



Esercitazione di Analisi e Controllo dei Sistemi Multivariabili – n°8

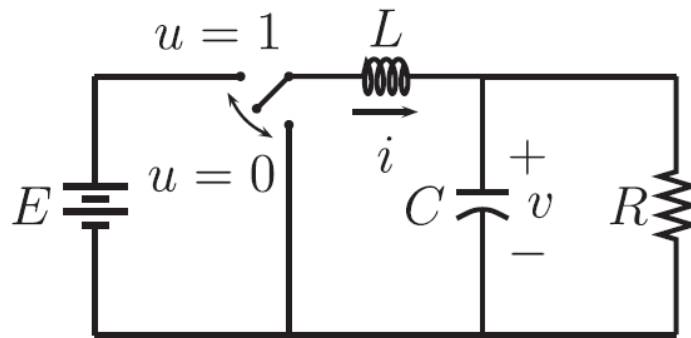
Si consideri il Buck-Converter DC/DC in figura, i cui parametri caratteristici sono i seguenti:

- $L = 20 \text{ mH}$
- $C = 20 \text{ } \mu\text{F}$
- $R = 30 \text{ } \Omega$
- $E = 15 \text{ V}$

Si definisca il modello dinamico del convertitore tenendo conto della legge di controllo discontinua $u(t) \in \{0, 1\}$, rappresentante la posizione dell'interruttore (0 = corto-circuito; 1 = circuito alimentato).

Si definisca la legge di controllo tale che la tensione al carico R venga stabilizzata al valore $V_0 = 10 \text{ V}$.

Si ricorda che la condizione di realizzabilità del convertitore è $V_0 \leq E$



Bozza della soluzione dell'esercitazione n° 8 di Analisi e controllo dei sistemi multivariabili

Applicando il bilancio delle correnti al nodo e delle tensioni nella maglia si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned} E u &= L \frac{di}{dt} + v \\ i &= C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \end{aligned} \quad \text{con } u \in \{0; 1\}$$

Indicando le variabili di stato $x_1 = v$; $x_2 = i$ si ottiene la dinamica in termini di variabili di stato

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix} u \quad u \in \{0; 1\}$$

Introduciamo la variabile errore come $\tilde{x}_1(t) = v(t) - V_0$ da cui si ottiene la dinamica dell'errore di tracking

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1(t) &= \tilde{x}_2(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) &= -\frac{1}{LC} \tilde{x}_1(t) - \frac{1}{RC} \tilde{x}_2(t) - \frac{1}{LC} (V_0 - E u(t)) \\ \tilde{x}_2(t) &= \frac{1}{C} \left(i(t) - \frac{1}{R} v(t) \right) \end{aligned}$$

Si osservi che quando $v(t) = V_0$ anche la corrente è costante: $i(t) = \frac{V_0}{R}$

Il sistema errore è un sistema lineare con ingresso commutante che tale che

$$\begin{aligned} u=0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_1(t) = -V_0 < 0 \\ u=1 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_1(t) = E - V_0 > 0 \end{aligned}$$

quindi un controllo che sia “set valued”, $u \in \{0; 1\}$, può rendere attrattiva la condizione $\tilde{x}_1 = 0$

Per individuare una legge di controllo simmetrica si effettua la trasformazione

$$u = \frac{1}{2}(1 + w), \quad w \in [-1; +1]$$

Si osserva che la variabile w ha grado relativo 1 rispetto alla corrente, per cui il controllo

$$w = -\text{sign} \left(i - \frac{V_0}{R} \right) \text{ imporrà la condizione } \sigma \dot{\sigma} < \eta; \quad \eta \propto (E - V_0), \quad \sigma = i - \frac{V_0}{R}, \text{ tenendo}$$

conto che il valore della tensione ai capi del condensatore non può essere negativa per la congruenza del circuito.

Una volta che si è raggiunta la superficie di scivolamento la dinamica del sistema sarà definita dal sistema del primo ordine $RC \frac{dv}{dt} + v = V_0$ e quindi la tensione al carico tenderà asintoticamente al valore desiderato.

Riferimento bibliografico

Vadim Utkin, Sliding mode control of DC/DC converters, *Journal of the Franklin Institute*, 350 (2013), 2146–2165

Bozza della soluzione dell'esercitazione n° 8 di Analisi e controllo dei sistemi multivariabili

Un simile risultato si può ottenere scegliendo come variabile di sliding $\sigma = \tilde{x}_2 + \alpha \tilde{x}_1$ con una appropriata scelta della costante $\alpha > 0$. In questo caso la dinamica di ordine ridotto del sistema sarà $\tilde{x}_1 + \alpha \tilde{x} - 1 = 0$ che garantisce la convergenza asintotica della tensione al valore desiderato.

Per il calcolo della variabile di sliding si può pensare di utilizzare un differenziatore High-Gain o Sliding-Mode, oppure utilizzare anche la misura della corrente anche se la divisione per la capacità C del condensatore, solitamente piccola, può costituire una causa di mal condizionamento e quindi è opportuno modificare la variabile di sliding per non far comparire tale parametro, ad esempio con $\sigma = C \tilde{x}_2 + \alpha \tilde{x}_1$

Riferimento bibliografico

Siew-Chong Tan, Y. M. Lai, Martin K. H. Cheung, Chi K. Tse, On the Practical Design of a Sliding Mode Voltage Controlled Buck Converter, *IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS*, VOL. 20, NO. 2, 425-437, MARCH 2005.

Poiché la dinamica dell'errore di tracking ha grado relativo 2 rispetto alla variabile di controllo ed è rappresentata da una serie di due integratori perturbata da un termine "matching", si può pensare di applicare un controllore sliding mode del 2° ordine, come il controllore sub-optimal.

$$w = -\text{sign}\left(\tilde{x}_1 - \frac{1}{2} \tilde{x}_{1_M}\right)$$

In questo caso si avrebbe la convergenza in tempo finito alla condizione $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$

Riferimento bibliografico

ENRIC FOSSAS, ANTONI RAS, SECOND ORDER SLIDING MODE CONTROL OF A BUCK CONVERTER, *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 346-347, Las Vegas, Nevada USA, December 2002.