} + \frac{L^3}{3EJ}\right) = 1\cdot\frac{12+12-9+2}{6EJ}L^3 = \frac{17}{6}\,\frac{L^3}{EJ}$$

2° eq: $\underbrace{1\cdot 0}_{L_e:\,1\cdot v_D} = \int_S M_2\,\frac{M_0+X_1M_1+X_2M_2}{EJ}\,ds = \eta_{20}+\eta_{21}X_1+\eta_{22}X_2$

$$\eta_{20} = \int_0^L 1\cdot 2L\,\frac{-\frac{q_0}{2}(L-x_1)^2}{EJ}\,dx_1 = -\frac{q_0L}{EJ}\int_0^L (L-x_1)^2\,dx_1 = \frac{-q_0L}{EJ}\left[-\frac{(L-x_1)^3}{3}\right]_0^L$$

$$= -\frac{q_0L^4}{3EJ}$$

$$\eta_{21} = \eta_{12} = \frac{17}{6}\,\frac{L^3}{EJ}$$

$$\eta_{22} = \int_0^L 1\cdot 2L\,\frac{1\cdot 2L}{EJ}\,dx_1 + \int_0^L 1\cdot(2L-x_2)\,\frac{2L-x_2}{EJ}\,dx_2 + \int_0^L 1\cdot(L-x_3)\,\frac{L-x_3}{EJ}\,dx_3$$

$$= 1\cdot\frac{4L^3}{EJ} + \left[\cancel{-\frac{L^3}{3EJ}} + \frac{8L^3}{3EJ}\right] + \cancel{\frac{L^3}{3EJ}} = \frac{20}{3}\,\frac{L^3}{EJ}.$$

Ne segue:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\frac{L^3}{EJ}X_1 + \frac{17}{6}\frac{L^3}{EJ}X_2 = \frac{q_0L^4}{6EJ} \\ \frac{17}{6}\frac{L^3}{EJ}X_1 + \frac{20}{3}\frac{L^3}{EJ}X_2 = \frac{q_0L^4}{3EJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8X_1 + 17X_2 = q_0L \\ 17X_1 + 40X_2 = 2q_0L \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{q_0L}{8} - \frac{17}{8}X_2 \\ \frac{17}{8}q_0L - \frac{289}{8}X_2 + \frac{320}{8}X_2 = 2q_0L \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{31}{8}X_2 = -\frac{1}{8}q_0L \qquad X_2 = -\frac{1}{31}q_0L \\ X_1 = \underbrace{\frac{q_0L}{8}}_{=\frac{31}{248}q_0L} + \frac{17}{248}q_0L = \frac{\cancel{48}^{6}\, q_0L}{\cancel{248}_{31}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{6}{31}q_0L \\ X_2 = -\frac{1}{31}q_0L \end{cases}$$

3ª eq:

$$\underbrace{1\cdot\varphi_B}_{Le} = \int M_3 \frac{M_0 + X_1M_1 + X_2M_2}{EJ}\,dx = \int(-1)\cdot\frac{-\frac{q_0}{2}(L-x_1)^2 + \frac{6}{31}q_0L^2 - \frac{2}{31}q_0L^2}{EJ}\,dx$$

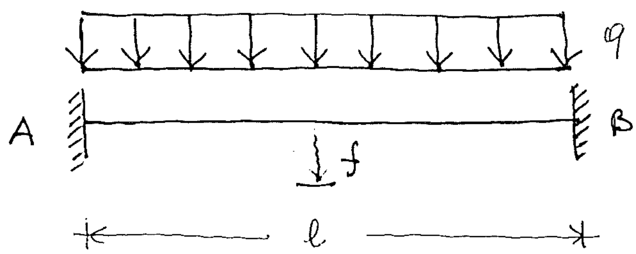
$$\varphi_B = \frac{q_0}{2EJ}\int_0^L (L-x_1)^2\,dx - \frac{6}{31}\frac{q_0L^2}{EJ}\int_0^L dx + \frac{2}{31}\frac{q_0L^2}{EJ}\int_0^L dx$$

$$\varphi_B = \frac{q_0}{2EJ}\left[\frac{(L-x_1)^3}{3}\right]_0^L - \frac{6}{31}\frac{q_0L^3}{EJ} + \frac{2}{31}\frac{q_0L^3}{EJ} = -\frac{q_0L^3}{6EJ} - \frac{4}{31}\frac{q_0L^3}{EJ} = -\frac{31+24}{186EJ}q_0L^3$$

$$\varphi_B = -\frac{55}{186}\frac{q_0L^3}{EJ}.$$

Calcolo di spostamenti di strutture iperstatiche con il P.L.V.

Esempio 1

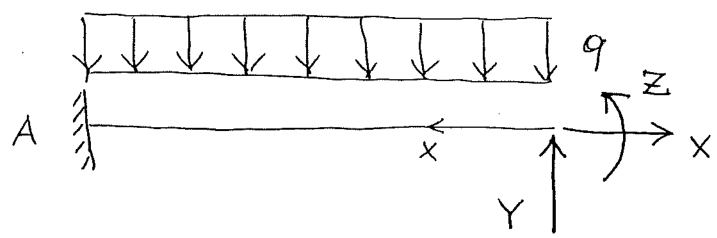


determinare la freccia f in mezzeria.

a) Sistema principale

Adottiamo come sistema principale la trave incastrata in A e libera in B.

Mettiamo in evidenza le reazioni iperstatiche X, Y, Z



L'incastro non consente né spostamenti né rotazioni.

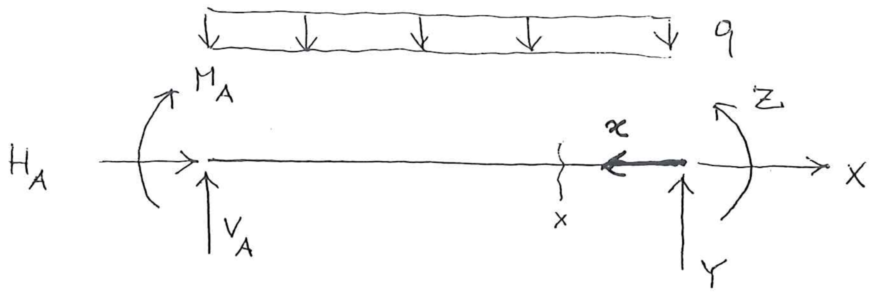
Quindi:

a) Componente orizzontale dello spost. in B è nullo.

b) Componente verticale dello spost. in B è nullo

c) Rotazione della sezione in B è nulla.

Calcolo delle reazioni vincolari:

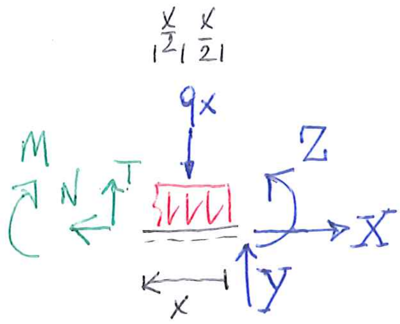


$$H_A = -X$$

$$V_A = ql - Y$$

$$M_A = -\frac{ql^2}{2} + Yl + Z$$

Calcolo delle azioni interne:



$$N(x) = X$$

$$T(x) = qx - Y$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + Yx + Z$$

Calcolo delle deformazioni elementari:

$$d\varepsilon = \frac{N(x)\,dx}{EA} = \frac{X}{EA}\,dx$$

$$d\gamma = \chi\frac{T(x)\,dx}{GA} = \chi\frac{(qx - Y)}{GA}\,dx$$

$$d\varphi = \frac{M}{EJ}\,dx = \frac{\left(-\frac{qx^2}{2} + Yx + Z\right)}{EJ}\,dx$$

1° sistema equilibrato.

Reazioni

$H'_A = -1$

$V'_A = 0$

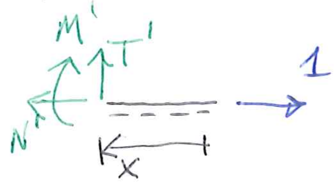
$M'_A = 0$

Azioni interne

$N'(x) = 1$

$T'(x) = 0$

$M'(x) = 0$



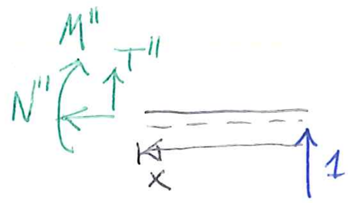
Con l'equazione dei lavori virtuali si impone che lo spostamento orizzontale è nullo:

$$1 \cdot 0 = \int_0^{\ell} N'(x)\, d\varepsilon$$

$$\boxed{0 = \int_0^{\ell} \frac{X}{EA}\, dx}$$

1ª equazione

2° sistema equilibrato



Reazioni

$H''_A = 0$

$V''_A = -1$

$M''_A = 1 \cdot \ell$

Azioni interne

$N'' = 0$

$T'' = -1$

$M'' = 1 \cdot x$

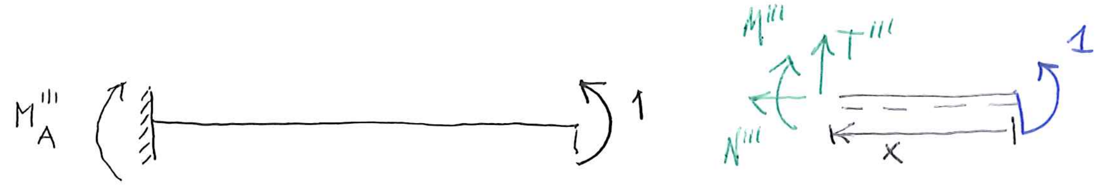
Imponiamo che lo spostamento verticale del punto B sia nullo:

$$1 \cdot 0 = \int_0^l T''(x)\, d\gamma + \int_0^l M''(x)\, d\varphi$$

$$\boxed{0 = \int_0^l (-1)\,\chi\, \frac{(qx - Y)}{GA}\, dx + \int_0^l (1 \cdot x) \left(\frac{-\frac{qx^2}{2} + Yx + Z}{EJ} \right) dx}$$

2ª equazione

3° sistema equilibrato



Reazioni

$H'''_A = 0$

$V'''_A = 0$

$M'''_A = 1$

Azioni interne

$N'''(x) = 0$

$M'''(x) = 1$

$T'''(x) = 0$

Imponiamo che la rotazione in B sia nulla

$$1 \cdot 0 = \int_0^l M'''(x)\, d\varphi$$

$$\boxed{0 = \int_0^l (1) \frac{\left(-\frac{qx^2}{2} + Yx + Z\right)}{EJ}\, dx}$$

3ª equazione

Le equazioni così ricavate costituiscono un sistema che consente di determinare le incognite iperstatiche X, Y e Z:

$$
\begin{cases}
X = 0 \\
\frac{1}{EJ}\int_0^l \left(-\frac{qx^3}{2} + Yx^2 + Zx\right)dx = 0 \\
\frac{1}{EJ}\int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2} + Yx + Z\right)dx = 0
\end{cases}
$$

si possono semplificare

Questo sistema è stato scritto nell'ipotesi di poter trascurare l'effetto del taglio sugli spostamenti, e assumendo E e J costanti lungo x.

Risulta allora:

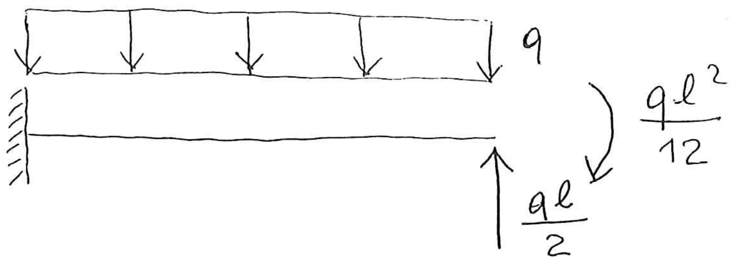
$$
\begin{cases}
X = 0 \\
-\frac{ql^4}{8} + Y\frac{l^3}{3} + Z\frac{l^2}{2} = 0 \\
-\frac{ql^3}{6} + Y\frac{l^2}{2} + Zl = 0
\end{cases}
$$

Da cui si ottiene:

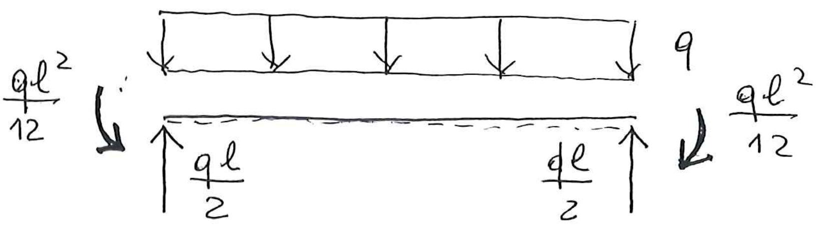
$$Y = \frac{ql}{2}$$ → risultato prevedibile da considerazioni di simmetria.

$$Z_1 = -\frac{ql^2}{12}$$

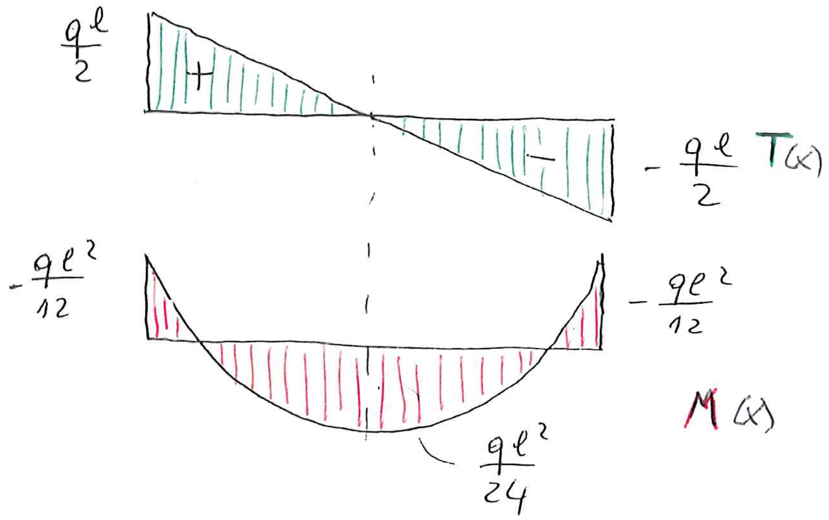
Pertanto:



Da cui si ricavano (in virtù delle espressioni date in precedenza) le reazioni vincolari:



ed i diagrammi delle azioni interne:



Una volta risolta la struttura iperstatica si tratta di determinare lo spostamento incognito.

Nel P.L.V. si assume come sistema congruente il sistema reale.

Invece il sistema equilibrato gode di tanti gradi di arbitrarietà quante sono le incognite iperstatiche.

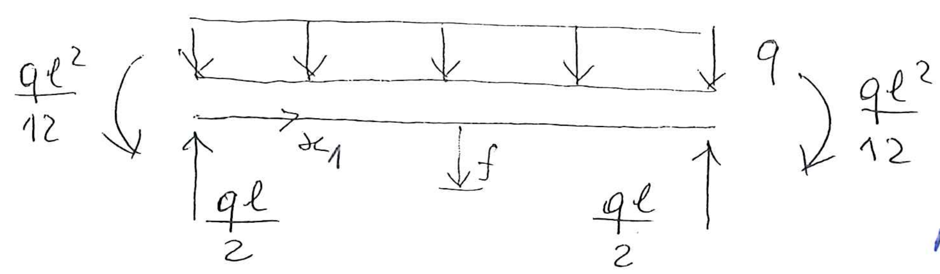
E' infatti possibile scegliere valori arbitrari per le iperstatiche senza che siano violate le condizioni di equilibrio.

In virtù di tale arbitrarietà si assumeranno i valori più comodi per le iperstatiche.

In generale conviene assumere valori nulli per tutte le iperstatiche.

Ci si riduce, in questo modo, al calcolo di componenti di spostamento di strutture isostatiche.

Sistema congruente := STRUTTURA REALE



NB: SI CAMBIA L'ASCISSA! x_1 AL POSTO DI x

Dobbiamo determinare quantità cinematiche:

Azioni interne:

$$N(x_1) = 0$$

$$T(x_1) = \frac{ql}{2} - qx_1$$

$$M(x_1) = \frac{ql}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} - \frac{ql^2}{12}$$

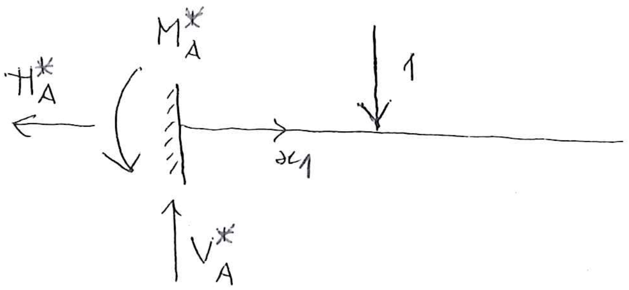
Deformazioni elementari:

$$d\varepsilon = \frac{N(x_1)}{EA}dx = 0$$

$$d\gamma = \chi\frac{T(x_1)}{GA}dx = \chi\frac{\left(\frac{ql}{2} - qx_1\right)}{GA}dx$$

$$d\varphi = \frac{M(x_1)}{EJ}dx = \frac{\left(\frac{ql}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} - \frac{ql^2}{12}\right)}{EJ}dx$$

Sistema equilibrato.



NB! SI USA SEMPRE x_1 !

Dobbiamo determinare quantità statiche.

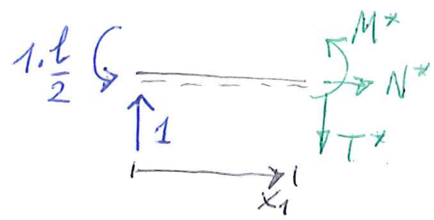
Reazioni vincolari:

$$H_A^* = 0$$

$$V_A^* = 1$$

$$M_A^* = 1 \cdot \frac{\ell}{2}$$

Azioni interne:



$$N^*(x_1) = 0$$

$$T^*(x_1) = \begin{cases} = 1 & \text{per } 0 \le x_1 \le \ell/2 \\ = 0 & \text{per } \frac{\ell}{2} \le x_1 \le \ell \end{cases}$$

$$M^*(x_1) = \begin{cases} = -1\left(\frac{\ell}{2} - x_1\right) & 0 \le x_1 < \ell/2 \\ = 0 & \ell/2 \le x_1 \le \ell \end{cases}$$

Equazione dei lavori virtuali:

$$1 \cdot f = \int_0^l N^*(x_1)\, d\varepsilon + \int_0^l T^*(x_1)\, d\gamma + \int_0^l M^*(x_1)\, d\varphi$$

ovvero:

$$f = \int_0^{l/2} 1 \cdot \chi \frac{\left(\frac{ql}{2} - qx_1\right)}{GA}\, dx + \int_0^{l/2} -\left(\frac{l}{2} - x_1\right) \frac{\left(\frac{ql}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} - \frac{ql^2}{12}\right)}{EJ}\, dx$$

$$f = \frac{\chi q}{GA} \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} - x_1\right) dx + \frac{q}{EJ} \int_0^{l/2} \left(\frac{l^3}{24} - \frac{l^2 x_1}{3} + \frac{3}{4} l x_1^2 - \frac{x_1^3}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\chi q}{GA} \left[\frac{l}{2}x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right]_0^{l/2} + \frac{q}{EJ} \left[\frac{l^3 x_1}{24} - \frac{l^2 x_1^2}{6} + \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,4}} l x_1^3 - \frac{x_1^4}{8}\right]_0^{l/2} \qquad (*)$$

$$\boxed{f = \frac{\chi q l^2}{8GA} + \frac{q l^4}{384\, EJ}}$$

Trascurando l'effetto della deformabilità dovuta all'azione tagliante sugli spostamenti:

$$f = \frac{q l^2}{384\, EJ}$$

(per coerenza a quanto fatto in precedenza).

(*) INFATTI

$$f = \frac{\chi q}{GA}\left[\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{8}\right] + \frac{q}{EJ}\left[\frac{l^4}{48} - \frac{l^4}{24} + \frac{1}{32}l^4 - \frac{l^4}{128}\right] = \frac{\chi q l^2}{8GA} + \frac{8 - 16 + 12 - 3}{384}\frac{ql^4}{EJ}$$

$$= \frac{\chi q l^2}{8GA} + \frac{20 - 19}{384}\frac{ql^4}{EJ}$$