Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 25.03.2021

Parte II - Testo 1

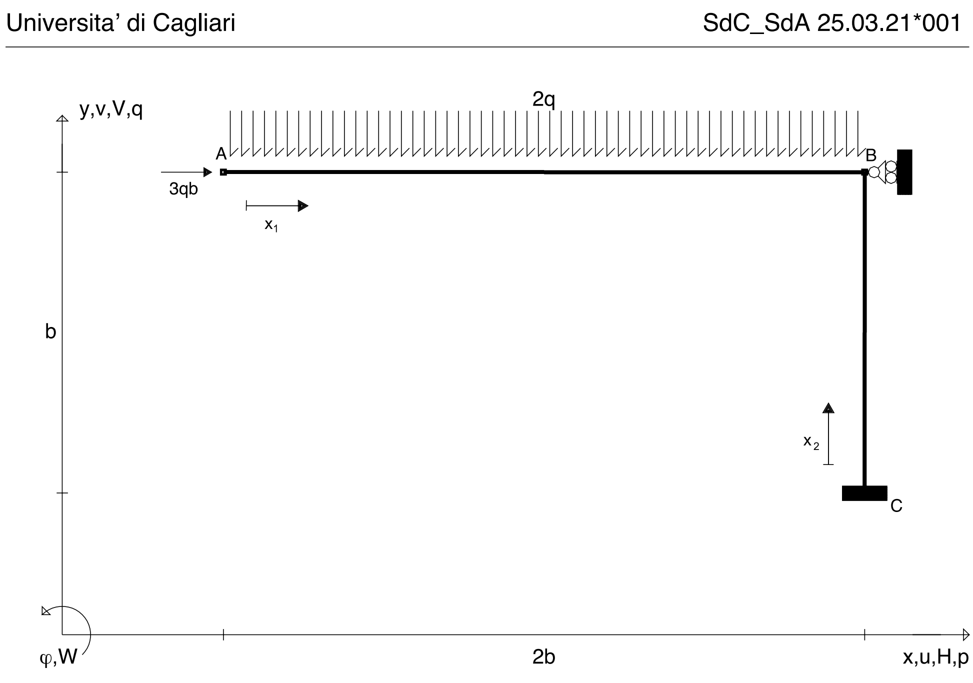
CdS **Edilizia** □ CdS **AdC** □ CdS **SdA** □

Nota: Per chi dispone di una propria stampante, i risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; per chi non dispone di stampante occorrerà predisporre un primo foglio nel quale riportare i dati riportati nei riquadri insieme ai risultati; il primo foglio dovrà contenere anche le seguenti informazioni: la prova (I prova intermedia o II prova intermedia), la data dell'appello, il nome e cognome, la matricola, la mail, il corso di studi; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati a seguire. Al termine della prova ed entro il limite di tempo indicato dalla commissione si dovrà caricare il compito svolto sulla piattaforma TEAMS in forma di unico file PDF le immagini fotografiche del primo foglio e a seguire dello svolgimento. Il file va nominato: cognome_matricola_data dell'appello.
Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:………………………………e-mail:…………………… Matricola:…….

Esercizio n. 1 (17 punti)

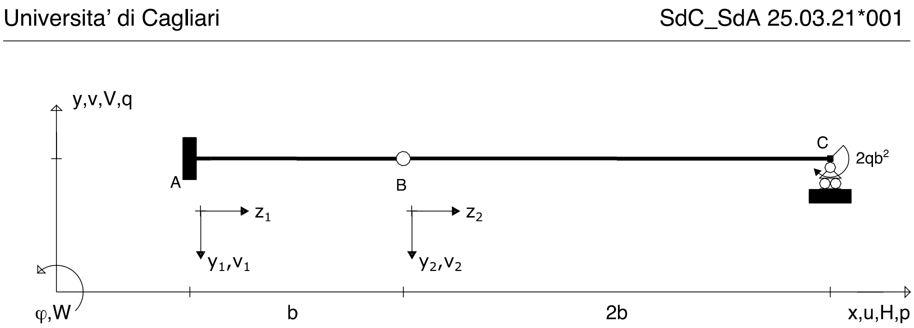
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo come incognita iperstatica il momento di incastro in *C* M_C. Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciare nello spazio predisposto i corrispondenti grafici.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

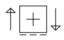


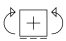
Esercizio n. 2 (16 punti)

Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.
Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. Lo spostamento verticale del punto B, v_B;
4. La rotazione del punto C, φ_C.







H_A (⇨) = ...; V_A (⇧) = ...; M_A (↶) = ...; V_C (⇧) = ...;

N_{AB} = ... ; T_{AB} = ... ; M_{AB} = ...;

N_{BC} = ... ; T_{BC} = ... ; M_{BC} = ...;

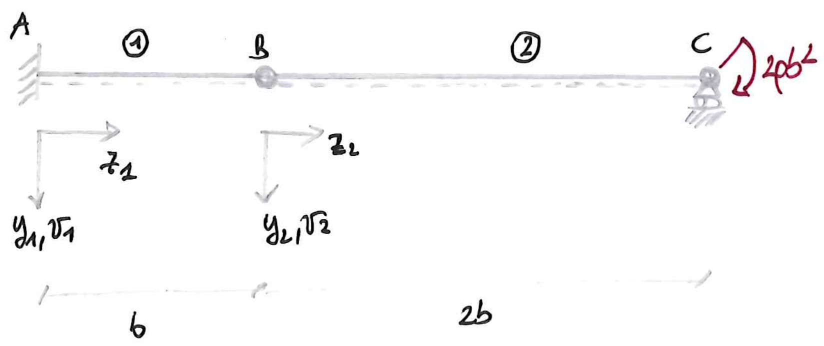
c.c in A = ...; c.c in B = ...;

c.c in C = ...;

$v_1(z_1)$ = ...; $v_1'(z_1)$ = ...;

$v_2(z_2)$ = ...; $v_2'(z_2)$ = ...;

v_B = ...; φ_C = ...;

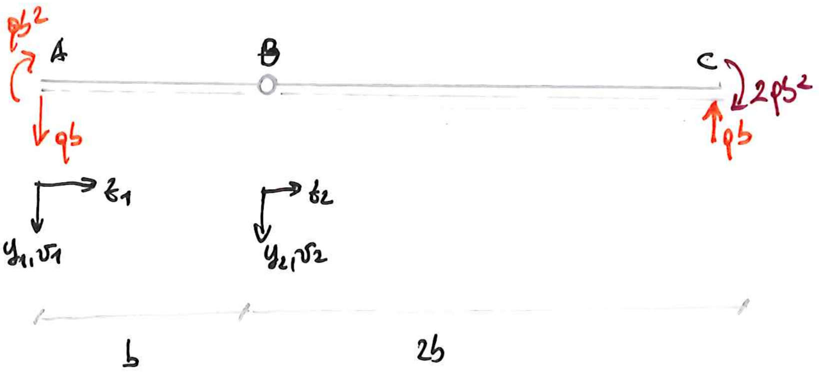


① A → B
$z_1 \Rightarrow 0 \leq z_1 \leq b$

② B → C
$z_2 \Rightarrow 0 \leq z_2 \leq 2b$

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 \Rightarrow H_A = 0 & \text{I} \rightarrow \boxed{H_A = 0} \\ \uparrow R_y = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0 & \text{III} \rightarrow V_A = \rightarrow \boxed{V_A = -qb} \\ \circlearrowright M_{x(A)} = 0 \Rightarrow M_A + V_C\, 3b - 2qb^2 = 0 & \text{IV} \rightarrow M_A = 2qb^2 - 3qb^2 \rightarrow \boxed{M_A = -qb^2} \end{cases}$$

Eq. ausiliaria $\circlearrowright M_{x(B)}^{②} = 0 \Rightarrow V_C\, 2b - 2qb^2 = 0$ II $\rightarrow \boxed{V_C = qb}$

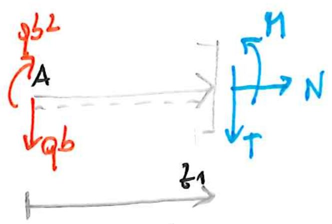


① A → B $0 \leq z_1 \leq b$

$\boxed{N_{AB} = 0}$

$\boxed{T_{AB} = -qb}$

$\boxed{M_{AB} = qb^2 - qb z_1}$

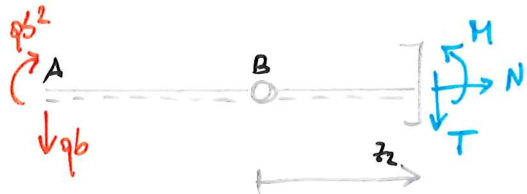


② $B \to C$ $\quad 0 \le z_2 \le 2b$

$\boxed{N_{BC} = 0}$

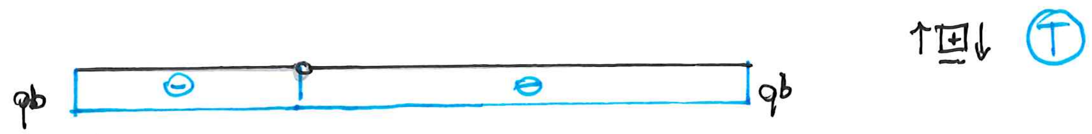
$\boxed{T_{BC} = -qb}$

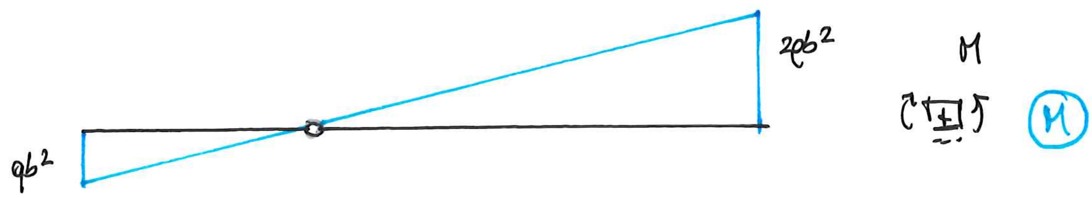
$\boxed{M_{BC} = -qb\, z_2}$ *



* $M_x(z_2) - qb^2 + qb(b+z_2) = 0$

$M_x(z_2) = \cancel{qb^2} - \cancel{qb^2} - qb\, z_2$





① $A \to B$ $\quad 0 \le z_1 \le b$ $\quad v_1(z_1)$

$$v_1''(z_1) = -\frac{M_x}{EJ_x} \to v_1''(z) = -\frac{qb^2}{EJ_x} + \frac{qb}{EJ_x} z_1$$

$$v_1'(z_1) = -\frac{qb^2}{EJ_x} z_1 + \frac{qb}{EJ_x} \frac{z_1^2}{2} + A_1$$

$$v_1(z_1) = -\frac{qb^2}{EJ_x} \frac{z_1^2}{2} + \frac{qb}{2EJ_x} \frac{z_1^3}{3} + A_1 z_1 + A_2$$

$$\boxed{v_1(z) = -\frac{qb^2}{2EJ_x} z_1^2 + \frac{qb}{6EJ_x} z_1^3 + A_1 z_1 + A_2}$$

② $B \to C$ $\quad 0 \le z_2 \le 2b$ $\quad v_2(z_2)$

$$v_2''(z_2) = -\frac{M_x}{EJ_x} \to v_2''(z) = \frac{qb}{EJ_x} z_2$$

$$v_2'(z_2) = \frac{qb}{EJ_x} \frac{z_2^2}{2} + B_1$$

$$v_2(z_2) = \frac{qb}{2EJ_x} \frac{z_2^3}{3} + B_1 z_2 + B_2$$

$$\boxed{v_2(z) = \frac{qb}{6EJ_x} z_2^3 + B_1 z_2 + B_2}$$

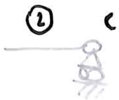
4 COSTANTI DI INTEGRAZIONE: A_1, A_2, B_1, B_2

SONO NECESSARIE $\boxed{\text{4 CONDIZIONI A CONTORNO}}$

A)  $\boxed{\text{INCASTRO}}$ → IMPEDISCE
- ABBASSAMENTO ⇒ $v_{(A)}=0$ ⇒ $\boxed{v_1(z_1=0)=0}$ 1
- ROTAZIONE ⇒ $v'_{(A)}=0$ ⇒ $\boxed{v_1'(z_1=0)=0}$ 2

B)  $\boxed{\text{CERNIERA INTERNA}}$ → IMPONE ABBASSAMENTO UGUALE IN B ⇒ $v^{①}=v^{②}$ ⇒ $\boxed{v_1(z_1=b)=v_2(z_2=0)}$ 3

[N.B. NON POSSIAMO DIRE NULLA SULLA ROTAZIONE]

C)  $\boxed{\text{CARRELLO}}$ → IMPEDISCE ABBASSAMENTO ⇒ $v_{(C)}=0$ ⇒ $\boxed{v_2(z_2=2b)=0}$ 4

CONSENTE ROTAZIONE

$$
\begin{cases}
v_1(z_1) = -\dfrac{qb^2}{2EJ_x} z_1^2 + \dfrac{qb}{6EJ_x} z_1^3 + A_1 z_1 + A_2 \\[2ex]
v_1'(z_1) = -\dfrac{qb^2}{EJ_x} z_1 + \dfrac{qb}{2EJ_x} z_1^2 + A_1 \\[2ex]
v_2(z_2) = \dfrac{qb}{6EJ_x} z_2^3 + B_1 z_2 + B_2 \\[2ex]
v_2'(z_2) = \dfrac{qb}{2EJ_x} z_2^2 + B_1
\end{cases}
$$

① $\boxed{v_1(z_1=0)=0}$ ⇒ $\boxed{A_2=0}$

② $\boxed{v_1'(z_1=0)=0}$ ⇒ $\boxed{A_1=0}$

③ $\boxed{v_1(z_1=b)=v_2(z_2=0)}$ ⇒ $v_1(z_1=b) = -\dfrac{qb^2}{2EJ_x} b^2 + \dfrac{qb}{6EJ_x} b^3 + \cancel{A_1 b} + \cancel{A_2}$

$v_2(z_2=0) = B_2$

$$B_2 \Rightarrow -\frac{qb^4}{2EJ_x} + \frac{qb^4}{6EJ_x} = B_2 \Rightarrow -\frac{3qb^4}{6EJ_x} + \frac{qb^4}{6EJ_x} = B_2 \Rightarrow -\frac{2qb^4}{6EJ_x} = B_2 \Rightarrow \boxed{B_2 = -\frac{qb^4}{3EJ_x}}$$

④ $\boxed{v_2(z_2=2b)=0} \Rightarrow \frac{qb}{6EJ_x}(2b)^3 + B_1\, 2b + B_2 = 0$

$$\frac{qb}{6EJ_x}8b^3 + B_1\, 2b - \frac{qb^4}{3EJ_x} = 0$$

$$B_1\, 2b = -\frac{8qb^4}{6EJ_x} + \frac{qb^4}{3EJ_x}$$

$$B_1 = -\frac{4qb^4}{3EJ_x}\cdot\frac{1}{2b} + \frac{qb^4}{3EJ_x}\cdot\frac{1}{2b}$$

$$B_1 = -\frac{4qb^3}{6EJ_x} + \frac{qb^3}{6EJ_x} \Rightarrow B_1 = -\frac{3qb^3}{6EJ_x} \Rightarrow \boxed{B_1 = -\frac{qb^3}{2EJ_x}}$$

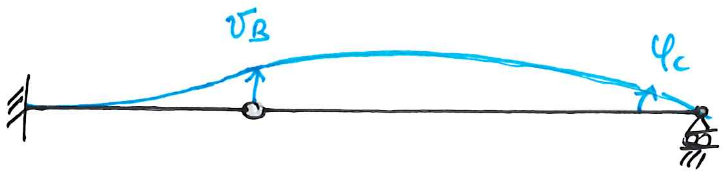
NOTE LE 4 COSTANTI DI INTEGRAZIONE, POSSIAMO SCRIVERE LA FORMA PARTICOLARE DI v_1 E v_2:

$$\begin{cases} v_1(z_1) = -\frac{qb^2}{2EJ_x}z_1^2 + \frac{qb}{6EJ_x}z_1^3 \\ v_1'(z_1) = -\frac{qb^2}{EJ_x}z_1 + \frac{qb}{2EJ_x}z_1^2 \end{cases} \qquad (A_1=0\ ;\ A_2=0)$$

$$\begin{cases} v_2(z_2) = \frac{qb}{6EJ_x}z_2^3 - \frac{qb^3}{2EJ_x}z_2 - \frac{qb^4}{3EJ_x} \\ v_2'(z_2) = \frac{qb}{2EJ_x}z_2^2 - \frac{qb^3}{2EJ_x} \end{cases} \qquad \left(B_1 = -\frac{qb^3}{2EJ_x},\ B_2 = -\frac{qb^4}{3EJ_x}\right)$$

$v_{(B)} = ? \Rightarrow v_{(B)} = v_1(z_1=b) = v_2(z_2=0) \Rightarrow \boxed{v_B = -\frac{qb^4}{3EJ_x}\quad(\uparrow)}$

$\varphi_{(C)} = ? \Rightarrow \varphi_{(C)} = v_2'(z_2=2b) \Rightarrow \boxed{\varphi_C} = \frac{qb}{2EJ_x}(2b^2) - \frac{qb^3}{2EJ_x} = \frac{4qb^3}{2EJ_x} - \frac{qb^3}{2EJ_x} = \boxed{+\frac{3qb^3}{2EJ_x}\ (\curvearrowleft)}$

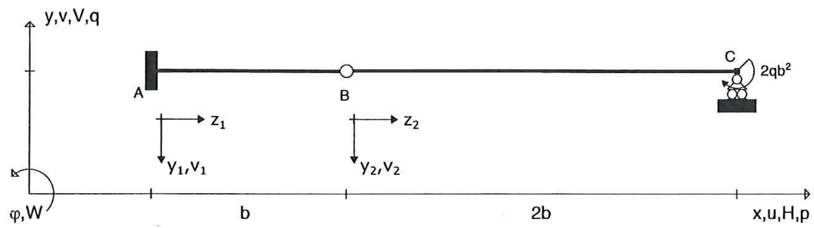


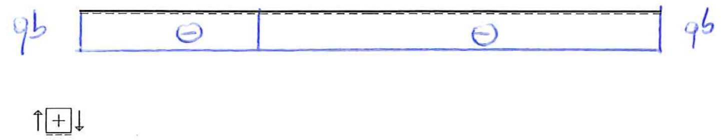
Esercizio n. 2 (16 punti)

Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.
Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

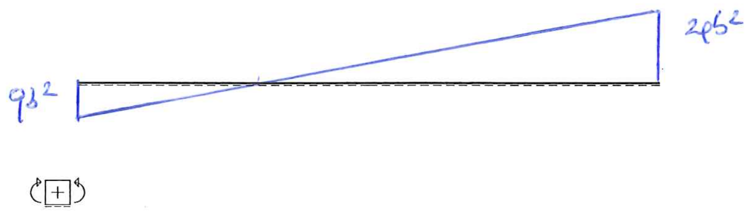
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. Lo spostamento verticale del punto B, v_B;
4. La rotazione del punto C, φ_C.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 25.03.21*001





↑⊞↓



↻⊞↺

H_A (⇨) = 0; V_A (⇧) = $-qb$; M_A (↶) = $-qb^2$; V_C (⇧) = qb;

N_{AB} = //; T_{AB} = $-qb$; M_{AB} = $qb^2 - qb\,z_1$;

N_{BC} = //; T_{BC} = $-qb$; M_{BC} = $-qb\,z_2$;

c.c in A = $v_1(z_1=0)=0$; $v_1'(z_1=0)=0$; c.c in B = $v_1(z_1=b)=v_2(z_2=0)$;

c.c in C = $v_2(z_2=2b)=0$;

$v_1(z_1)$ = $-\frac{qb^2}{2EJ}z_1^2 + \frac{qb}{6EJ}z_1^3$; $v_1'(z_1)$ = $-\frac{qb^2}{EJ}z_1 + \frac{qb}{2EJ}z_1^2$;

$v_2(z_2)$ = $\frac{qb}{6EJ}z_2^3 - \frac{qb^3}{2EJ}z_2 - \frac{qb^4}{3EJ}$; $v_2'(z_2)$ = $\frac{qb}{2EJ}z_2^2 - \frac{qb^3}{2EJ}$;

v_B = $-\frac{qb^4}{3EJ}$ (↑); φ_C = $\frac{3qb^3}{2EJ}$ (↗);