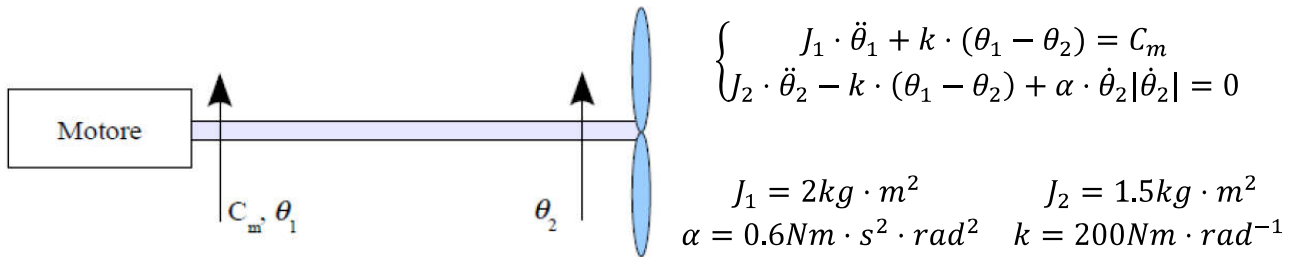


Esercitazione di Analisi e Controllo dei Sistemi Multivariabili - 7

La dinamica del sistema di trasmissione di un'imbarcazione è descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali nelle coordinate lagrangiane θ_1 e θ_2 , rappresentanti gli angoli di rotazione delle estremità dell'asse dell'elica:



1. Scelto come diffeomorfismo per il progetto del sistema di controllo la posizione angolare dell'elica θ_2 e le sue derivate, si progetti un sistema di controllo in retroazione stabile tale da permettere di la linearizzazione della dinamica dello stato.

Per semplicità si ipotizzi tutto lo stato $x = [\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2]' \in \mathfrak{R}^4$ accessibile.

2. Sotto l'ipotesi che:

- la sola posizione angolare del motore θ_1 e le sua derivate successive siano disponibili
- che i fenomeni di torsione nell'albero di trasmissione del sistema soddisfino

$$|C_{el}| = |k(\theta_1 - \theta_2)| \leq 76 \text{ Nm}$$

Si riprogetti il sistema di controllo al fine di garantire le medesime specifiche.

Modificare la legge di controllo per tenere conto di un setpoint esterno.

Definition 3.9 A set \mathbf{G} is an invariant set for a dynamic system if every system trajectory which starts from a point in \mathbf{G} remains in \mathbf{G} for all future time.

Theorem 3.4 (Local Invariant Set Theorem) Consider an autonomous system of the form (3.2), with \mathbf{f} continuous, and let $V(\mathbf{x})$ be a scalar function with continuous first partial derivatives. Assume that

- for some $l > 0$, the region Ω_l defined by $V(\mathbf{x}) < l$ is bounded
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ for all \mathbf{x} in Ω_l

Let \mathbf{R} be the set of all points within Ω_l where $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, and \mathbf{M} be the largest invariant set in \mathbf{R} . Then, every solution $\mathbf{x}(t)$ originating in Ω_l tends to \mathbf{M} as $t \rightarrow \infty$.

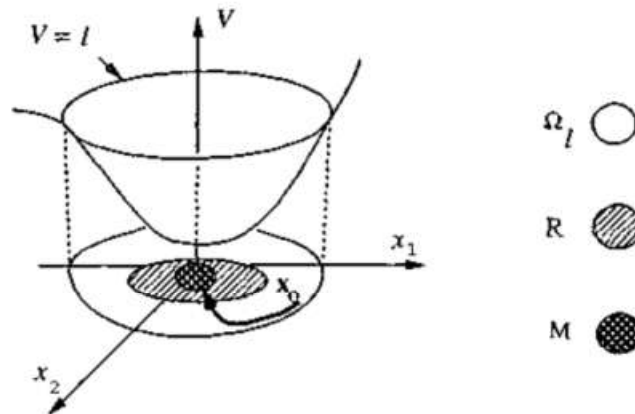


Figure 3.14 : Convergence to the largest invariant set \mathbf{M}

Theorem 3.5 (Global Invariant Set Theorem) Consider the autonomous system (3.2), with \mathbf{f} continuous, and let $V(\mathbf{x})$ be a scalar function with continuous first partial derivatives. Assume that

- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ as $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ over the whole state space

Let \mathbf{R} be the set of all points where $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, and \mathbf{M} be the largest invariant set in \mathbf{R} . Then all solutions globally asymptotically converge to \mathbf{M} as $t \rightarrow \infty$.

Traccia Soluzione

Es1: Ipotizzando tutto lo stato accessibile e scelta come variabile di controllo la posizione angolare dell'elica θ_2 , si riprogetti il sistema di controllo in retroazione tale da garantire le medesime specifiche.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 = -\frac{k}{J_1} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{d}{J_1} \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{k}{J_2} (\theta_1 - \theta_2) - \frac{d}{J_2} \omega_2 \end{array} \right.$$

$$z_1 = \phi_1(z) = x_3$$

$$z_2 = \dot{z}_1 = \dot{x}_3 = x_4 = L_f \phi_1$$

$$z_3 = \dot{z}_2 = \dot{x}_4 = \frac{k}{J_2} (x_1 - x_3) - \frac{d}{J_2} x_4 = L_f^2 \phi_1$$

$$z_4 = \dot{z}_3 = \frac{k}{J_2} x_2 - \frac{k}{J_2} x_4 - 2 \frac{d}{J_2} x_4 \left[\frac{k}{J_2} (x_1 - x_3) - \frac{d}{J_2} x_4 \right] = L_f^3 \phi_1$$

$$\dot{z}_1^{(4)} = L_f^4 \phi_1 + L_g L_f^3 \phi_1 u$$

$$L_f^3 \phi_1 = -\frac{2dk}{J_2^2} |x_4| \cdot x_1 + \frac{k}{J_2} x_2 + \frac{2dk}{J_2^2} |x_4| \cdot x_3 - \frac{k}{J_2} x_4 + \frac{2d^2}{J_2^2} x_4^3$$

$$L_f^4 \phi_1 = -\frac{2dk}{J_2^2} |x_4| (x_2 - x_4) + \frac{k^2}{J_2 J_1} (x_1 - x_3) + \left[\frac{2dk}{J_2^2} (x_3 - x_1) \operatorname{sgn}(x_4) - \frac{k}{J_2} + \frac{6d^2}{J_2^2} x_4^2 \right] \cdot \left[\frac{k}{J_2} (x_1 - x_3) - \frac{d}{J_2} x_4 |x_4| \right]$$

$$L_g L_f^3 \phi_1 = \frac{k}{J_1 J_2}$$

$$u = -\frac{J_1 J_2}{k} \left[L_f^4 \phi_1 + a_0 z_1 + a_1 z_2 + a_2 z_3 + a_3 z_4 \right]$$

$$s^2 + \sum_{i=0}^3 a_i s^i = \prod_{i=1}^4 (s - \lambda_i)$$

Es2

$$y = h(x) = \theta_1$$

$$\begin{cases} \dot{y} = L_f h = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} = L_f^2 h + L_g L_f h = -\frac{k}{J_1} \cdot y + \frac{k}{J_1} \cdot \theta_2 + \frac{1}{J_1} \cdot C_m \end{cases}$$

Posto

$$z_1 = \theta_1, \quad z_2 = \omega_1$$

Attraverso derivazioni successive risulta che la dinamica I/U per il sistema è di ordine 2 e pari a:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{k}{J_1} \cdot z_1 + \frac{k}{J_1} \cdot \theta_2 + \frac{1}{J_1} \cdot C_m - \ddot{r} \end{cases}$$

Poiché il sistema di partenza è del quarto ordine e la dinamica I/U è del secondo ordine, il sistema di controllo presenta una dinamica interna del secondo ordine. Data la semplice struttura del sistema

fisico in analisi, la dinamica interna può essere ricavata per semplice ispezione del modello in VS. Essa risulta pari a:

$$w_1 = \theta_2 \quad , \quad w_2 = \omega_2$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = & w_2 \\ \dot{w}_2 = & -\frac{k}{J_2} \cdot w_1 - \frac{\alpha}{J_2} w_2 |w_2| + \frac{k}{J_2} \cdot z_1 \end{cases}$$

Condizione necessaria per la stabilizzazione del sistema di controllo è che la dinamica autonoma della dinamica interna del sistema di controllo, cioè la sua Zero-Dinamica, sia stabile. La zero dinamica del sistema è:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = & w_2 \\ \dot{w}_2 = & -\frac{k}{J_2} \cdot w_1 - \frac{\alpha}{J_2} w_2 |w_2| \end{cases}$$

La sua stabilità può essere studiata mediante il metodo diretto di Liapunov. Sia

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} w_1^2 + \frac{1}{2} w_2^2 \\ \dot{V} &= w_1 w_2 - \frac{k}{J_2} \cdot w_1 w_2 - \frac{\alpha}{J_2} w_2^2 |w_2| \\ \bar{V} &= \frac{1}{2} \frac{k}{J_2} w_1^2 + \frac{1}{2} w_2^2 \\ \dot{\bar{V}} &= -\frac{\alpha}{J_2} w_2^2 |w_2| \leq 0 \end{aligned}$$

Essendo la derivata della funzione di Liapunov semi-definita negativa possiamo concludere esclusivamente che la zero dinamica è stabile, ma non asintoticamente. Per poter comunque provare ad inferire qualcosa di più sulla stabilità della zero dinamica si può provare a ricorrere al Teorema di La Salle. Dall'analisi di Liapunov risulta che $w_2 \rightarrow 0$, per cui:

$$R = \{w = [w_1; w_2]' : \dot{\bar{V}} = 0\} = \{w_1 \in \mathfrak{R}, w_2 = 0\}$$

Visto che $w_2 \rightarrow 0$ la restante dinamica è

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = & w_2 \\ \dot{w}_2 = & -\frac{k}{J_2} \cdot w_1 \end{cases}$$

Da cui è possibile ricavare il più grande Invariant Set in R risolvendo $\dot{w} = 0, w \in R$

$$M = \{w = [w_1; w_2]' \in R : \dot{w} = 0\} = \{w_1 = 0, w_2 = 0\} \subseteq R$$

Poiché l'insieme M dove per certo il sistema si porterà contiene esclusivamente l'origine, allora la zero dinamica è localmente asintoticamente stabile in un intorno dell'origine. Inoltre poiché

$$\lim_{\|w\| \rightarrow \infty} \bar{V}(w) \rightarrow \infty$$

È possibile concludere che la Zero-Dinamica è globalmente asintoticamente stabile.

Dimostrata la stabilità della zero-dinamica passiamo al progetto del sistema di controllo per il sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{k}{J_1} \cdot z_1 + \frac{k}{J_1} \cdot \theta_2 + \frac{1}{J_1} \cdot C_m - \ddot{r} \end{cases}$$

Poiché la grandezza θ_2 non è nota, non possiamo ricorrere ad una Feedback Linearization pura come ad esempio:

$$C_m = -J_1 \cdot \left[-\frac{k}{J_1} \cdot z_1 + \frac{k}{J_1} \cdot \theta_2 - a_1 \cdot z_1 - a_2 \cdot z_2 \right]$$

dove i coefficienti a_1 ed a_2 verrebbero opportunamente scelti per effettuare l'assegnamento poli-zeri, ma bensì possiamo ricorrere ad una legge mista sliding-mode+feedback linearization

Ad esempio scelta la variabile di sliding come

$$\sigma = z_2 + \frac{1}{\lambda} z_1$$

Risulta

$$\dot{\sigma} = \dot{z}_2 + \frac{1}{\lambda} z_2 = -\frac{k}{J_1} \cdot z_1 + \frac{1}{\lambda} z_2 + \frac{k}{J_1} \cdot \theta_2 + \frac{1}{J_1} \cdot C_m$$

Per cui

$$C_m = J_1 \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} z_1 - K_d \cdot \text{sign} \left(\frac{d}{dt} z_1 + \frac{1}{\lambda} \cdot z_1 \right) \right], K = 40 > \frac{|C_{el}|}{J_1} = 38$$

Da notare che, per garantire una maggiore stabilità si è optato per non cancellare il termine stabilizzante $-\frac{k}{J_1} \cdot z_1$. Volendo si sarebbe inoltre potuto aggiungere un ulteriore termine stabilizzante di tipo proporzionale.

Qualora invece volessimo tenere conto di un eventuale setpoint di posizione costante, la legge di controllo verrebbe modificata come segue:

$$C_m = J_1 \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} z_1 - K_d \cdot \text{sign} \left(\frac{d}{dt} z_1 + \frac{1}{\lambda} \cdot (z_1 - r) \right) \right], K = 40 > \frac{|C_{el}|}{J_1} = 38$$

Qualora invece il setpoint fosse tempo-variante avremo

$$C_m = J_1 \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} (z_1 - r) + \frac{d^2}{dt^2} r - K_d \cdot \text{sign} \left(\frac{d}{dt} (z_1 - r) + \frac{1}{\lambda} \cdot (z_1 - r) \right) \right], K = 40 > \frac{|C_{el}|}{J_1} = 38$$

Authors: Prof. Elio Usai¹, Ing. Alessandro Pilloni¹.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.