Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

***Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura* - a.a. 2020/21**

Statica e Scienza delle Costruzioni

> 6. L'equazione della linea elastica*

Emanuele Reccia

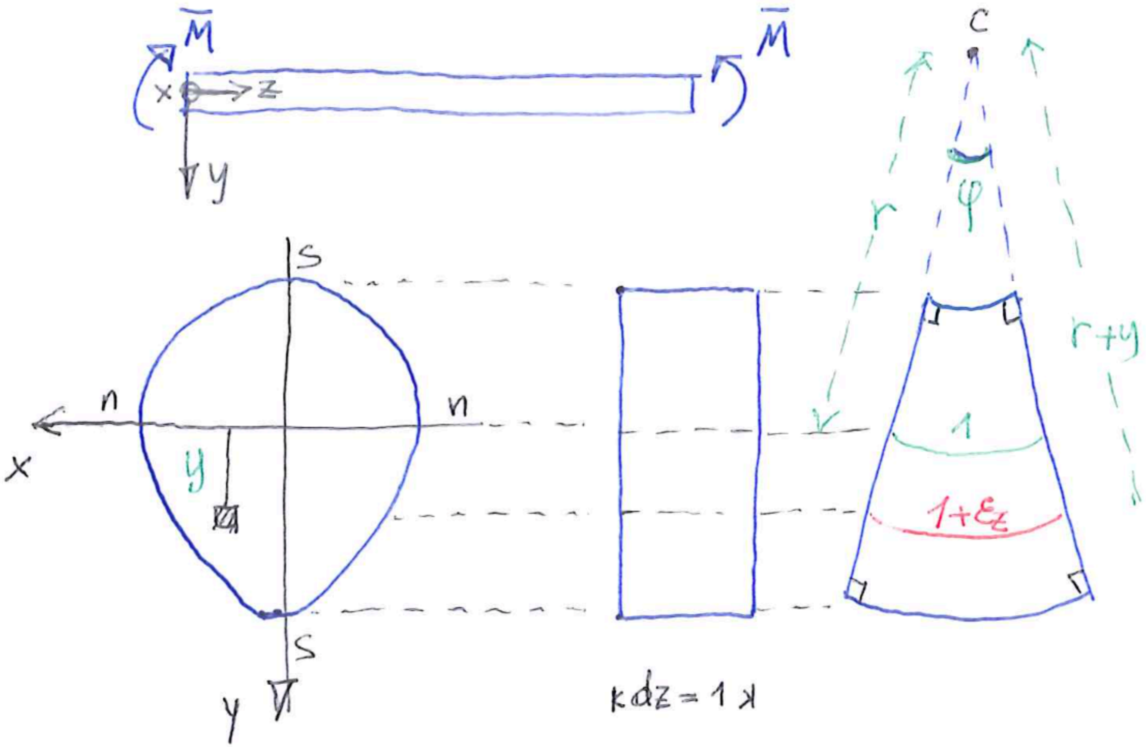
emanuele.reccia@unica.it

* *Il materiale della lezione è tratto dalla lezione 27 del corso SdC IC del prof. Cazzani*

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA PER IL CALCOLO DI TRAVI ELASTICHE AD ASSE RETTILINEO. 1

SI RIPRENDONO ALCUNI RISULTATI RELATIVI ALLA FLESSIONE RETTA: SI CONSIDERA UNA TRAVE SOLLECITATA DA 2 COPPIE APPLICATE ALLE ESTREMITÀ IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E SI DETERMINANO LE CARATTERISTICHE DI DEFORMAZIONE.

SIA Z L'ASSE DELLA TRAVE, X E Y GLI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA DELLA SEZIONE, CHE COINCIDONO CON L'ASSE NEUTRO (n-n) E CON L'ASSE DI SOLLECITAZIONE (s-s) NEL CASO CHE $\bar{M} = M_x$



r È IL RAGGIO DI CURVATURA E C È IL CENTRO DI CURVATURA; $\frac{1}{r}$ RAPPRESENTA LA CURVATURA.

LO SFORZO NORMALE È DATO DA $\boxed{\sigma_z = \frac{\bar{M}}{I_x} y}$ [1]

D'ALTRA PARTE SI RICONOSCE CHE

$$\varphi = \frac{1}{r} \quad E \quad \varphi = \frac{1+\varepsilon_z}{r+y}$$

E

$$(r+y) = 1 + \varepsilon_z \Rightarrow 1 + \frac{y}{r} = 1 + \varepsilon_z \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = \frac{y}{r}} \quad [2]$$

PER IL LEGAME COSTITUTIVO INVERSO, ELASTICO, SI HA

$$\boxed{\sigma_z = E\varepsilon_z} \quad [3]$$

DA CUI, SOSTITUENDO LA [2] SI OTTIENE $\boxed{\sigma_z = E\frac{y}{r}}$ [4]

SE ORA SI EGUAGLIANO LE ESPRESSIONI [1] E [4] DI σ_z SI OTTIENE

$$\frac{\bar{M}}{I_x}\cancel{y} = E\frac{\cancel{y}}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = \frac{\bar{M}}{EI_x}} \quad [5]$$

LA LINEA ELASTICA

2

QUESTA RAPPRESENTA L'EQUAZIONE FONDAMENTALE DI ELASTICITÀ DELLA FLESSIONE, GIÀ VISTA NELL'ANALISI DEL 2° CASO DI SOLLECITAZIONE SEMPLICE PER IL SOLIDO DI DE SAINT VENANT.

LA [5], QUI RIPROPOSTA:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_x}{EI_x} \qquad [6]$$

ESPRIME LA CURVATURA DI OGNI PUNTO DELLA <u>LINEA ELASTICA</u>, CIOÈ DELLA <u>DEFORMATA</u> DELL'ASSE GEOMETRICO DELLA TRAVE (COINCIDENTE CON L'ASSE z CON LA SCELTA DI ASSI ADOTTATA).

È NOTO DALLA TEORIA DELLA FLESSIONE RETTA CHE L'ASSE GEOMETRICO DELLA TRAVE SUBISCE SPOSTAMENTI SECONDO LA DIREZIONE y, CIOÈ L'UNICA COMPONENTE NON NULLA DELLO SPOSTAMENTO È $v = v(z)$.

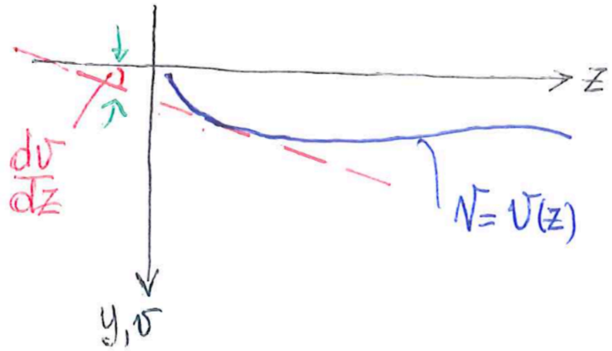
SI PUÒ PERTANTO CONSIDERARE L'ESPRESSIONE DI $v = v(z)$ COME QUELLA DELLA LINEA (GIACENTE NEL PIANO y-z) SECONDO CUI SI ATTEGGIA L'ASSE GEOMETRICO DELLA TRAVE A DEFORMAZIONE AVVENUTA.

DALLA GEOMETRIA DIFFERENZIALE E' NOTO CHE LA <u>CURVATURA</u> IN UN PUNTO GENERICO DI UNA LINEA $v = v(z)$ (NEL SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANE $z - v$) E' DATA DA:

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2 v(z)}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv(z)}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad [7]$$

DOVE IL SEGNO (+/−) DIPENDE DALL'ORIENTAMENTO DEGLI ASSI.

NEL CASO DELLE TRAVI, GENERALMENTE, L'INCLINAZIONE $\frac{dv}{dz}$ DELLA RETTA TANGENTE IN UN PUNTO RISPETTO ALL'ASSE Z È MOLTO PICCOLA, E QUINDI IL SUO QUADRATO SI PUO' RITENERE TRASCURABILE RISPETTO ALL'UNITA'.



NB: $\frac{dv}{dz}$ È L'ANGOLO FORMATO DALLA TANGENTE CON L'ASSE Z E COINCIDE, PER LA CONSERVAZIONE DELLE SEZIONI PIANE, CON L'ANGOLO DI ROTAZIONE DELLA SEZIONE

SI PUÒ QUINDI PORRE, CON BUONA APPROSSIMAZIONE:

$$\frac{1}{r} \simeq \pm \frac{d^2 v}{dz^2} \qquad [8]$$

SOSTITUENDO LA [8] NELLA [6] SI OTTIENE:

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dz^2} = \pm \frac{M_x}{E J_x}} \qquad [9],$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA NELLA SUA FORMA LINEARIZZATA.

SI TRATTA DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE, IL CUI INTEGRALE GENERALE DIPENDE DA 2 COSTANTI DI INTEGRAZIONE, DETERMINABILI IMPONENDO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO DUE CONDIZIONI AL CONTORNO SU $v(z)$ O SULLA SUA DERIVATA PRIMA, $\frac{dv(z)}{dz} = v'(z)$.

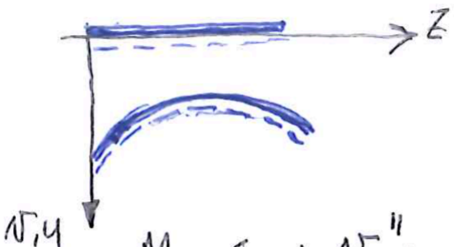
NEL SEGUITO PER PRATICITA' SI DENOTERANNO LE DERIVATE MEDIANTE APICI: $(\,)' = \frac{d}{dz}(\cdot)$;
LA [9] DIVIENE ALLORA

$$\boxed{v''(z) = \pm \frac{M_x(z)}{E J_x}} \qquad [10]$$

NOTA 1. PER QUANTO RIGUARDA LA SCELTA DEL SEGNO, IN DIPENDENZA DALLA SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, SI POSSONO DARE LE CONDIZIONI SEGUENTI:

i)

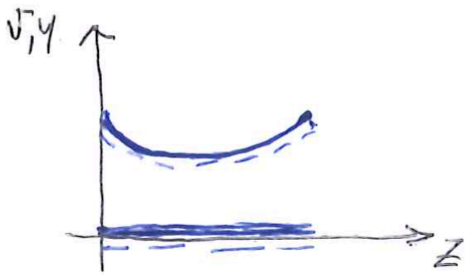
$M_x > 0;\ v'' < 0$



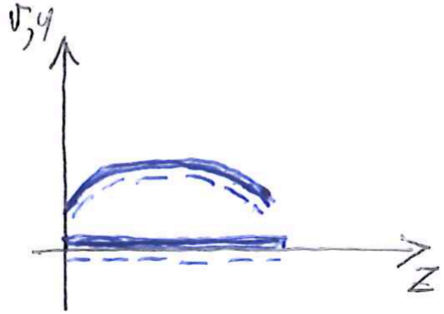
$M_x < 0;\ v'' > 0$

$$\Rightarrow v'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

ii)



$M_x > 0;\ v'' > 0$

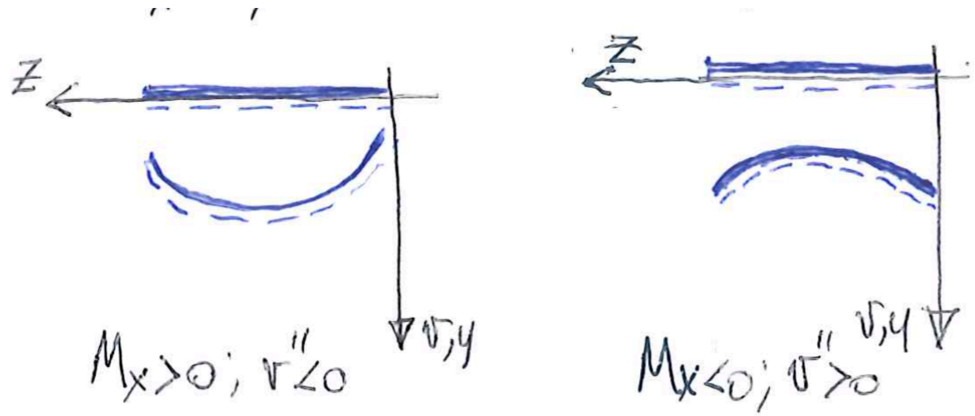


$M_x < 0;\ v'' < 0$

$$\Rightarrow v'' = +\frac{M_x}{EJ_x}$$

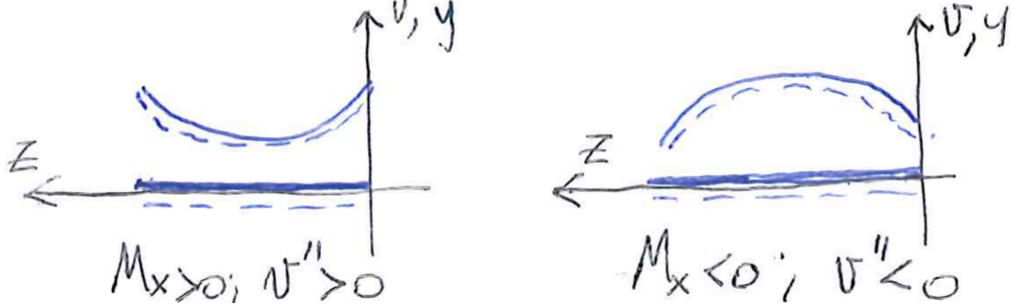
NOTA 1. PER QUANTO RIGUARDA LA SCELTA DEL SEGNO, IN DIPENDENZA DALLA SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, SI POSSONO DARE LE CONDIZIONI SEGUENTI:

iii)



$$\Rightarrow \quad v'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

iv)



$$\Rightarrow \quad v'' = +\frac{M_x}{EJ_x}$$

NOTA 2. SE LA RIGIDEZZA FLESSIONALE $EJ_x = \text{cost}$, CIOÈ NEL CASO DI TRAVE OMOGENEA E PRISMATICA, ALLORA DERIVANDO LA [10] SI OTTIENE:

$$v'''(z) = \pm \frac{1}{EJ_x} \frac{dM_x}{dz} \qquad [11]$$

SE SI SFRUTTA L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO PER LA TRAVE AD ASSE RETTILINEO (IN ASSENZA DI COPPIE DISTRIBUITE),

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y \qquad [12]$$

E SOSTITUENDO LA [12] NELLA [11] SI RICAVA:

$$v'''(z) = \pm \frac{T_y}{EJ_x} \qquad [13]$$

DERIVANDO ULTERIORMENTE, SI GIUNGE A:

$$v^{IV}(z) = \pm \frac{1}{EJ_x} \frac{dT_y}{dz} \qquad [14]$$

ANCORA, PER L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DELLA TRAVE AD ASSE RETTILINEO, SI HA:

$$\frac{dT_y}{dz} = -q(z) \qquad [15]$$

SICCHÉ, SOSTITUENDO ANCORA LA [15] NELLA [14] SI PERVIENE A:

$$\boxed{v^{IV}(z) = \mp \frac{q(z)}{EJ_x}} \qquad [16]$$

NOTA:
- VALE IL SEGNO ⊖ SE L'ASSE y/v È ORIENTATO VERSO L'ALTO!
- VALE IL SEGNO ⊕ SE L'ASSE y/v È ORIENTATO VERSO IL BASSO!

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA NELLA SUA FORMA AL 4° ORDINE: SI OSSERVI, IN VIRTÙ DELLA [15], L'INVERSIONE DEI SEGNI PER LE DIVERSE SCELTE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

LA [16] È UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 4° ORDINE, IL CUI INTEGRALE GENERALE DIPENDE DA 4 COSTANTI DI INTEGRAZIONE, DETERMINABILI IMPONENDO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO 4 CONDIZIONI AL CONTORNO SU $v(z)$ O SULLE SUE DERIVATE (FINO ALLA TERZA INCLUSA).

AGLI ESTREMI SI CONOSCONO INFATTI, SE SI CONSIDERA L'ASSE y/z ORIENTATO VERSO IL BASSO

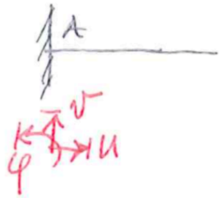
$v(z)$ OPPURE $M_x = -EJ_x\, v''(z)$

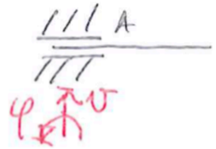
$v'(z)$ OPPURE $T_y = -EJ_x\, v'''(z)$.

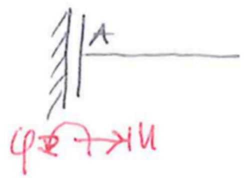
II

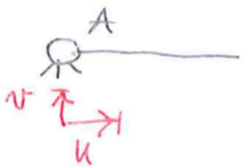
NOTA 3. LE CONDIZIONI AL CONTORNO DIPENDONO DAI VINCOLI PRESENTI. LE SI ANALIZZA DISTINGUENDO I VINCOLI A TERRA (ESTERNI) DAI VINCOLI INTERNI E DALLE CONDIZIONI DI CONTINUITA'

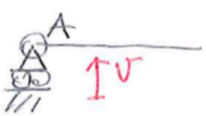
A) VINCOLI A TERRA.

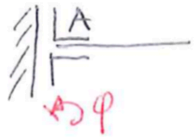
- INCASTRO  IMPONE IN (A) $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ \varphi=0 \end{cases} \Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(A)=0 \\ v'(A)=0 \end{cases}$

- MANICOTTO  IMPONE IN (A) $\begin{cases} v=0 \\ \varphi=0 \end{cases} \Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(A)=0 \\ v'(A)=0 \end{cases}$

- PATTINO  IMPONE IN (A) $\begin{cases} u=0 \\ \varphi=0 \end{cases} \Rightarrow$ C.C. $\{ v'(A)=0$

- CERNIERA  IMPONE IN (A) $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow$ C.C. $\{ v(A)=0$

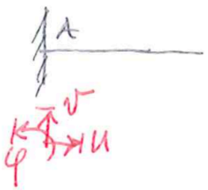
- CARRELLO  IMPONE IN (A) $\{ v=0 \Rightarrow$ C.C. $\{ v(A)=0$

- PATTINO - MANICOTTO  IMPONE IN (A) $\{ \varphi=0 \Rightarrow$ C.C. $\{ v'(A)=0$

LA LINEA ELASTICA

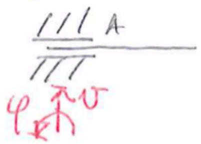
A) VINCOLI A TERRA.

- INCASTRO



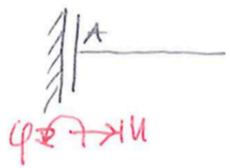
IMPONE IN A $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(A)=0 \\ v'(A)=0 \end{cases}$

- MANICOTTO



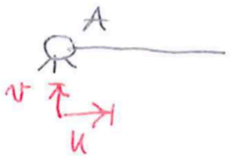
IMPONE IN A $\begin{cases} v=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(A)=0 \\ v'(A)=0 \end{cases}$

- PATTINO



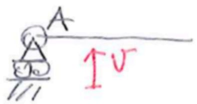
IMPONE IN A $\begin{cases} u=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v'(A)=0$

- CERNIERA



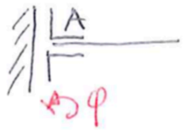
IMPONE IN A $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v(A)=0$

- CARRELLO



IMPONE IN A $\{ v=0$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v(A)=0$

- PATTINO - MANICOTTO



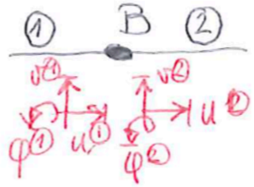
IMPONE IN A $\{ \varphi=0$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v'(A)=0$

SI NOTI CHE I GRADI DI VINCOLO AGENTI SECONDO L'ASSE DELLA TRAVE NON DANNO LUOGO A C.C. POICHÉ QUESTE ULTIME INTERESSANO SOLO SPOSTAMENTI PERPENDICOLARI ALL'ASSE E ROTAZIONI DUNQUE DAL PUNTO DI VISTA DELL'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA UN MANICOTTO RISULTA EQUIVALENTE A UN INCASTRO, E UN CARRELLO (CON PIANO DI SCORRIMENTO PARALLELO ALL'ASSE DELLA TRAVE) A UNA CERNIERA

NOTA 3. LE CONDIZIONI AL CONTORNO DIPENDONO DAI VINCOLI PRESENTI. LE SI ANALIZZA DISTINGUENDO I VINCOLI A TERRA (ESTERNI) DAI VINCOLI INTERNI E DALLE CONDIZIONI DI CONTINUITA'

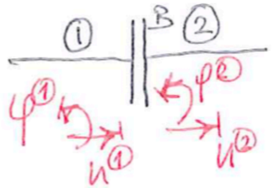
B) VINCOLI INTERNI

- SALDATURA (VINCOLO DI CONTINUITA')



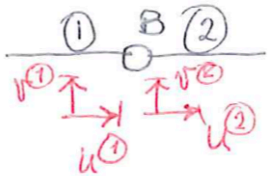
IMPONE IN (B) $\begin{cases} u^{(1)} = u^{(2)} \\ v^{(1)} = v^{(2)} \\ \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} \end{cases} \Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(B^-) = v(B^+) \\ v'(B^-) = v'(B^+) \end{cases}$

- PATTINO



IMPONE IN (B) $\begin{cases} u^{(1)} = u^{(2)} \\ \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} \end{cases} \Rightarrow$ C.C. $\{ v'(B^-) = v'(B^+)$

- CERNIERA



IMPONE IN (B) $\begin{cases} u^{(1)} = u^{(2)} \\ v^{(1)} = v^{(2)} \end{cases} \Rightarrow$ C.C. $\{ v(B^-) = v(B^+)$

I CASI DI MANICOTTO INTERNO, PATTINO-MANICOTTO INTERNO E CARRELLO INTERNO (CON PIANO DI SCORRIMENTO PARALLELO ALL'ASSE DELLA TRAVE) DANNO LUOGO ALLE STESSE C.C. DELLA SALDATURA, DEL PATTINO E DELLA CERNIERA RISPETTIVAMENTE.

II

SI CONSIDERANO ALCUNE APPLICAZIONI SIGNIFICATIVE CON RIFERIMENTO A DIVERSE TIPOLOGIE STRUTTURALI.

6

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

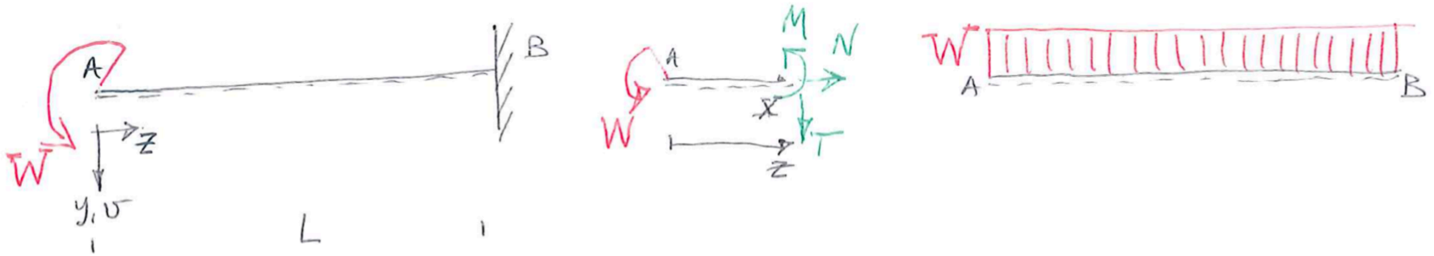
B) TRAVI ISOSTATICHE DOTATE DI VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

C) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE NON È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

D) TRAVI IPERSTATICHE.

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

1- SI STUDIA LA SEGUENTE TRAVE A MENSOLA DI LUCE L, CARICATA DA UNA COPPIA W APPLICATA ALL'ESTREMO LIBERO.



L'EQUAZIONE (E IL DIAGRAMMA) DEL MOMENTO FLETTENTE PUÒ ESSERE AGEVOLMENTE CALCOLATO PARTENDO DALL'ESTREMO A SENZA LA NECESSITÀ DI CALCOLARE PRELIMINARMENTE LE REAZIONI VINCOLARI: RISULTA

$$M_x(z) = -W$$

SI HA QUINDI, DALLA [10], E TENUTO CONTO DELLA NOTA 1:

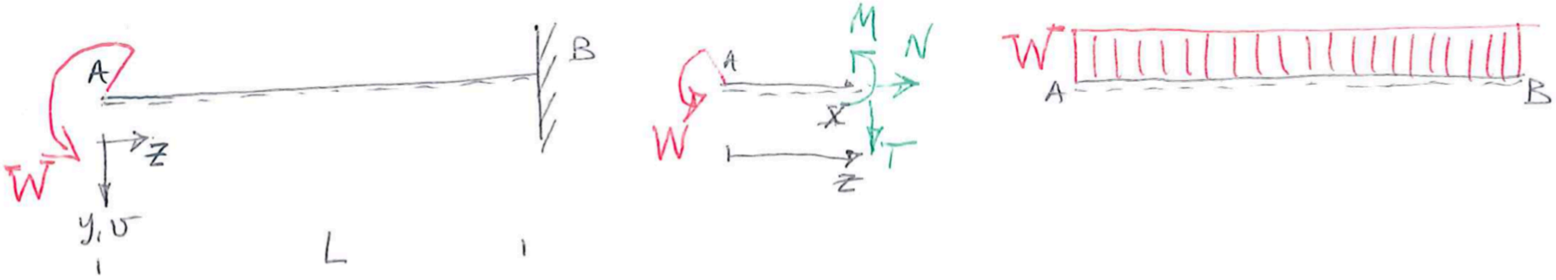
$$v''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow v''(z) = +\frac{W}{EJ_x}$$

SEGUE DI QUI, INTEGRANDO 2 VOLTE L'EQUAZIONE:

$$v'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} + C_1 z + C_2$$

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.



LE CONDIZIONI AL CONTORNO SONO DETERMINATE DAL VINCOLO IN (B) (INCASTRO):

$$\begin{cases} v'(z=L) = 0 \\ v(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{WL}{EJ_x} + C_1 = 0 \\ \dfrac{WL^2}{2EJ_x} + C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{WL}{EJ_x} \\ C_2 = -\dfrac{WL^2}{2EJ_x} + \dfrac{WL^2}{EJ_x} = +\dfrac{WL^2}{2EJ_x} \end{cases}$$

SI TROVA COSÌ:

$$v(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} - \frac{WL}{EJ_x} z + \frac{WL^2}{2EJ_x} = \frac{W}{2EJ_x}\left(z^2 - 2Lz + L^2\right) = \frac{W}{2EJ_x}(z-L)^2$$

$$v'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} - \frac{WL}{EJ_x} = \frac{W}{EJ_x}(z-L)$$

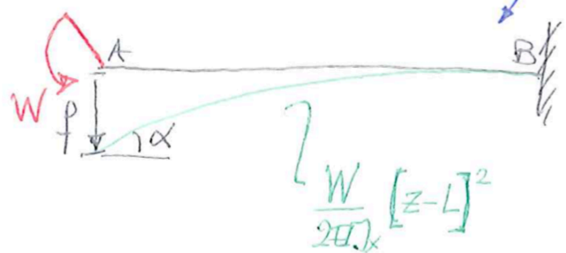
DA QUI SI POSSONO DETERMINARE SPOSTAMENTI (v) E ROTAZIONI (v') DI TUTTI I PUNTI DELLA LINEA D'ASSE.

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

IN PARTICOLARE SI TROVA:

$$f = v(z=0) = +\frac{WL^2}{2EJ_x}$$

$$\alpha = v'(z=0) = -\frac{WL}{EJ_x}$$



L'ASSE DELLA TRAVE DEFORMATA HA TANGENTE ORIZZONTALE NEL PUNTO (B).

SI OSSERVI CHE DIMENSIONALMENTE LE QUANTITÀ OTTENUTE SONO CORRETTE:

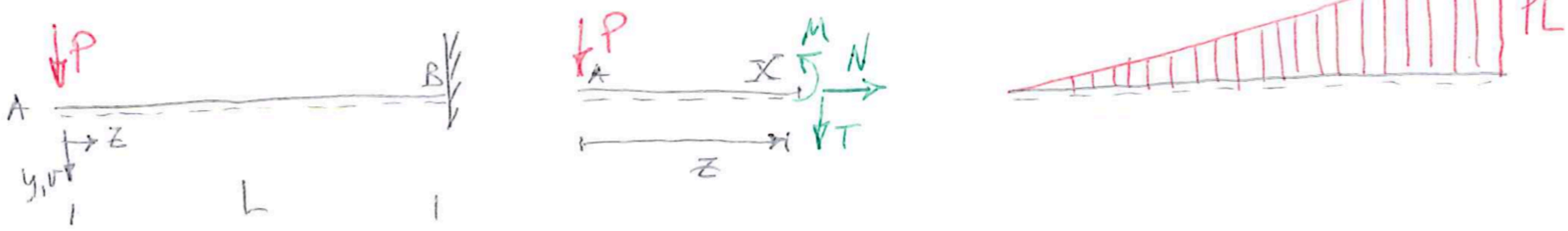
$$[f] = [L] \; ; \; \left[\frac{WL^2}{2EJ_x}\right] = \frac{[F \cdot L][L^2]}{\left[\frac{F}{L^2}\right] \cdot [L^4]} = \frac{[L^3]}{[L^2]} = [L]$$

$$[\alpha] = [-] \; ; \; \left[\frac{WL}{EJ_x}\right] = \frac{[F \cdot L][L]}{\left[\frac{F}{L^2}\right] \cdot [L^4]} = \frac{[L^2]}{[L^2]} = [-]$$

PER QUANTO RIGUARDA I SEGNI, SI HA CHE f È RIVOLTA VERSO IL BASSO ED È DUNQUE POSITIVA, IN BASE ALLA SCELTA FATTA PER IL SISTEMA DI RIFERIMENTO; α È INVECE <0; ORA v' È POSITIVO SE L'ANGOLO "TENDE AD AVVICINARE" L'ASSE DELLA TRAVE DEFORMATA ALL'ASSE y. NEL CASO PRESENTE LA TANGENTE ALLA LINEA D'ASSE IN (A) FORMA UN ANGOLO CHE TENDE AD ALLONTANARE L'ASSE DELLA TRAVE DEFORMATA DALL'ASSE y E RISULTA DUNQUE <0.

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

2 - TRAVE A MENSOLA DI LUCE L SOGGETTA A UN CARICO CONCENTRATO P ALL'ESTREMO LIBERO.



DI NUOVO L'EQUAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE PUÒ ESSERE DETERMINATO SENZA LA NECESSITA' DI CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI. SI HA:

$$M_x(z) = -Pz$$

DUNQUE DALLA [10] SEGUE, QUESTA VOLTA:

$$v''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow v''(z) = \frac{Pz}{EJ_x}$$

DI QUI INTEGRANDO 2 VOLTE SI OTTIENE:

$$v'(z) = \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C_1 \qquad v(z) = \frac{Pz^3}{6EJ_x} + C_1 z + C_2 .$$

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

LE C.C. DIPENDONO DAI VINCOLI E IMPONGONO ANCORA:
IN QUANTO IN (B) $(z=L)$ È PRESENTE UN INCASTRO.

$$\begin{cases} v(z=L)=0 \\ v'(z=L)=0 \end{cases}$$

SI HA QUINDI DA RISOLVERE QUESTO SISTEMA DI 2 EQUAZIONI NELLE 2 INCOGNITE C_1, C_2:

$$\begin{cases} \dfrac{PL^2}{2EJ_x} + C_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{PL^3}{6EJ_x} + C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{PL^2}{2EJ_x} \\[2ex] C_2 = -\dfrac{PL^3}{6EJ_x} + \dfrac{PL^2 \cdot L}{2EJ_x} = \dfrac{(-1+3)PL^3}{6EJ_x} = \dfrac{\cancel{2}}{3\,\cancel{6}}\dfrac{PL^3}{EJ_x} = \dfrac{PL^3}{3EJ_x} \end{cases}$$

PERTANTO

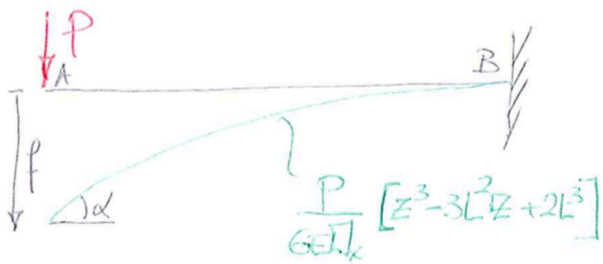
$$v(z) = \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{PL^2 z}{2EJ_x} + \frac{PL^3}{3EJ_x} = \frac{P}{6EJ_x}\left(z^3 - 3L^2 z + 2L^3\right)$$

$$v'(z) = \frac{Pz^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x} = \frac{P}{2EJ_x}\left(z^2 - L^2\right)$$

IN PARTICOLARE SI OTTIENE:

$$f = v(z=0) = \frac{PL^3}{3EJ_x}$$

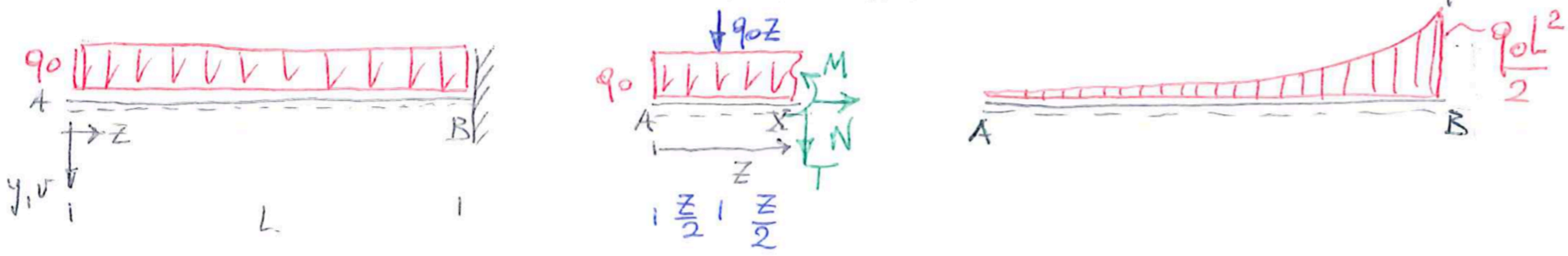
$$\alpha = v'(z=0) = -\frac{PL^2}{2EJ_x}$$



E DI NUOVO LA VERIFICA DIMENSIONALE È SODDISFATTA.

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

3 - TRAVE A MENSOLA DI LUCE L SOGGETTA A UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO q_0



ANCORA L'EQUAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE PUÒ ESSERE DETERMINATA DIRETTAMENTE, SENZA LA NECESSITÀ DI CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI, E RISULTA:

$$M_x(z) = -q_0 \frac{z^2}{2}$$

DALLA [10] SEGUE ALLORA:

$$v''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow v''(z) = \frac{q_0 z^2}{2EJ_x}$$

INTEGRANDO 2 VOLTE SI TROVA:

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} + C_1 z + C_2$$

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

LA PRESENZA DELL'INCASTRO IN B DÀ LUOGO A QUESTE C.C: $\begin{cases} v(z=L)=0 \\ v'(z=L)=0 \end{cases}$.

NE SEGUE:

$$\begin{cases} \dfrac{q_0 L^3}{6EJ_x}+C_1=0 \\ \dfrac{q_0 L^4}{24EJ_x}+C_1 L+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-\dfrac{q_0 L^3}{6EJ_x} \\ C_2=-\dfrac{q_0 L^4}{24EJ_x}+\dfrac{q_0 L^3}{6EJ_x}\cdot L=\dfrac{(-1+4)\,q_0 L^4}{24EJ_x}=\dfrac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{24}_{\,8}}\dfrac{q_0 L^4}{EJ_x}=\dfrac{q_0 L^4}{8EJ_x} \end{cases}$$

DUNQUE:

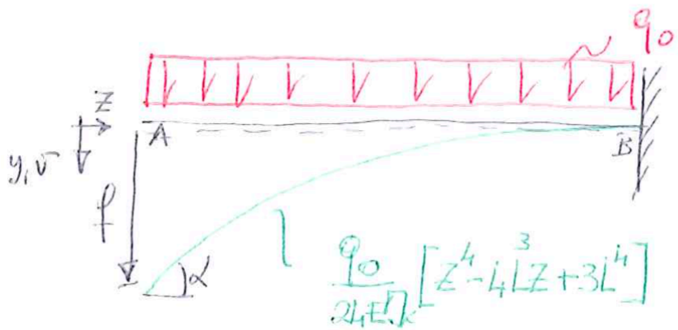
$$v(z)=\frac{q_0 z^4}{24EJ_x}-\frac{q_0 L^3 z}{6EJ_x}+\frac{q_0 L^4}{8EJ_x}=\frac{q_0}{24EJ_x}\left[z^4-4L^3 z+3L^4\right]$$

$$v'(z)=\frac{q_0 z^3}{6EJ_x}-\frac{q_0 L^3}{6EJ_x}=\frac{q_0}{6EJ_x}\left[z^3-L^3\right]$$

SI HA POI:

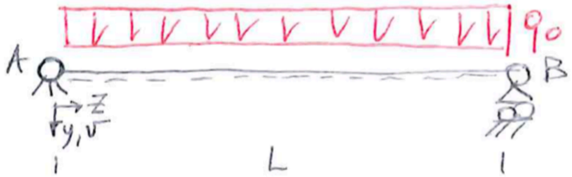
$$f=v(z=0)=\frac{q_0 L^4}{8EJ_x}$$

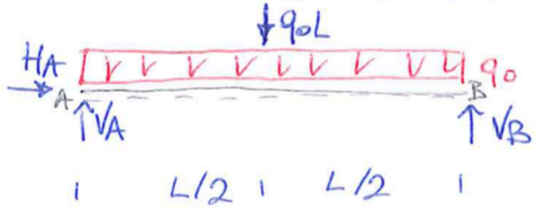
$$\alpha=v'(z=0)=-\frac{q_0 L^3}{6EJ_x}$$

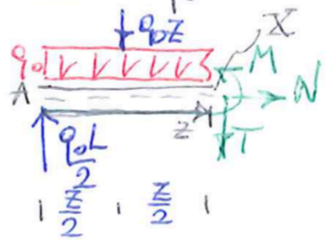


A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

4 - TRAVE APPOGGIATA DI LUCE L SOGGETTA A UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO q_0.







QUESTA VOLTA OCCORRE DETERMINARE PRELIMINARMENTE LE REAZIONI VINCOLARI!

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_B - q_0 L = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & -\frac{q_0 L^{\cancel{2}}}{2} + V_B \cancel{L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{q_0 L}{2} \\ V_B = \frac{q_0 L}{2} \end{cases}$$

PROCEDENDO CON I CALCOLI SI TROVA:

$$M_x(z) = \frac{q_0 L}{2} z - \frac{q_0 z^2}{2}$$

SEGUE DALLA [10]: $\quad v''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow v''(z) = \frac{q_0 z^2}{2EJ_x} - \frac{q_0 L z}{2EJ_x}$

CON UNA DOPPIA INTEGRAZIONE SI TROVA:

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} - \frac{q_0 L z^2}{4EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} - \frac{q_0 L z^3}{12EJ_x} + C_1 z + C_2 .$$

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

QUESTA VOLTA LE C.C. DOVUTE AI 2 VINCOLI IN Ⓐ E Ⓑ FORNISCONO: $\begin{cases} v(z=0)=0 \\ v(z=L)=0 \end{cases}$

10

SI TROVA COSÌ:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ \dfrac{q_0 L^{3}}{24EJ_x} - \dfrac{q_0 L^{3}}{12EJ_x} + C_1 \cancel{L} + \cancel{C_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\dfrac{q_0 L^3 (1-2)}{24EJ_x} = +\dfrac{q_0 L^3}{24EJ_x} \end{cases}$$

DUNQUE

$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} - \frac{q_0 L z^3}{12EJ_x} + \frac{q_0 L^3 z}{24EJ_x} = \frac{q_0 z}{24EJ_x}\left[z^3 - 2Lz^2 + L^3\right]$$

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} - \frac{q_0 L z^2}{4EJ_x} + \frac{q_0 L^3}{24EJ_x} = \frac{q_0}{24EJ_x}\left[4z^3 - 6Lz^2 + L^3\right]$$

LE ROTAZIONI IN CORRISPONDENZA DEGLI APPOGGI, α E β VALGONO RISPETTIVAMENTE:

$$\alpha = v'(z=0) = \frac{q_0 L^3}{24EJ_x}$$

$$\beta = v'(z=L) = \frac{q_0}{24EJ_x}\left(4L^3 - 6L^3 + L^3\right) = -\frac{q_0 L^3}{24EJ_x}$$

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

SI OSSERVA INOLTRE CHE $v'(z=\frac{L}{2}) = \frac{q_0}{24EJ_x}\left[4\frac{L^3}{8} - 6L\frac{L^2}{4} + L^3\right] = \frac{q_0 L^3}{24EJ_x}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1\right] = 0$

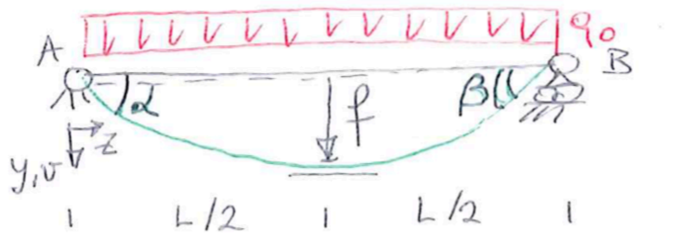
PERTANTO PER $z = \frac{L}{2}$ IL VALORE DI $v(z)$ È STAZIONARIO (È UN MASSIMO IN QUANTO $v''(z=\frac{L}{2}) = \frac{q_0 L^2}{8EJ_x} - \frac{q_0 L^2}{4EJ_x} < 0.$).

IN PARTICOLARE SI TROVA:

$$f = v(z=\tfrac{L}{2}) = \frac{q_0 L}{48EJ_x}\left[\frac{L^3}{8} - 2L\frac{L^2}{4} + L^3\right] = \frac{q_0 L^4}{48EJ_x}\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{q_0 L^4}{48EJ_x}\left[\frac{1-4+8}{8}\right]$$

DUNQUE

$$f = v(z=\tfrac{L}{2}) = \frac{5}{384}\frac{q_0 L^4}{EJ_x}$$



SI OSSERVI CHE LA DEFORMATA DELLA LINEA D'ASSE (UNA QUARTICA) RISULTA SIMMETRICA RISPETTO ALLA MEZZERIA

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

SI OSSERVA INOLTRE CHE $v'(z=\frac{L}{2}) = \frac{q_0}{24EJ_x}\left[4\frac{L^3}{8} - 6L\frac{L^2}{4} + L^3\right] = \frac{q_0 L^3}{24EJ_x}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1\right] = 0$

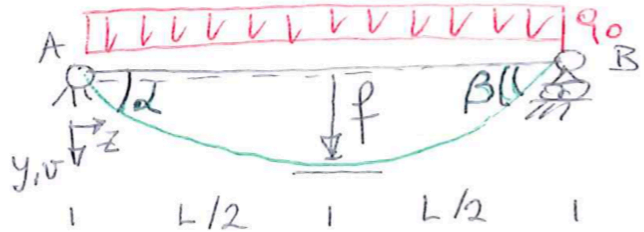
PERTANTO PER $z = \frac{L}{2}$ IL VALORE DI $v(z)$ È STAZIONARIO (È UN MASSIMO IN QUANTO $v''(z=\frac{L}{2}) = \frac{q_0 L^2}{8EJ_x} - \frac{q_0 L^2}{4EJ_x} < 0.$).

IN PARTICOLARE SI TROVA:

$$f = v\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L}{48EJ_x}\left[\frac{L^3}{8} - 2L\frac{L^2}{4} + L^3\right] = \frac{q_0 L^4}{48EJ_x}\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{q_0 L^4}{48EJ_x}\left[\frac{1-4+8}{8}\right]$$

DUNQUE

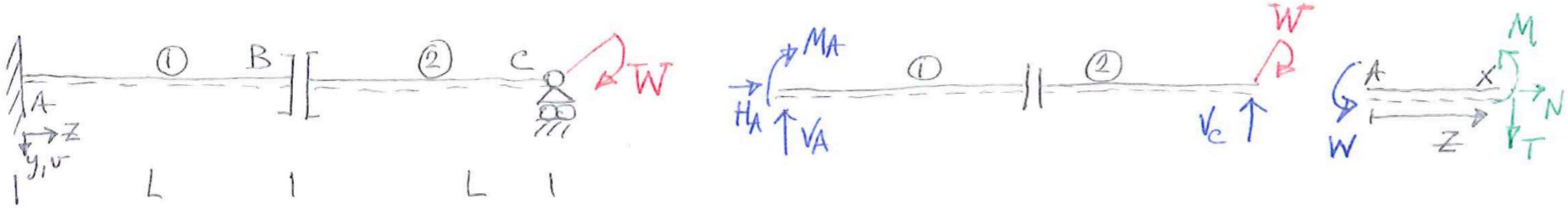
$$f = v\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{q_0 L^4}{EJ_x}$$



SI OSSERVI CHE LA DEFORMATA DELLA LINEA D'ASSE (UNA QUARTICA) RISULTA SIMMETRICA RISPETTO ALLA MEZZERIA

B) TRAVI ISOSTATICHE DOTATE DI VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

1 - TRAVE ISOSTATICA CON UN VINCOLO INTERNO



SI HA, IN BASE ALLE EQUAZIONI CARDINALI E ALL'EQUAZIONE AUSILIARIA:

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_C = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & -M_A + W - V_C \cdot 2L = 0 \\ R_y^{②} = 0 & V_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ V_C = 0 \\ M_A = -W \end{cases}$$

L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE È UNICA PER LE 2 TRAVI:

$$M_x(z) = -W \qquad 0 \leq z \leq 2L$$

TUTTAVIA LA PRESENZA DEL VINCOLO INTERNO CONSENTE IN B UNA DISCONTINUITÀ DEGLI SPOSTAMENTI E RENDE NECESSARIO SPEZZARE IN DUE PARTI L'INTEGRAZIONE DELLA LINEA ELASTICA:

$$v_1''(z) = +\frac{W}{EJ_x} \qquad 0 \leq z < L$$

$$v_2''(z) = \frac{+W}{EJ_x} \qquad L < z \leq 2L$$

B) TRAVI ISOSTATICHE DOTATE DI VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

PROCEDENDO SEPARATAMENTE PER I DUE TRATTI SI TROVA:

$$v_1'(z) = \frac{W}{EJ_x} z + \underline{C_1} \qquad v_2'(z) = \frac{W}{EJ_x} z + \underline{D_1}$$

LE COSTANTI SONO DIVERSE!

$$v_1(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} + \underline{C_1 z + C_2} \qquad v_2(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} + \underline{D_1 z + D_2}$$

LE C.C. IN A SONO:

$$\begin{cases} v(z=0) = 0 & \Rightarrow v_1(z=0) = 0 \\ v'(z=0) = 0 & \Rightarrow v_1'(z=0) = 0 \end{cases}$$

IN C SONO:

$$\begin{cases} v(z=2L) = 0 & \Rightarrow v_2(z=2L) = 0 \end{cases}$$

IN B (VINCOLO INTERNO):

$$\begin{cases} v'(z=L^-) = v'(z=L^+) & \Rightarrow v_1'(z=L) = v_2'(z=L) \end{cases}$$

SI OTTIENE QUINDI IL SEGUENTE SISTEMA DI 4 EQUAZIONI IN 4 INCOGNITE (C_1, C_2, D_1, D_2):

B) TRAVI ISOSTATICHE DOTATE DI VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ \dfrac{W(2L)^2}{2EJ_x} + D_1 \cdot 2L + D_2 = 0 \\ \cancel{\dfrac{W}{EJ_x}}L + \cancel{C_1} = \cancel{\dfrac{W}{EJ_x}}L + D_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_2 = -\dfrac{2WL^2}{EJ_x} \end{cases}$$

SI OTTIENE QUINDI:

$$v_1(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x}; \qquad v_1'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} \qquad 0 \leq z < L$$

$$v_2(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} - \frac{2WL^2}{EJ_x}; \qquad v_2'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} \qquad L < z \leq 2L$$

B) TRAVI ISOSTATICHE DOTATE DI VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

SI OSSERVA CHE IN CIASCUN TRATTO LA DEFORMATA È PARABOLICA, A CURVATURA COSTANTE PARI A $\frac{W}{EJ}$, >0 (COME È CORRETTO CHE SIA, DAL MOMENTO CHE $M_x = -W, <0$).

LA ROTAZIONE $v'(z)$ IN CORRISPONDENZA DEL PATTINO (B) È CONTINUA E VALE:

$$v_1'(z=L) = \frac{WL}{EJ_x} = v_2'(z=L)$$

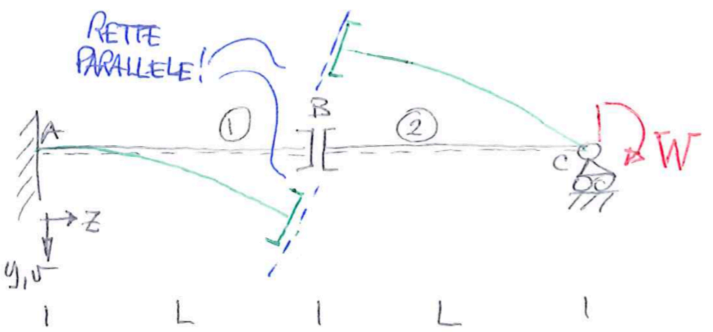
INVECE, IN CORRISPONDENZA DEL PATTINO (B) LO SPOSTAMENTO v È DISCONTINUO:

$$v_1(z=L) = +\frac{WL^2}{2EJ_x}$$

$$v_2(z=L) = +\frac{WL^2}{2EJ_x} - \frac{2WL^2}{EJ_x} = -\frac{3}{2}\frac{WL^2}{EJ_x}$$

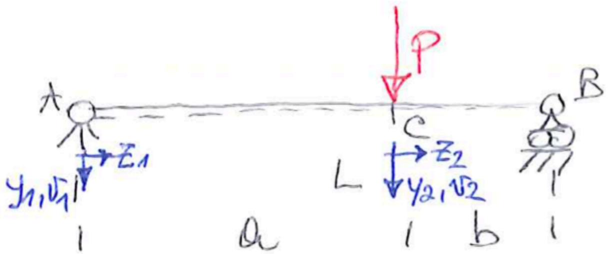
SI HA QUINDI UN "SALTO" $\Delta v(z=L) = v_1(z=L) - v_2(z=L) = \frac{WL^2}{2EJ_x} - \left(-\frac{3WL^2}{2EJ_x}\right) = \frac{2WL^2}{EJ_x}$.

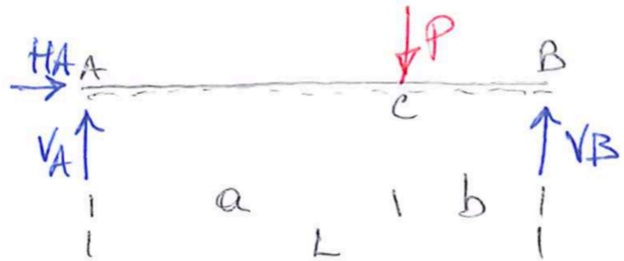
LA DEFORMATA ELASTICA DELLA STRUTTURA È LA SEGUENTE:

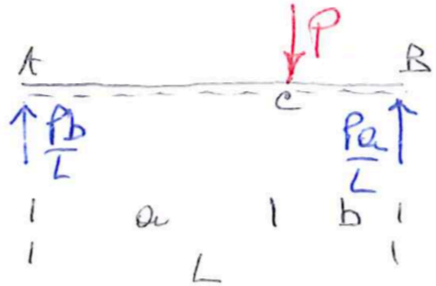


C) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE NON È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

1- TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA A UN CARICO CONCENTRATO IN CAMPATA.



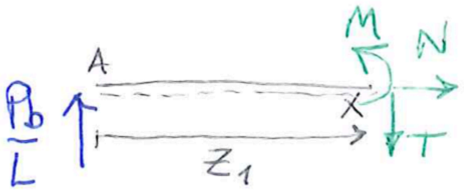




SI DETERMINANO LE REAZIONI VINCOLARI:

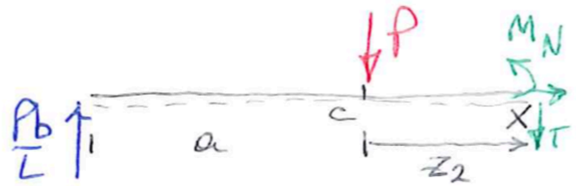
$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_B - P = 0 \\ M_{x(A)} = 0 & -Pa + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = P\left(1 - \frac{a}{L}\right) = P\frac{b}{L} \\ V_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$

L'ESPRESSIONE DI M_x È DIVERSA PER I DUE TRATTI:



$$M_x(z_1) = \frac{Pb}{L} z_1$$

$$0 \leq z_1 < a$$



$$M_x(z_2) = \frac{Pa}{L}(b - z_2)$$

$$0 < z_2 \leq b$$

c) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE NON È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

SI TROVA QUINDI:

$$v_1''(z_1) = -\frac{\frac{Pb}{L}z_1}{EJ_x} \qquad 0 \leq z_1 < a$$

$$v_2''(z_2) = -\frac{\frac{Pa}{L}(b-z_2)}{EJ_x} \qquad 0 < z_2 \leq b$$

MEDIANTE DUE INTEGRAZIONI SI RISALE A $v_1(z_1)$ E $v_2(z_2)$; $v = v_1 \cup v_2$:

$$v_1'(z_1) = -\frac{\frac{Pb\,z_1^2}{2L}}{EJ_x} + A_1$$

$$v_1(z_1) = -\frac{Pb z_1^3}{6LEJ_x} + A_1 z_1 + A_2$$

$$v_2'(z_2) = \frac{-Pabz_2}{LEJ_x} + \frac{Paz_2^2}{2LEJ_x} + B_1$$

$$v_2(z_2) = -\frac{Pabz_2^2}{2LEJ_x} + \frac{Paz_2^3}{6LEJ_x} + B_1 z_2 + B_2$$

C) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE NON È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

LE C.C. SONO:

$$\begin{cases} v_1(z_1=0) = 0 \\ v_2(z_2=b) = 0 \end{cases}$$

PER I VINCOLI ESTERNI

$$\begin{cases} v_1(z_1=a) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=a) = v_2'(z_2=0) \end{cases}$$

PER IL VINCOLO INTERNO DI CONTINUITÀ (SALDATURA)

NE SEGUE:

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ -\dfrac{Pab^3}{2LEJ_x} + \dfrac{Pab^3}{6LEJ_x} + B_1 b + B_2 = 0 \\ -\dfrac{Pba^3}{6LEJ_x} + A_1 a + \cancel{A_2} = B_2 \\ \left(-\dfrac{Pba^2}{2LEJ_x} + A_1\right) a = B_1 \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ -\dfrac{Pab^3}{3LEJ_x} + B_1 b + B_2 = 0 \\ +\dfrac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a - B_2 = 0 \\ -\dfrac{Pba^2}{2LEJ_x} + A_1 = B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ -\dfrac{P(ab^3 - ba^3)}{3LEJ_x} + B_1(b+a) = 0 \\ \dfrac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a = B_2 \\ \dfrac{Pba^2}{2LEJ_x} + B_1 = A_1 \end{cases}$$

SI HA POI:

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ -\dfrac{Pab(b^2-a^2)}{3LEJ_x} + B_1(b+a) = 0 \\ B_2 = \dfrac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a \\ A_1 = \dfrac{Pba^2}{2LEJ_x} + B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ +\dfrac{Pab(b-a)\cancel{(b+a)}}{3LEJ_x} = B_1\cancel{(b+a)} \\ B_2 = \dfrac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a \\ A_1 = \dfrac{Pba^2}{2LEJ_x} + B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ B_1 = \dfrac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \\ B_2 = \dfrac{Pb\cancel{a^3}}{\cancel{3}LEJ_x} + \dfrac{Pa^2b(b-\cancel{a})}{3LEJ_x} \\ A_1 = \underbrace{\dfrac{Pba^2}{2LEJ_x} + \dfrac{Pab^2 - Pba^2}{3LEJ_x}}_{\dfrac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x}} \end{cases}$$

C) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE NON È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

18

SI GIUNGE INFINE A QUESTO RISULTATO:

$$A_1 = \frac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x} \; ; \quad A_2 = 0 \; ; \quad B_1 = \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \; ; \quad B_2 = \frac{Pa^2b^2}{3LEJ_x}$$

E LA LINEA ELASTICA HA QUESTA ESPRESSIONE COMPLETA:

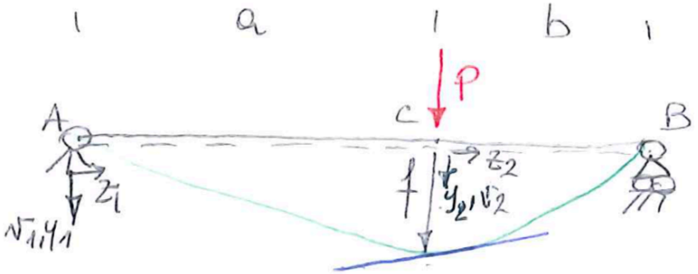
$$v_1(z_1) = -\frac{Pbz_1^3}{6LEJ_x} + \frac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x} z_1 \; ; \qquad v_1'(z_1) = \frac{-Pbz_1^2}{2LEJ_x} + \frac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x} \qquad 0 \leq z_1 < a$$

$$v_2(z_2) = -\frac{Pabz_2^2}{2LEJ_x} + \frac{Paz_2^3}{6LEJ_x} + \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} z_2 + \frac{Pa^2b^2}{3LEJ_x} \; ; \quad v_2'(z_2) = -\frac{Pabz_2}{LEJ_x} + \frac{Paz_2^2}{2LEJ_x} + \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \qquad 0 < z_2 \leq b$$

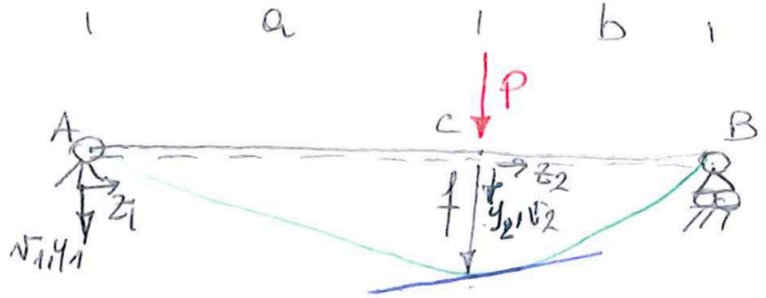
SI NOTA CHE LA LINEA ELASTICA RISULTA COSTITUITA DA 2 ARCHI DI CUBICA RACCORDATI IN C IN MODO DA AVERE DERIVATA PRIMA CONTINUA.

L'ABBASSAMENTO NEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA È PARI A:

$$f = v_1(z_1 = a) = v_2(z_2 = 0) = \frac{Pa^2b^2}{3LEJ_x} = \frac{Pa^2(L-a)^2}{3LEJ_x}$$



C) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE NON È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.



SI NOTI CHE LA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO C FORMA CON L'ASSE Z UN ANGOLO DI VALORE

$$v_1'(z_1=a) = v_2'(z_2=0) = \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \neq 0 \quad \text{SE } b \neq a$$

SE $a = b = \frac{L}{2}$ SI TROVA INVECE

$$v_1'\left(z_1=\frac{L}{2}\right) = v_2'(z_2=0) = 0 \quad \text{(TANGENTE ORIZZONTALE)}$$

$$v_1\left(z_1=\frac{L}{2}\right) = v_2(z_2=0) = \frac{P\frac{L^2}{4}\cdot\frac{L^2}{4}}{3LEJ_x} = \frac{PL^{\cancel{4}\,3}}{48\cancel{L}EJ_x} = \frac{PL^3}{48EJ_x}$$

D) TRAVI IPERSTATICHE.

L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA PUÒ ESSERE IMPIEGATA PER RISOLVERE STRUTTURE IPERSTATICHE PER EFFETTO DI VINCOLI SOVRABBONDANTI CHE INTRODUCONO COPPIE E/O FORZE TRASVERSALI CHE NON SONO DETERMINABILI CON SOLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

NON PUÒ INVECE ESSERE IMPIEGATO IN PRESENZA DI TRAVI O STRUTTURE ASSIALMENTE IPERSTATICHE, COME IN QUESTO ESEMPIO

IN QUANTO È RICHIESTO CHE LA STRUTTURA SIA SOLLECITATA A FLESSIONE.

PER RISOLVERE CON IL METODO DELLA LINEA ELASTICA UNA TRAVE UNA VOLTA IPERSTATICA SI SEGUE QUESTO PROCEDIMENTO:

1) SI ELIMINA LA CONDIZIONE DI IPERSTATICITÀ DEGRADANDO OPPORTUNAMENTE UN VINCOLO (OPPURE INTRODUCENDO UNO "SVINCOLO" INTERNO) E METTENDO IN EVIDENZA, COME UNA FORZA/COPPIA INCOGNITA L'AZIONE ORIGINARIAMENTE ESERCITATA DAL VINCOLO SOVRABBONDANTE. NEL CASO DI "SVINCOLAMENTO" OCCORRE RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE INTRODUCENDO L'INCOGNITA SU ENTRAMBI I LEMBI DEL PUNTO DOVE È STATO DEGRADATO IL VINCOLO INTERNO.
È ESSENZIALE CHE LA STRUTTURA COSÌ OTTENUTA SIA ISOSTATICA E NON LABILE.

D) TRAVI IPERSTATICHE.

2). SI DETERMINA L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE DELLA STRUTTURA ISOSTATICA OTTENUTA AL PUNTO 1.). IL MOMENTO FLETTENTE DIPENDERA' IN GENERALE DAI CARICHI ESTERNI E DALL'AZIONE INCOGNITA INTRODOTTA.

3.) SI INTEGRA L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA (EVENTUALMENTE PER TRATTI SEPARATI SE SONO PRESENTI VINCOLI INTERNI E/O SE L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE NON E' UNICA PER L'INTERA TRAVE) E SI INTRODUCONO LE C.C. RELATIVE ALLA STRUTTURA RESA ISOSTATICA: IN QUESTO MODO SI GIUNGE A DETERMINARE UNIVOCAMENTE TUTTE LE COSTANTI DI INTEGRAZIONE, MA L'ESPRESSIONE DELLA LINEA ELASTICA DIPENDERA' DALL'AZIONE INCOGNITA INTRODOTTA NEL PUNTO 1.

4.) SI INTRODUCE A QUESTO PUNTO LA CONDIZIONE CINEMATICA DEL VINCOLO SOVRABBONDANTE (CONDIZIONE DI CONGRUENZA) CHE, SE RISULTA SODDISFATTA, FA SÌ CHE LA STRUTTURA RESA ISOSTATICA SI COMPORTI COME LA STRUTTURA (IPERSTATICA) ASSEGNATA: SI OTTIENE UNA EQUAZIONE, NELL'INCOGNITA IPERSTATICA, CHE RISOLTA NE DEFINISCE IL VALORE. SI PUÒ QUINDI AFFERMARE CHE FRA TUTTI I POSSIBILI VALORI DELL'AZIONE INCOGNITA, CHE SEMPRE SODDISFANO L'EQUILIBRIO, QUELLO COSÌ DETERMINATO SODDISFA ANCHE IL VINCOLO SOVRABBONDANTE.

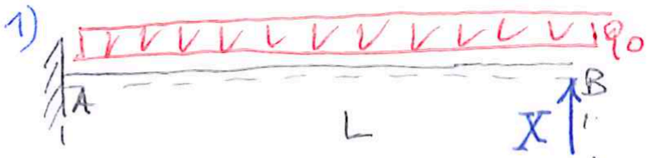
D) TRAVI IPERSTATICHE.

NEL CASO DI STRUTTURE PIÙ VOLTE IPERSTATICHE (P.ES. N VOLTE IPERSTATICHE) SI SEGUE IL PROCEDIMENTO SOPRA DELINEATO EVIDENZIANDO TUTTE LE **N** AZIONI IPERSTATICHE E OTTENENDO UNA STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE.
DETERMINANDO L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE, E INTEGRANDO CON LE C.C. CORRISPONDENTI ALLA STRUTTURA ISOSTATICA L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA, SI OTTIENE UN'ESPRESSIONE CHE DIPENDE DALLE N AZIONI IPERSTATICHE.
SE ORA SI INTRODUCONO LE N CORRISPONDENTI CONDIZIONI DI CONGRUENZA SI OTTIENE UN SISTEMA DI N EQUAZIONI IN N INCOGNITE CHE, RISOLTO, FORNISCE LA SOLUZIONE LINEARE CERCATA. DA QUI SI POSSONO DETERMINARE LE AZIONI INTERNE IN TUTTI I PUNTI.

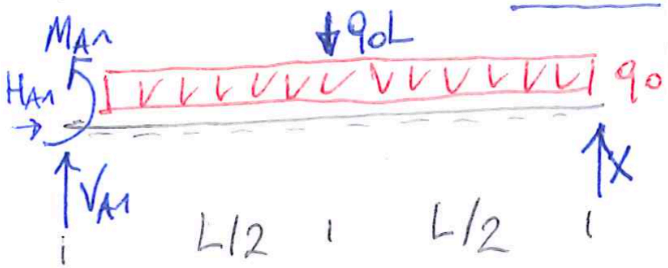
D) TRAVI IPERSTATICHE.

1. TRAVE INCASTRO – APPOGGIO SOGGETTA A CARICO DISTRIBUITO.

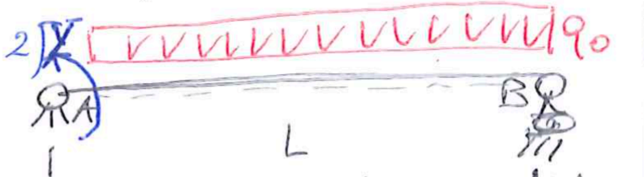
LA STRUTTURA È UNA VOLTA IPERSTATICA: SI PRESENTANO IN PARALLELO IL PROCEDIMENTO RISOLUTIVO PER TRE DIVERSE SCELTE (TUTTE LECITE POICHÉ DANNO LUOGO A STRUTTURE ISOSTATICHE NON LABILI) DELL'AZIONE IPERSTATICA



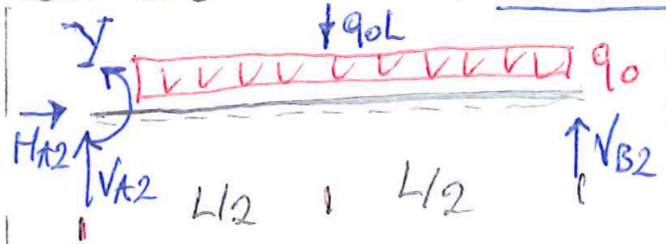
CONDIZIONE DI CONGRUENZA: $v(B) = 0$



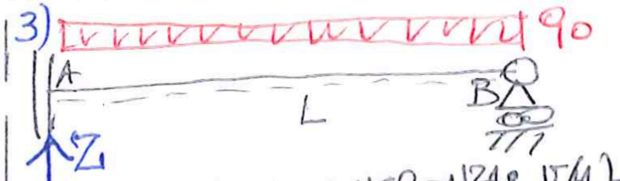
$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_{A1} = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_{A1} + X - q_0 L = 0 \\ M_{x(A)} = 0 & M_{A1} - \frac{q_0 L^2}{2} + XL = 0 \end{cases}$$



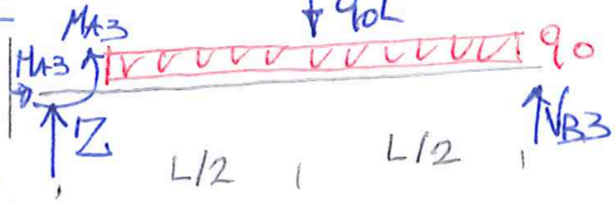
CONDIZIONE DI CONGRUENZA $v'(A) = 0$



$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_{A2} = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_{A2} - q_0 L + V_{B2} = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & Y - \frac{q_0 L^2}{2} + V_{B2} L = 0 \end{cases}$$



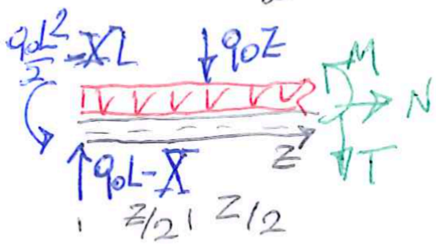
CONDIZIONE DI CONGRUENZA: $v(A) = 0$



$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_{A3} = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & Z - q_0 L + V_{B3} = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & M_{A3} - \frac{q_0 L^2}{2} + V_{B3} L = 0 \end{cases}$$

D) TRAVI IPERSTATICHE.

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{A1} = 0 \\ V_{A1} = q_0 L - X \\ M_{A1} = \dfrac{q_0 L^2}{2} - XL \end{cases}$$



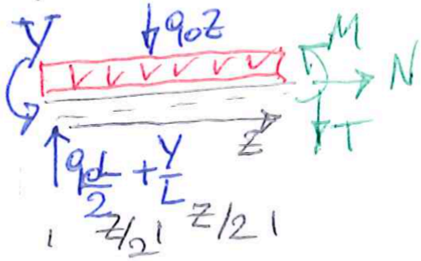
$$N(z) = 0$$
$$T(z) = q_0 L - q_0 z - X$$
$$M(z) = -\frac{q_0 L^2}{2} + q_0 L z - q_0 \frac{z^2}{2} - Xz + XL$$

$$v''(z) = \frac{q_0 L^2}{2EJ_x} - \frac{q_0 L z}{EJ_x} + \frac{q_0 z^2}{2EJ_x} + \frac{Xz}{EJ_x} - \frac{XL}{EJ_x}$$

$$v'(z) = \frac{q_0 L^2 z}{2EJ_x} - \frac{q_0 L z^2}{2EJ_x} + \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} + \frac{X z^2}{2EJ_x} - \frac{XLz}{EJ_x} + A_1$$

$$v(z) = \frac{q_0 L^2 z^2}{4EJ_x} - \frac{q_0 L z^3}{6EJ_x} + \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} + \frac{X z^3}{6EJ_x} - \frac{XLz^2}{2EJ_x} + A_1 z + A_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{A2} = 0 \\ V_{A2} = \dfrac{q_0 L}{2} + \dfrac{Y}{L} \\ V_{B2} = \dfrac{q_0 L}{2} - \dfrac{Y}{L} \end{cases}$$



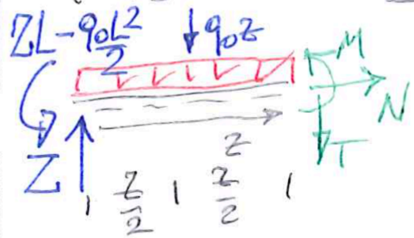
$$N(z) = 0$$
$$T(z) = \frac{q_0 L}{2} - q_0 z + \frac{Y}{L}$$
$$M(z) = \frac{q_0 L}{2} z - q_0 \frac{z^2}{2} + \frac{Y}{L} z - Y$$

$$v''(z) = -\frac{q_0 L z}{2EJ_x} + \frac{q_0 z^2}{2EJ_x} - \frac{Yz}{LEJ_x} + \frac{Y}{EJ_x}$$

$$v'(z) = -\frac{q_0 L z^2}{4EJ_x} + \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} - \frac{Y z^2}{2LEJ_x} + \frac{Yz}{EJ_x} + B_1$$

$$v(z) = -\frac{q_0 L z^3}{12EJ_x} + \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} - \frac{Y z^3}{6LEJ_x} + \frac{Y z^2}{2EJ_x} + B_1 z + B_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{A3} = 0 \\ V_{B3} = q_0 L - Z \\ M_{A3} = ZL - \dfrac{q_0 L^2}{2} \end{cases}$$



$$N(z) = 0$$
$$T(z) = Z - q_0 z$$
$$M(z) = \frac{q_0 L^2}{2} - \frac{q_0 z^2}{2} + Zz - ZL$$

$$v''(z) = -\frac{q_0 L^2}{2EJ_x} + \frac{q_0 z^2}{2EJ_x} - \frac{Zz}{EJ_x} + \frac{ZL}{EJ_x}$$

$$v'(z) = -\frac{q_0 L^2 z}{2EJ_x} + \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} - \frac{Z z^2}{2EJ_x} + \frac{ZLz}{EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = -\frac{q_0 L^2 z^2}{4EJ_x} + \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} - \frac{Z z^3}{6EJ_x} + \frac{ZL z^2}{2EJ_x} + C_1 z + C_2$$

D) TRAVI IPERSTATICHE.

C.C.

$$\begin{cases} v(z=0)=0 & A_2=0 \\ v'(z=0)=0 & A_1=0 \end{cases}$$

$A_1=0;\ A_2=0$

C.C.

$$\begin{cases} v(z=0)=0 & B_2=0 \\ v(z=L)=0 & -\dfrac{q_0L^4}{12EJ_x}+\dfrac{q_0L^4}{24EJ_x}-\dfrac{YL^2}{6EJ_x}+\dfrac{YL^2}{2EJ_x}+B_1L=0 \end{cases}$$

$B_2=0;\ B_1=\dfrac{q_0L^3}{24EJ_x}-\dfrac{YL}{3EJ_x}$

C.C.

$$\begin{cases} v'(z=0)=0 & C_1=0 \\ v(z=L)=0 & -\dfrac{q_0L^4}{4EJ_x}+\dfrac{q_0L^4}{24EJ_x}-\dfrac{ZL^3}{6EJ_x}+\dfrac{ZL^3}{2EJ_x}+C_2=0 \end{cases}$$

$C_1=0;\ C_2=\dfrac{5}{24}\dfrac{q_0L^4}{EJ_x}-\dfrac{ZL^3}{3EJ_x}$

29

SI PASSA A IMPORRE, PER CIASCUNO DEI CASI LA CONDIZIONE DI CONGRUENZA.
SI OTTIENE:

1) $v(z=L)=0$

$$\underbrace{\frac{q_0L^4}{4EJ_x}-\frac{q_0L^4}{6EJ_x}+\frac{q_0L^4}{24EJ_x}}_{\frac{1}{8}\cancel{\frac{3}{24}}\frac{q_0L^4}{EJ_x}}+\underbrace{\frac{XL^3}{6EJ_x}-\frac{XL^3}{2EJ_x}}_{-\frac{XL^3}{3EJ_x}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\frac{q_0L^{\cancel{4}}}{\cancel{EJ_x}}-\frac{X\cancel{L^3}}{3\cancel{EJ_x}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{3}{8}q_0L}$$

$H_{A1}=0$

$V_{A1}=q_0L-\dfrac{3}{8}q_0L=\dfrac{5}{8}q_0L=Z$

$M_{A1}=\dfrac{q_0L^2}{2}-\dfrac{3}{8}q_0L^2=\dfrac{q_0L^2}{8}=Y$

2) $v'(z=0)=0$

$$B_1=0 \Rightarrow \frac{q_0L^{\cancel{3}\,2}}{24\cancel{EJ_x}}-\frac{Y\cancel{L}}{3\cancel{EJ_x}}=0$$

$$\frac{q_0L^2}{\cancel{24}\,8}-\frac{Y}{\cancel{3}\,1}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{Y=\frac{q_0L^2}{8}}$$

$H_{A2}=0$

$V_{A2}=\dfrac{q_0L}{2}+\dfrac{q_0L}{8}=\dfrac{5}{8}q_0L$

$V_{B2}=\dfrac{q_0L}{2}-\dfrac{q_0L}{8}=\dfrac{3}{8}q_0L=X$

3) $v'(z=0)=0$

$$C_2=0 \Rightarrow \frac{5}{24}\frac{q_0L^{\cancel{4}}}{\cancel{EJ_x}}-\frac{Z\cancel{L^3}}{3\cancel{EJ_x}}=0$$

$$\frac{5}{\cancel{24}\,8}q_0L-\frac{Z}{\cancel{3}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{Z=\frac{5}{8}q_0L}$$

$H_{A3}=0$

$V_{B3}=q_0L-\dfrac{5}{8}q_0L=\dfrac{3}{8}q_0L=X$

$M_{A3}=-\dfrac{q_0L^2}{2}+\dfrac{5}{8}q_0L^2=\dfrac{q_0L^2}{8}=Y$

D) TRAVI IPERSTATICHE.

SI VEDE QUINDI CHE I VALORI DELLE REAZIONI VINCOLARI NON DIPENDONO DALLA SCELTA DELL'INCOGNITA IPERSTATICA.
I VALORI DELLE AZIONI INTERNE SONO ALLORA (SI FA RIFERIMENTO AL CASO 1), MA GLI STESSI RISULTATI SI OTTENGONO NEI CASI 2) E 3); LA VERIFICA E' LASCIATA AL LETTORE.

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = q_0 L - q_0 z - \frac{3}{8} q_0 L \Rightarrow T(z) = \frac{5}{8} q_0 L - q_0 z$$

$$M(z) = -\frac{q_0 L^2}{2} + q_0 L z - q_0 \frac{z^2}{2} + \frac{3}{8} q_0 L^2 - \frac{3}{8} q_0 L z \Rightarrow M(z) = -\frac{q_0 L^2}{8} + \frac{5}{8} q_0 L z - \frac{q_0 z^2}{2}$$

SI OSSERVI CHE, COME DEVE RISULTARE PER LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA SI HA:

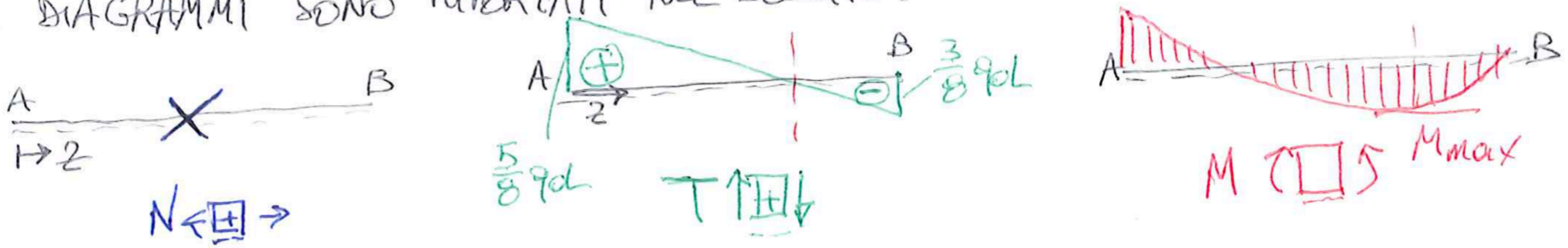
$$\frac{dT(z)}{dz} = -q_0 = -q(z)$$

$$\frac{dM}{dz} = \frac{5}{8} q_0 L - q_0 z = T(z)$$

D) TRAVI IPERSTATICHE.

1. TRAVE INCASTRO – APPOGGIO SOGGETTA A CARICO DISTRIBUITO.

I DIAGRAMMI SONO RIPORTATI NEL SEGUITO:



LA DEFORMATA ELASTICA È INVECE:

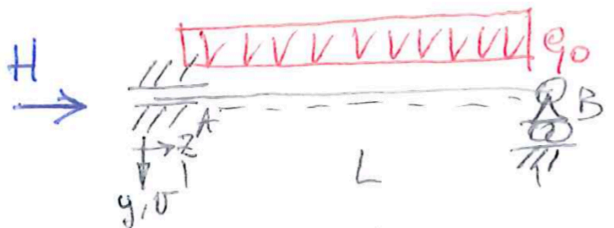
$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24 E J_x} - \frac{5 q_0 L z^3}{48 E J_x} + \frac{q_0 L^2 z^2}{16 E J_x}$$

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6 E J_x} - \frac{5 q_0 L z^2}{16 E J_x} + \frac{q_0 L^2 z}{8 E J_x}$$

D) TRAVI IPERSTATICHE.

NOTA 6. SI OSSERVI CHE ACCANTO A INFINITE SCELTE CORRETTE DELL'INCOGNITA IPERSTATICA VE NE SONO ANCHE DI ERRATE: TUTTE QUELLE CHE PRODUCONO, COME RISULTATO UNA STRUTTURA "DI SERVIZIO" CHE NON SIA ISOSTATICA O CHE SIA LABILE. 30

UN ESEMPIO BANALE PER ILLUSTRARE QUESTO CONCETTO È IL SEGUENTE:



H NON È UN'INCOGNITA VALIDA PERCHÉ PUÒ ESSERE DETERMINATA CON CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E PERCHÉ LA STRUTTURA COSÌ OTTENUTA È LABILE

$\hat{R}_z = 0$ IMPONE $H = 0$!

SAREBBE INVECE LECITO SCEGLIERE COME INCOGNITA IPERSTATICA IL MOMENTO FLETTENTE IN UNA SEZIONE INTERMEDIA, PER ESEMPIO QUELLA IN MEZZERIA: