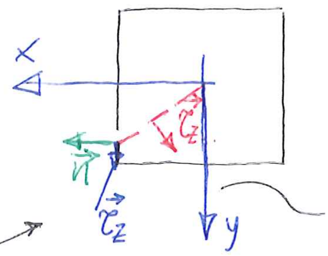
TORSIONE DI SOLIDI A SEZIONE GENERICA (NON CIRCOLARE).

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA TORSIONE OTTENUTA PER SEZIONI CIRCOLARI NON PUÒ ESSERE GENERALIZZATA AL CASO DI SEZIONI DI FORMA QUALSIASI.

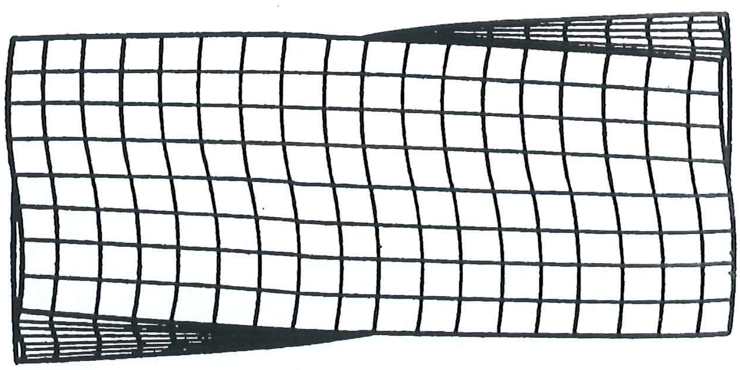
INFATTI SOLO SE LA SEZIONE È CIRCOLARE LA CONDIZIONE AL CONTORNO $\vec{\tau} \times \vec{n} = 0$ RISULTA SODDISFATTA FACILMENTE, IN QUANTO LE TENSIONI TANGENZIALI τ_{zx} E τ_{zy} SONO DIRETTE PERPENDICOLARMENTE AL RAGGIO, MENTRE LA NORMALE AL CONTORNO $\vec{n}$ È SEMPRE DIRETTA RADIALMENTE: IN QUESTO MODO $\vec{\tau} \times \vec{n} = 0$ È SEMPRE VERIFICATA.
PER QUALSIASI ALTRA FORMA DELLA SEZIONE LA NORMALE AL CONTORNO $\vec{n}$ NON È PIÙ DIRETTA RADIALMENTE, E LA CONDIZIONE $\vec{\tau} \times \vec{n} = 0$ È VIOLATA SE τ_z È DIRETTA SEMPRE PERPENDICOLARMENTE AL RAGGIO, COME AVVIENE NEL CASO CIRCOLARE.



QUESTO DEVE VERIFICARSI SUL CONTORNO

NON È POSSIBILE SE τ_z È $\perp$ RISPETTO AL RAGGIO.

OCCORRE QUINDI MODIFICARE LA SOLUZIONE, ABBANDONANDO L'IPOTESI CHE NON CI SIANO SPOSTAMENTI IN DIREZIONE LONGITUDINALE (CIOÈ $W = 0$) E CHE LA SEZIONE TRASVERSALE RETTA SI MANTENGA PIANA. SI DEVE QUINDI IMMAGINARE CHE LA SEZIONE TRASVERSALE SI "INGOBBI" IN MODO TUTTAVIA INDIPENDENTE DA Z, CIOÈ TALE CHE L'INGOBBAMENTO RISULTI UNIFORME (RISPETTO A Z).



SI AMMETTE ALLORA CHE LA SOLUZIONE CINEMATICA ABBIA QUESTA FORMA:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = -\Theta yz \\ v(x,y,z) = +\Theta xz \\ w(x,y,z) = \Theta\,\omega(x,y) \end{cases} \qquad [1]$$

DOVE Θ È L'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE (COSTANTE LUNGO L'ASSE DEL SOLIDO: TORSIONE UNIFORME $\Leftrightarrow \frac{d\Theta}{dz} = 0$) E $\omega = \omega(x,y)$ LA FUNZIONE DI INGOBBAMENTO, DA DETERMINARSI.

SI OSSERVI CHE DIMENSIONALMENTE $[w] = [L]$, $[\Theta] = \left[\frac{1}{L}\right] \Rightarrow [\omega] = [L^2]$.

LE DEFORMAZIONI CONSEGUENTI AL CAMPO DI SPOSTAMENTI [1] SONO:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\Theta z + \Theta z = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\Theta y + \Theta \frac{\partial \omega}{\partial x} \qquad [2]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = +\Theta x + \Theta \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

DALLE [2] MEDIANTE IL LEGAME COSTITUTIVO INVERSO SI DETERMINANO LE COMPONENTI DI SFORZO:

$$\sigma_x = 0 \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = +G\Theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y\right) \qquad [3]$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = +G\Theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x\right)$$

DOVE G È IL MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE.

LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA FORNISCONO

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 & & 0 = 0 \quad \checkmark \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow & 0 = 0 \quad \checkmark \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 & & G\Theta \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + G\Theta \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \qquad [4]$$

PERTANTO LA FUNZIONE $\omega(x,y)$ DEVE SODDISFARE L'EQUAZIONE $\nabla^2 \omega = 0$ NEI PUNTI INTERNI, DUNQUE IN OGNI SEZIONE TRASVERSALE S_z

W DEVE QUINDI ESSERE FUNZIONE ARMONICA, CIOÈ SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE ($\nabla^2 w = 0$).

SULLA SUPERFICIE DI CONTORNO S (MANTELLO), PRIVO DI FORZE DI SUPERFICIE E TALE CHE $\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, 0\}$ DEVONO ESSERE SODDISFATTE LE RELAZIONI DI CAUCHY:

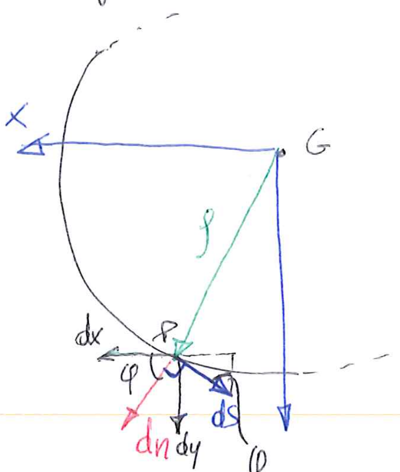
$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \\ G\Theta\left[\frac{\partial w}{\partial x} - y\right]\alpha_x + G\Theta\left[\frac{\partial w}{\partial y} + x\right]\alpha_y = 0 \end{array} \qquad [5]$$

SI OSSERVI CHE L'ULTIMA DELLE [5], POSTO $\vec{\tau}_z = \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j}$ RICHIEDE CHE

$$\vec{\tau}_z \times \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_z \text{ DEVE ESSERE TANGENTE AL CONTORNO.}$$

LE [5] CHE DEVONO VALERE SU TUTTO IL CONTORNO, PER LA IPOTIZZATA INDIPENDENZA DA Z DEVONO VALERE SULLA FRONTIERA ∂S_z DELLA GENERICA SEZIONE TRASVERSALE S_z, POSSONO ESSERE SCRITTE ANCHE IN QUESTE FORME:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial w}{\partial y}\alpha_y = y\alpha_x - x\alpha_y \qquad [6]$$



$$\alpha_x = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}$$

$$\alpha_y = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}$$

$$\alpha_x = \cos\varphi \ ; \quad \alpha_y = \sin\varphi$$

DUNQUE

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn} = y\frac{dy}{ds} - x\left(-\frac{dx}{ds}\right) \qquad [6']$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn} = y\frac{dy}{ds} + x\frac{dx}{ds}$$

MA $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn} = \frac{dw}{dn}$; $x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\rho^2)$

E DUNQUE $\frac{dw}{dn} = \frac{1}{2}\frac{d(\rho^2)}{ds} = \rho\frac{d\rho}{ds}$ [6''] DOVE ρ È LA DISTANZA FRA IL BARICENTRO G E IL GENERICO PUNTO $P \in$ AL CONTORNO ∂S_z

PER LA [4] E LA [6''] ω È FUNZIONE ARMONICA, LA CUI DERIVATA NORMALE È ASSEGNATA SUL CONTORNO: SI HA UN PROBLEMA DI NEUMANN PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE.

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA È GARANTITA (A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA) PURCHÉ RISULTI $\oint_{\partial S_z} \frac{d\omega}{dn} ds = 0.$

RESTANO DA VERIFICARE LE CONDIZIONI DI EQUIVALENZA STATICA SULLE BASI S_0 E S_L.
PER LA SECONDA, PER LA QUALE $\vec{n} = \{0,0,1\}$ SI HA:

$$\begin{cases} \tau_{zx} \cdot 1 = G\Theta\left[\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\right] = p_x \\ \tau_{zy} \cdot 1 = G\Theta\left[\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right] = p_y \\ \sigma_z \cdot 1 = 0 = p_z \end{cases}$$

RELAZIONI ANALOGHE SI TROVANO SULLA BASE S_0 (PER LA QUALE $\vec{n} = \{0,0,-1\}$).

IN TERMINI DI RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE SI DEVE AVERE:

$$T_x = \int_A p_x\, dA = 0 \Rightarrow G\Theta\int_A \frac{\partial\omega}{\partial x} dA - G\Theta\underbrace{\int_A y\, dA}_{S_x=0} = 0 \Rightarrow \int_A \frac{\partial\omega}{\partial x} dA = 0$$

$$T_y = \int_A p_y\, dA = 0 \Rightarrow G\Theta\int_A \frac{\partial\omega}{\partial y} dA + G\Theta\underbrace{\int_A x\, dA}_{S_y=0} = 0 \Rightarrow \int_A \frac{\partial\omega}{\partial y} dA = 0$$

$$N = \int_A p_z\, dA = 0$$

$$M_{x(0)} = \int_A y\, p_z\, dA = 0$$

$$M_{y(0)} = \int_A -x\, p_z\, dA = 0$$

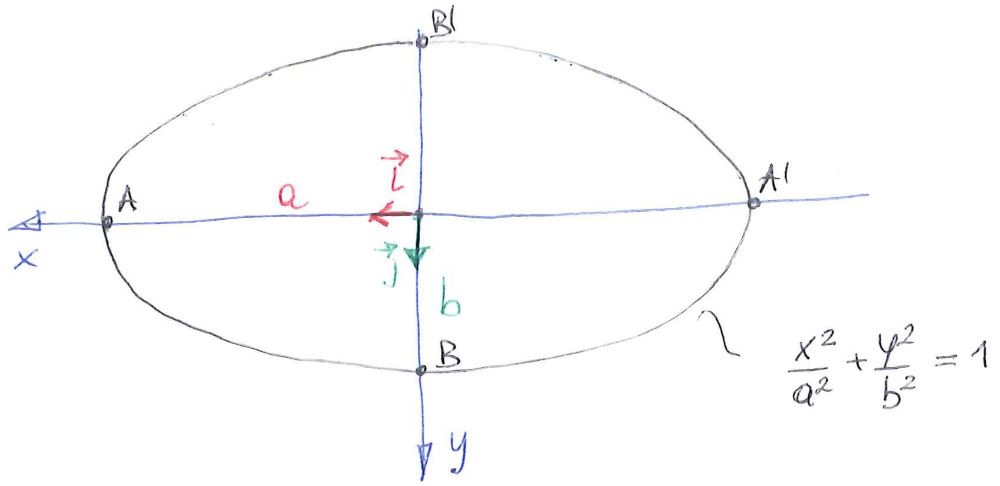
$$M_{z(0)} = \int_A (-p_x y + p_y x)\, dA = \bar{M}_z \Rightarrow G\Theta\int_A \left[\left(-\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\right)y + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right)x\right] dA = \bar{M}_z$$

OVVERO $\bar{M}_z = G\Theta \int_A \left[x^2 + y^2 - \frac{\partial\omega}{\partial x} y + \frac{\partial\omega}{\partial y} x\right] dA = G\Theta J_t$

$$J_t = \int_A \left[x^2 + y^2 - \frac{\partial\omega}{\partial x} y + \frac{\partial\omega}{\partial y} x\right] dA = \underbrace{\int_A (x^2+y^2)\, dA}_{J_G} + \int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} x - \frac{\partial\omega}{\partial x} y\right) dA$$

$J_t = J_G + \int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} x - \frac{\partial\omega}{\partial x} y\right) dA$; FATTORE DI RIGIDITÀ TORSIONALE.

ESEMPIO: SEZIONE ELLITTICA CON SEMIASSE MAGGIORE a E SEMIASSE MINORE b



SI ASSUME CHE LA FUNZIONE DI INGOBBAMENTO SIA $\omega = kxy$, $k = \text{const.}$ [7]

SI HA:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = ky \;;\quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = kx \;;\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \;;\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \nabla^2 \omega = 0 \qquad [7']$$

E LA EQUAZIONE DI LAPLACE E' SODDISFATTA.

RESTA DA VERIFICARE LA CONDIZIONE [6]: ALLO SCOPO OCCORRE DETERMINARE L'ESPRESSIONE DI α_x, α_y SUL CONTORNO DELLA SEZIONE RETTA ∂S_z.

L'ELLISSE AMMETTE QUESTA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad [8]$$

← NOTA: NON È UNA RAPPRESENTAZIONE IN COORDINATE POLARI (t È ANOMALIA ECCENTRICA)

UN VETTORE TANGENTE $\vec{t}$ ALL'ELLISSE È COSIFFATTO:

$$\vec{t} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{t} = -a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}$$

IL SUO MODULO VALE $|\vec{t}| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

IL VERSORE TANGENTE $\vec{T} = \dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|}$ È:

$$\vec{T} = \frac{-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE PER $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$; $t=\pi$; $t=\frac{3\pi}{2}$ SI OTTIENE:

$$\vec{T}\Big|_{t=0} = +\vec{j} \;;\quad \vec{T}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\vec{i} \;;\quad \vec{T}\Big|_{t=\pi} = -\vec{j} \;;\quad \vec{T}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = +\vec{i}$$

SEGUE POI:

$$\vec{T}' = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}\right)\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{1/2}\right]$$

$$\vec{T}' = \left(-a\cos t\,\vec{i} - b\sin t\,\vec{j}\right)\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{-1/2} + \left(-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\cancel{2}a^2\sin t\cos t - \cancel{2}b^2\cos t\sin t\right)$$

SEGUE DI QUI:

$$\vec{T}' = \left[\left(-a\cos t\,\vec{i} - b\sin t\,\vec{j}\right)\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{-1/2} - \left(-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j}\right)\left(a^2\sin t\cos t - b^2\cos t\sin t\right)\right] \cdot \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{-3/2}$$

$$\vec{T}' = \frac{\left(-a\cos t\,\vec{i} - b\sin t\,\vec{j}\right)\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right) + \left(a\sin t\,\vec{i} - b\cos t\,\vec{j}\right)\left(a^2\sin t\cos t - b^2\cos t\sin t\right)}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

$$\vec{T}' = \frac{\left[\cancel{-a^3\cos t\sin^2 t\,\vec{i}} - ab^2\cos^3 t\,\vec{i} - a^2 b\sin^3 t\,\vec{j} - \cancel{b^3\sin t\cos^2 t\,\vec{j}}\right] + \left[\cancel{a^3\sin^2 t\cos t\,\vec{i}} - ab^2\cos t\sin^2 t\,\vec{i} + \right.}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\left. - a^2 b\sin t\cos^2 t\,\vec{j} + \cancel{b^3\cos^2 t\sin t\,\vec{j}}\right]}{}$$

$$\vec{T}' = \frac{-ab^2\cos t\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}\vec{i} - a^2 b\sin t\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}\vec{j}}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

$$\vec{T}' = \frac{-ab\left(b\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}\right)}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

SI HA POI

$$|\vec{T}'| = \sqrt{\frac{(ab)^2\left[(b\cos t)^2 + (a\sin t)^2\right]}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^3}} = \sqrt{\frac{a^2b^2\,\cancel{\left[a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right]}}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3-2}}}$$

DUNQUE

$$|\vec{T}'| = \frac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

IL VERSORE NORMALE $\vec{N}$ È ALLORA

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} = \frac{-\cancel{ab}\left(b\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}\right)}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}\;\frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{2/2}}{\cancel{ab}} = -\frac{\left(b\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}\right)}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{1/2}}$$

SI OSSERVA PERÒ CHE $\vec{N}$ È DIRETTO IN OGNI PUNTO VERSO IL CENTRO DI CURVATURA, CIOÈ VERSO L'INTERNO:

$$\vec{N}\Big|_{t=0} = -\vec{i} \;;\quad \vec{N}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\vec{j} \;;\quad \vec{N}\Big|_{t=\pi} = +\vec{i} \;;\quad \vec{N}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = +\vec{j}$$

LA NORMALE "USCENTE" (DI MODULO UNITARIO) È ALLORA $\vec{n} = -\vec{N}$.

PERTANTO

$$\vec{n} = \frac{b\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}} = \underbrace{\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}}_{\alpha_x}\,\vec{i} + \underbrace{\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}}_{\alpha_y}\,\vec{j}$$

LE COMPONENTI α_x, α_y SONO QUINDI:

$$\alpha_x = \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$\alpha_y = \frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \qquad [9]$$

MEDIANTE LE [8], CHE FORNISCONO $\cos t = \frac{x}{a}$; $\sin t = \frac{y}{b}$ SI POSSONO TRASFORMARE LE [9] ELIMINANDO IL PARAMETRO t:

$$\alpha_x = \frac{b\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \;;\qquad \alpha_y = \frac{a\frac{y}{b}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

DALLE [6] E [7'] SEGUE:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial\omega}{\partial y}\alpha_y = y\alpha_x - x\alpha_y$$

$$ky\frac{\frac{bx}{a}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + kx\frac{a\frac{y}{b}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = y\frac{\frac{bx}{a}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} - x\frac{\frac{ay}{b}}{\sqrt{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \qquad [10]$$

SI HA POI:

$$\frac{bxy}{a}(k-1) + \frac{axy}{b}(k+1) = 0 \;\Rightarrow\; k\left[\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right] + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 0$$

$$k\,\frac{b^2+a^2}{\cancel{ab}} + \frac{a^2-b^2}{\cancel{ab}} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{k = \frac{-(a^2-b^2)}{a^2+b^2}} \qquad [10']$$

SI HA COSÌ CHE

$$\omega = \frac{-(a^2-b^2)}{a^2+b^2} xy \qquad [11]$$

NE SEGUE

$$\tau_{zx} = G\Theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y\right) = G\Theta\left(-\frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2} y - y\right) \Rightarrow \tau_{zx} = G\Theta\left(\frac{-\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-a^2-\cancel{b^2}}{a^2+b^2}\right)y$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{zx} = -2G\Theta \frac{a^2}{a^2+b^2} y} \qquad [12]$$

$$\tau_{zy} = G\Theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x\right) = G\Theta\left(-\frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2} x + x\right) \Rightarrow \tau_{zy} = G\Theta\left(\frac{-\cancel{a^2}+b^2+\cancel{a^2}+b^2}{a^2+b^2}\right)x$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{zy} = 2G\Theta \frac{b^2}{a^2+b^2} x} \qquad [13]$$

SI HA COSÌ CHE τ_{zx} E τ_{zy} VARIANO LINEARMENTE CON $Y(o\,X)$ E SI ANNULLANO IN G.
LA TENSIONE TANGENZIALE TOTALE, $\tau_{zn} = |\vec{\tau}_z| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$
OVVERO

$$\tau_{zn} = \frac{2G\Theta}{a^2+b^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}$$

SI VUOLE DETERMINARE DOVE τ_{zn} RAGGIUNGE IL VALORE MASSIMO E MINIMO SUL CONTORNO ∂S_z; ALLO SCOPO SI COSTRUISCE LA FUNZIONE

$$\bar{\tau}_{zn} = \frac{2G\Theta}{a^2+b^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2} + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \qquad [14]$$

PER POTERE DETERMINARE MASSIMI E MINIMI VINCOLATI (λ È MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE)

SI TROVA:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\tau}_{zn}}{\partial x} = 0 & \dfrac{2G\Theta}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{-1/2}\cdot\cancel{2}b^4x + 2\dfrac{\lambda x}{a^2} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{\tau}_{zn}}{\partial y} = 0 & \dfrac{2G\Theta}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)^{-1/2}\cdot\cancel{2}a^4y + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{\tau}_{zn}}{\partial \lambda} = 0 & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 = 0 \end{cases} \qquad [15]$$

IL SISTEMA FORNISCE:

$$\begin{cases} 2x\left\{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{b^4 G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}\right\}=0 \\ 2y\left\{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{a^4 G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}\right\}=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \end{cases} \qquad [15']$$

SE $x\neq 0$ E $y\neq 0$ LA PRIMA DELLE [15'] FORNISCE $\lambda=\dfrac{-a^2b^4G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}$ CHE SOSTITUITA NELLA SECONDA DÀ LUOGO, CON QUALCHE SEMPLIFICAZIONE, ALLA CONDIZIONE $a^4-a^2b^2=0 \Rightarrow a^2-b^2=0$, IMPOSSIBILE.

DEVE PERTANTO ESSERE $x=0$ O $y=0$.

SE $x=0$ $\quad \dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad y=\pm b \quad \lambda=\dfrac{-a^4b^2G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{a^4b^2}}$

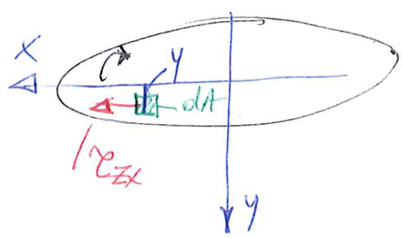
SE $y=0$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2}=1 \quad x=\pm a \quad \lambda=\dfrac{-b^4a^2G\Theta}{(a^2+b^2)\sqrt{b^4a^2}}$

E QUINDI I MASSIMI/MINIMI SI TROVANO IN CORRISPONDENZA DEI PUNTI $A=(a,0)$; $A'=(-a,0)$; $B=(0,b)$; $B'=(0,-b)$ IN CUI I SEMIASSI INTERSECANO IL CONTORNO DELL'ELLISSE.

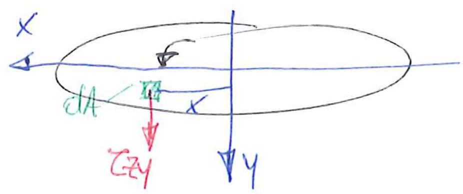
IL CALCOLO DELLE DERIVATE SECONDE PERMETTONO DI CONCLUDERE CHE I PUNTI A E A' CORRISPONDONO AI MINIMI DI τ_{zn}, MENTRE I PUNTI B E B' CORRISPONDONO AI MASSIMI.

SI PASSA A VALUTARE $\bar{M}_z$. SI RICONOSCE CHE

$$\bar{M}_z=\int_A -\tau_{zx}\,y\,dA+\int_A \tau_{zy}\,x\,dA$$



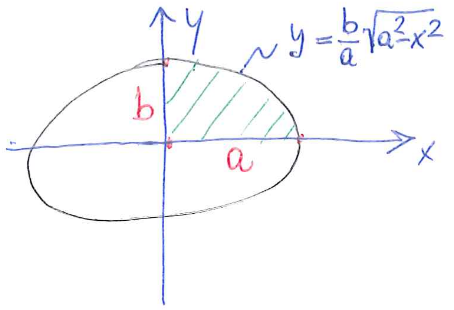
$$\bar{M}_z=\int_A 2G\Theta\frac{a^2}{a^2+b^2}y^2dA+\int_A 2G\Theta\frac{b^2}{a^2+b^2}x^2dA$$



$$\bar{M}_z=2G\Theta\left\{\frac{a^2}{a^2+b}\underbrace{\int_A y^2dA}_{J_x}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\underbrace{\int_A x^2dA}_{J_y}\right\}$$

$$\bar{M}_z=2G\Theta\left\{\frac{a^2}{a^2+b^2}J_x+\frac{b^2}{a^2+b^2}J_y\right\}=G\Theta J_t \quad [16], \quad J_t=2\left\{\frac{a^2}{a^2+b^2}J_x+\frac{b^2}{a^2+b^2}J_y\right\}$$

PER VALUTARE I MOMENTI D'INERZIA J_x, J_y SI SFRUTTA LA PRESENZA DI 2 ASSI DI SIMMETRIA, LIMITANDOSI A CONSIDERARE IL CONTRIBUTO DELL'AREA A TRATTEGGIO E MOLTIPLICANDO IL RISULTATO PER 4.



SI OSSERVA POI CHE L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ PUÒ ESSERE ESPLICITATA QUANDO SI OPERA NEL PRIMO QUADRANTE, OTTENENDO

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

SI HA QUINDI:

$$J_x=\int_A y^2 dA = 4\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy$$

$$J_x=4\int_0^a dx\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = 4\int_0 \frac{b^3}{3a^3}(a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{4b^3}{3a^3}\int_0 (a^2-x^2)^{3/2}dx$$

ORA $\int_0^a (a^2-x^2)^{3/2}dx = \left[\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4}+\frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{3}{8}a^4\underbrace{\arcsin(1)}_{=\frac{\pi}{2}}$

$$J_x=\frac{\cancel{4}b^3}{\cancel{3}\cancel{a^3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_2}a^{\cancel{4}}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{J_x=\frac{\pi a b^3}{4}}$$

ANALOGAMENTE

$$J_y=\int_A x^2 dA = 4\int_0^a x^2dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

$$J_y=4\int_0^a x^2\left[y\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ORA $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \left[-\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4}+\frac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{a^4}{8}\underbrace{\arcsin(1)}_{=\frac{\pi}{2}}$

$$J_y=\frac{\cancel{4}b}{\cancel{a}}\frac{a^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{8}_2}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{J_y=\frac{\pi a^3 b}{4}}$$

$$J_G=\int_A (x^2+y^2)\,dA = J_x+J_y = \frac{\pi}{4}ab(b^2+a^2) = \frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$$

$$J_T=2\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}\frac{\pi a b^3}{4}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{\pi a^3 b}{4}\right]=2\left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\frac{\pi a b}{4}+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\frac{\pi a b}{4}\right]=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\frac{\pi a b}{4}=\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$$

DUNQUE $\boxed{J_t = \dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}}$ [17]

È UTILE VERIFICARE SE $J_G > J_t$ O VICEVERSA. A QUESTO SCOPO SI PUÒ SCRIVERE

$$J_t = \frac{\pi}{4} ab \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}, \quad \text{MENTRE} \quad J_G = \frac{\pi}{4} ab (a^2+b^2).$$

SE $J_G > J_t \Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{4} ab} (a^2+b^2) > \cancel{\frac{\pi}{4} ab} \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2 > \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

NE SEGUE, POICHÉ $a^2+b^2>0$:

$$(a^2+b^2)^2 > 4a^2b^2 \Rightarrow a^4+b^4+2a^2b^2 > 4a^2b^2 \Rightarrow a^4+b^4+\underbrace{2a^2b^2-4a^2b^2}_{-2a^2b^2}>0$$

MA $a^4+b^4-2a^2b^2 = (a^2-b^2)^2>0$, SEMPRE VERIFICATO.

PERTANTO $J_t < J_G$: IL FATTO CHE LA SEZIONE SI INGOBBI RIDUCE LA RIGIDEZZA TORSIONALE.

DALLA [16] E DALLA [17] SEGUE INFINE

$$\bar{M}_z = G\,\Theta\,J_t$$

OVVERO L'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE VALE

$$\Theta = \frac{\bar{M}_z}{G J_t} = \frac{\bar{M}_z}{G\pi \frac{a^3b^3}{a^2+b^2}} \Rightarrow \boxed{\Theta = \frac{\bar{M}_z (a^2+b^2)}{G\pi a^3 b^3}} \quad [18]$$

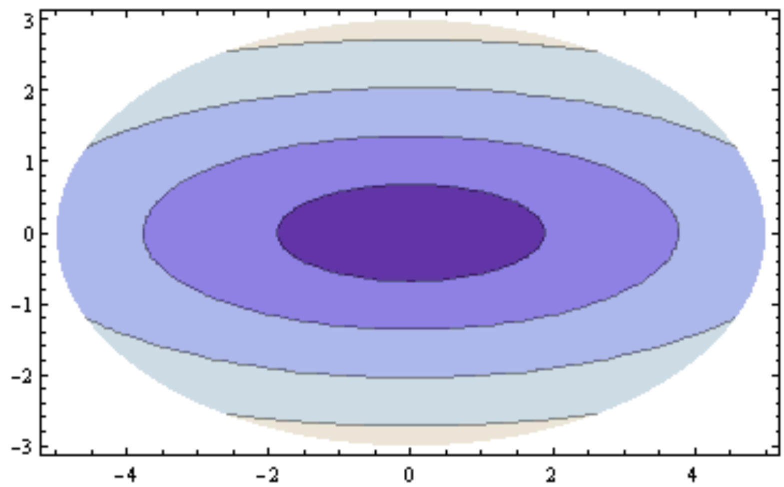
SULLA BASE DEL VALORE [18] SI OTTIENE INFINE

$$\tau_{zx} = -\frac{2\bar{M}_z a^2}{\pi a^3 b^3} y \Rightarrow T_x = \int_A \tau_{zx} dA = -\frac{2\bar{M}_z a^2}{\pi a^3 b^3} \overbrace{\int_A y\, dA}^{S_x=0} = 0$$

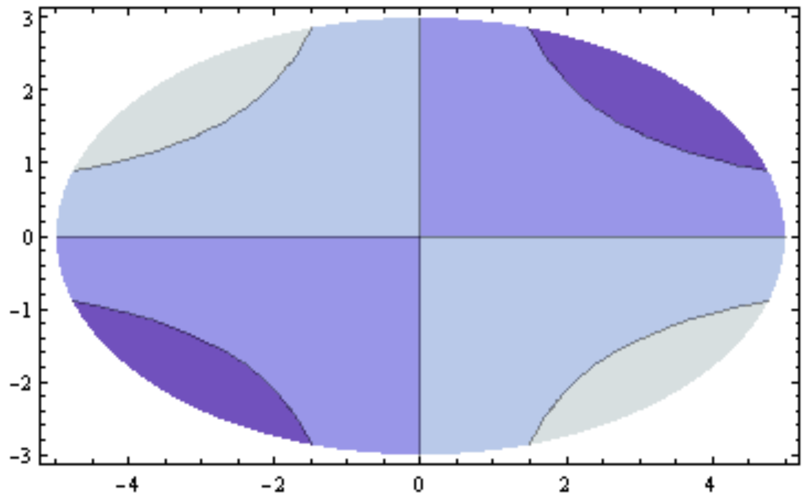
$$\tau_{zy} = +\frac{2\bar{M}_z b^2}{\pi a^3 b^3} x \Rightarrow T_y = \int_A \tau_{zy} dA = \frac{2\bar{M}_z b^2}{\pi a^3 b^3} \underbrace{\int_A x\, dA}_{S_y=0} = 0$$

$$w = \frac{\bar{M}_z \cancel{(a^2+b^2)}}{G\pi a^3 b^3} \cdot \frac{-(a^2-b^2)}{\cancel{(a^2+b^2)}} xy \Rightarrow w = -\frac{\bar{M}_z}{G\pi} \frac{a^2-b^2}{a^3b^3} xy$$

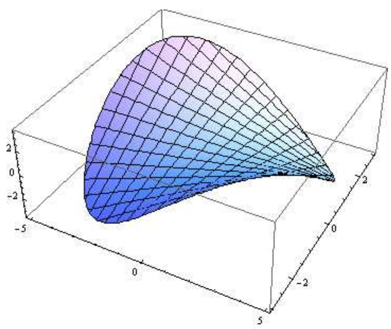
SI OSSERVI CHE $\int_A w\, dA = -\frac{\bar{M}_z}{G\pi} \frac{a^2-b^2}{a^3b^3} \underbrace{\int_A xy\, dA}_{J_{xy}} = 0$ IN QUANTO X E Y SONO ASSI PRINCIPALI D'INERZIA; IL VALORE MEDIO DI w SULLA SEZIONE È QUINDI NULLO.



Curve di livello della funzione τ_{zn} per una sezione ellittica con a = 5, b = 3.



Curve di livello della funzione di ingobbamento ω(*x, y*) per una sezione ellittica con a = 5, b = 3.



Funzione di ingobbamento ω(*x, y*) per una sezione ellittica con a = 5, b = 3.

NOTA 1. SI OSSERVI CHE RISULTA SEMPRE $J_G \geq J_t > 0$

INFATTI LA PRIMA CONDIZIONE $(J_t \leq J_G)$ SI DIMOSTRA AGEVOLMENTE COSÌ:

$$J_t = J_G + \int_A \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}x - \frac{\partial \omega}{\partial x}y\right) dA \qquad [a]$$

NELL'ESPRESSIONE [a] SI PUÒ UTILIZZARE QUESTA IDENTITÀ:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = \frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot x + \omega\cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial x}{\partial y}}}_{=0} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}(\omega y) = \frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot y + \omega\cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}}}_{=0}$$

SICCHÉ SI PUÒ SCRIVERE

$$J_t = J_G + \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega y)\right] dA = J_G - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega y) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega x)\right] dA \qquad [a']$$

A QUESTO PUNTO SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN (TEOREMA DELLA DIVERGENZA), OTTENENDO:

$$\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega y) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega x)\right] dA = \int_{\partial A} (\omega y\, \alpha_x - \omega x\, \alpha_y)\, ds \qquad [b]$$

DOVE ∂A È LA FRONTIERA DELLA SEZIONE TRASVERSALE A (CHE APPARTIENE AL "MANTELLO" S), E α_x, α_y LE COMPONENTI DELLA NORMALE USCENTE $\vec{n}$.

SI OTTIENE POI:

$$\int_{\partial A} \omega (y\alpha_x - x\alpha_y)\, ds = \int_{\partial A} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right) ds \qquad [c]$$

IN QUANTO, PER LA PRECEDENTE EQ. [6] SI HA:

$$y\alpha_x - x\alpha_y = \frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dn} = \frac{d\omega}{dn}$$

SE ORA SI APPLICA NUOVAMENTE IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA, SI OTTIENE:

$$\int_{\partial A} \omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right) ds = \int_{\partial A}\left(\omega\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \omega\frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right) ds = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right] dA$$

OVVERO, SVILUPPANDO

$$\int_{\partial A} \omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial \omega}{\partial y}\alpha_y\right) ds = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \omega \overbrace{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)}^{\nabla^2 \omega}\right] dA = \int_A \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \omega \overbrace{\nabla^2 \omega}^{0}\right] dA \qquad [d]$$

SI OTTIENE COSÌ PER LA [d], TENUTO CONTO CHE ω È FUNZIONE ARMONICA, CIOÈ TALE CHE $\nabla^2\omega = 0$ IN A:

4 ter

$$J_t = J_G - \int_A \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dA \qquad [e]$$

ORA NELL'INTEGRALE COMPAIONO QUANTITÀ POSITIVE POICHÉ $\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 > 0$; $\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 > 0$ E QUINDI PER LA [e]

$$J_t \leq J_G$$

DOVE IL SEGNO DI EGUALE VALE SOLO NEL CASO CHE $\frac{\partial\omega}{\partial x} \equiv 0$ E $\frac{\partial\omega}{\partial y} \equiv 0$, CIOÈ QUANDO LA FUNZIONE DI INGOBBAMENTO È COSTANTE, NEL QUALCASO $J_t \equiv J_G$.

PER VERIFICARE CHE $J_t > 0$ SI RISCRIVE LA [a] NELLA FORMA:

$$J_t = \int_A \left[x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dA \qquad [f]$$

OTTENUTA SOMMANDO ALLA [a] IL TERMINE $\int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y\right) dA + \int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 dA = 0$

LA [f] DIVIENE ALLORA:

$$J_t = \int_A \left[\left(x + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(-y + \frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right] dA > 0$$

IN QUANTO GLI INTEGRANDI SONO QUANTITÀ POSITIVE.

QUESTE NON POSSONO MAI ANNULLARSI COMPLETAMENTE: SE INFATTI FOSSE

$\frac{\partial\omega}{\partial y} = -x$ E $\frac{\partial\omega}{\partial x} = y$ SI AVREBBE CHE LE DERIVATE SECONDE MISTE

NON SODDISFEREBBERO IL TEOREMA DI SCHWARZ:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x \partial y} = -1 \neq \frac{\partial^2\omega}{\partial y \partial x} = +1$$

E ω NON POTREBBE ESSERE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE,

$$\nabla^2\omega = 0.$$

$\square$