



ESERCITAZIONE N.1

ANALISI TRANSITORIA DI UNA MENSOLA

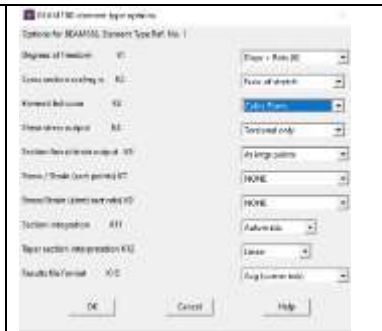
Calcolare la risposta transitoria di una trave prismatica rettilinea e omogenea realizzata in acciaio. Si supponga che l'asse della trave coincida con l'asse di riferimento x . I parametri geometrici e del materiale sono:

| Parametro | Descrizione | Valore | Unità di misura |
|--------------------|-----------------------------------|------------------|----------------------|
| E | Modulo di Young | $210 \cdot 10^9$ | [Pa] |
| ν | Coeff. di Poisson | 0.3 | |
| ρ | Densità | 7830 | [Kg/m ³] |
| L | Lunghezza della trave | 1 | [m] |
| $B = H$ | Dimensioni della sezione quadrata | 0.010 | [m] |
| $\bar{m} = \rho A$ | Massa per unità di lunghezza | 0.783 | [Kg/m] |
| χ | Fattore di taglio | 6/5 | |

Analisi con ANSYS APDL

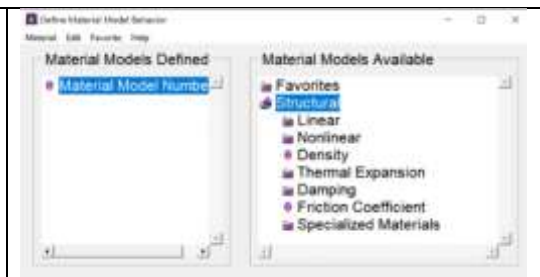
Si utilizzerà l'elemento Beam188 a 2 nodi sviluppato secondo la teoria di Timoshenko che considera l'effetto del taglio.

Il codice inserisce due punti lungo l'asse della trave con i quali costruisce delle funzioni di forma cubiche usando i polinomi di Lagrange. Poiché in ogni nodo si concentrano 6 gradi di libertà (gdl), la matrice di rigidezza elementare conterrebbe in questo modo 6×4 gdl: senonché, prima dell'assemblaggio, la matrice subisce una "condensazione statica" che porta i gdl complessivi a 12, cioè 6 per i due nodi di estremità. Per utilizzare questo tipo di elemento è necessario selezionare l'opzione "cubic", nell'apposita finestra di dialogo.



E' poi necessario stabilire il tipo di materiale. Si sceglierà un materiale dal comportamento lineare e isotropo e si assegneranno i dati nelle unità di misura MKS:

Modulo di Young: $EX = 210E9$
 Coeff.di Poisson: $PRXY = 0.3$
 Densità: $DENS = 7830 [Kg/mc]$



In questa occasione è anche possibile definire il tipo di smorzamento, anche se la soluzione del problema agli autovalori verrà effettuata in assenza di smorzamento. Verranno inseriti i dati per determinare il modello di smorzamento di Rayleigh:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

ANSYS consente di associare ad ogni materiale i propri coefficienti α e β .

Le costanti α e β possono essere ricavate a partire dalla conoscenza sperimentale di due coppie di valori (ω_1, ξ_1) e (ω_2, ξ_2) . Le frequenze ω_1 e ω_2 dovrebbero essere scelte agli estremi del campo entro il quale si ritiene che vibrerà la trave. In questo caso si può porre $\omega_1 = 10 \left[\frac{rad}{s} \right]$ e $\omega_2 = 3000 \left[\frac{rad}{s} \right] \cong 477 [Hz]$. Si

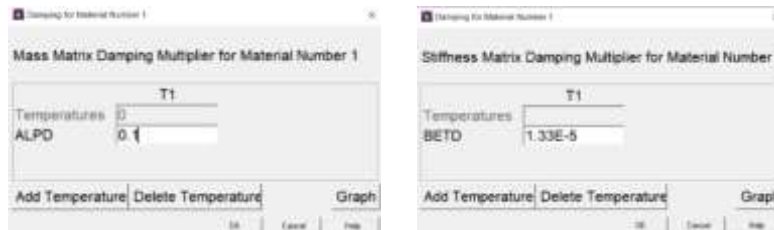


ipotizzerà che $\xi_1 = 0.5\%$ e che $\xi_2 = 2\%$. Per il calcolo delle costanti α e β è necessario risolvere il seguente sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 \\ 1 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\xi_1\omega_1 \\ 2\xi_2\omega_2 \end{Bmatrix}$$

la cui soluzione fornisce:

$$\alpha = 0.1 \quad \beta = 1.33 \cdot 10^{-5}$$



ANSYS consente di inserire anche il così detto “*smorzamento strutturale*” proporzionale agli spostamenti e non alle velocità. In questo caso l’equazione dinamica del moto diventa:

$$[M]\{\ddot{s}\} + ([K] + i[H])\{s\} = \{f\}$$

nella quale la matrice $[H]$ contiene i coefficienti dello smorzamento strutturale.

A questo punto è necessario stabilire le dimensioni della sezione trasversale della trave. La sezione verrà divisa in un numero opportuno di elementi per ottenere i valori corretti dell’area trasversale e dei momenti d’inerzia. Il coefficiente *Shear Corr. ZZ* corrisponde all’inverso del fattore di taglio χ che in questo caso risulta:

$$\chi = \frac{1}{\text{Shear Corr. ZZ}} = 1.188 \cong \frac{6}{5}$$

Si procede quindi con la creazione del modello solido inserendo due keypoint, rispettivamente in posizione (0,0,0) e (1,0,0). Dopo di che, si crea una linea che li unisce.

Utilizzando il meshiatore, si procede con la divisione della linea in elementi. Si è deciso di modellare la trave con 10 elementi, per un totale di 11 nodi e 66 gradi di libertà (gdl). Poiché verranno vincolati 6 gdl, il sistema conterrà 60 gdl. Come è evidente, la struttura è molto snella ($\lambda = 346.4$) quindi le frequenze flessionali saranno molto più basse di quelle assiali.

Poiché la trave è una mensola, nel keypoint n.1 sarà necessario vincolare tutti i gradi di libertà.

Prima di procedere con l’analisi transitoria è consigliabile salvare i dati nel database: **SAVE_DB**.

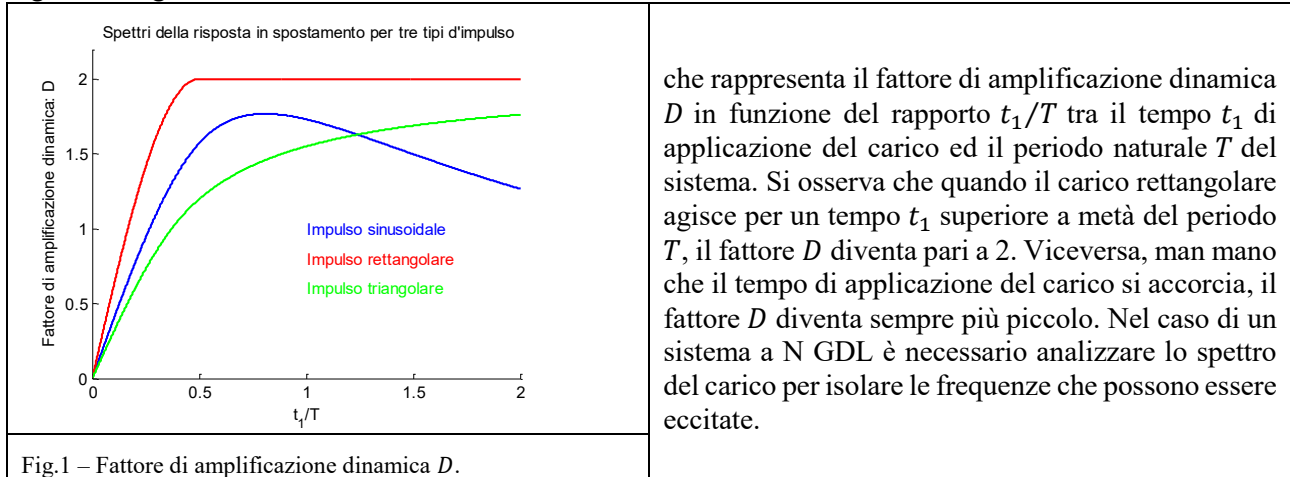
Vincoli nel keypoint n.1



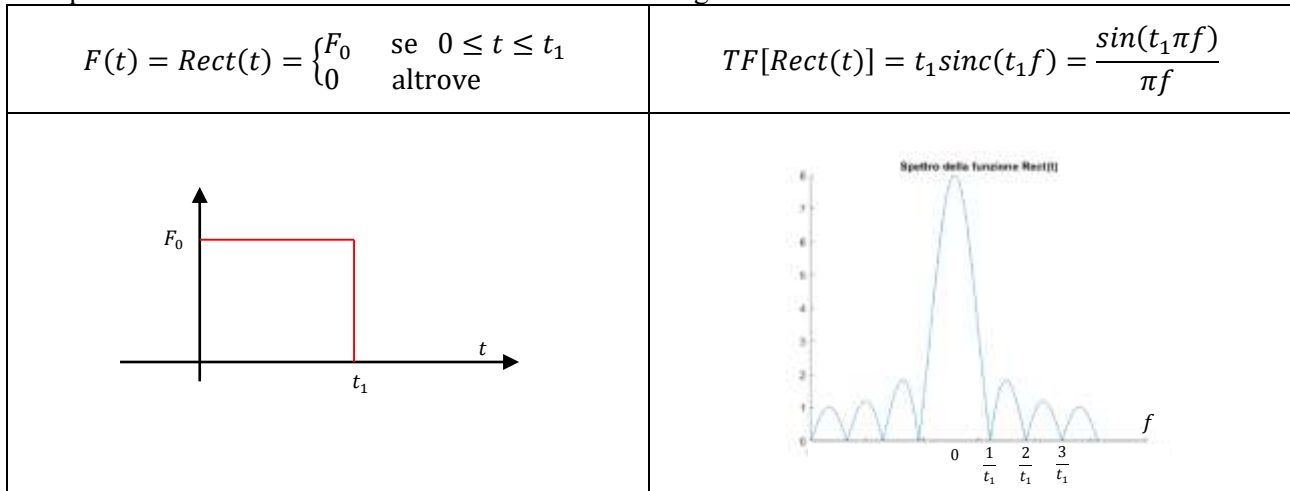
ANALISI TRANSITORIA

Qualche richiamo teorico

Nel 5° capitolo (risposta ad un carico impulsivo) è stata esaminata la risposta di un sistema sotto smorzato ad un solo grado di libertà quando è sottoposto a diverse forme di carico impulsivo. In particolare si è mostrato il seguente diagramma:



L'ampiezza della trasformata di Fourier di un carico rettangolare assume la forma della funzione sinc:



Il primo minimo della funzione *sinc* si trova alla frequenza $f = \frac{1}{t_1}$: **più breve è il tempo di applicazione del carico, più ampio è il campo di frequenze che potranno eccitare la struttura.**

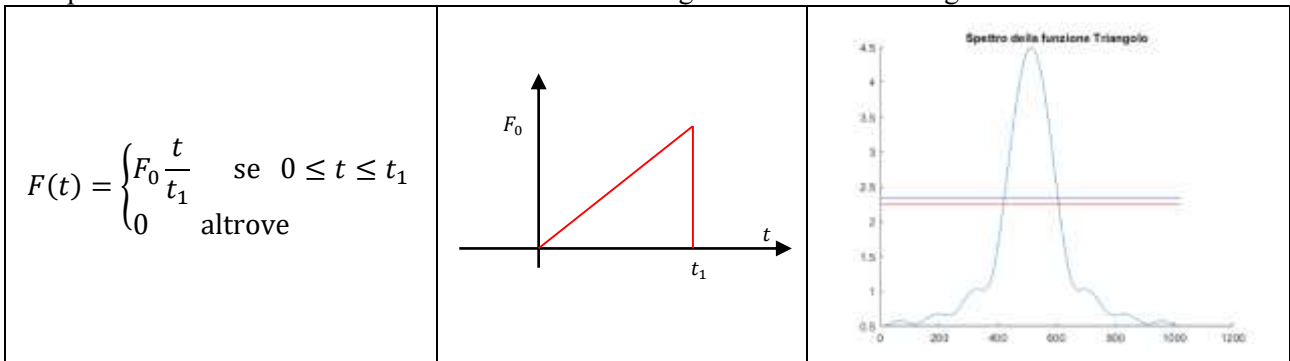
Nel caso in esame le prime tre frequenze naturali del sistema, tutte flessionali, valgono rispettivamente $f_1 \cong 8.4 [Hz]$, $f_2 \cong 52.4 [Hz]$ e $f_3 \cong 147 [Hz]$ alle quali corrispondono i periodi $T_1 \cong 0.119 [s]$, $T_2 \cong 0.019 [s]$ e $T_3 \cong 0.0069 [s]$.

Se il carico agisse per un tempo $t_1 \geq \frac{T_1}{2} = 0.06 [s]$, la frequenza in corrispondenza del primo zero varrebbe circa $17 [Hz]$ quindi le ampiezze del carico associate alle frequenze più alte sarebbero trascurabili e verrebbe eccitata solo la prima forma modale.

Se, viceversa, il carico agisse per un tempo $t_1 \leq \frac{T_2}{2} \cong 0.0095 [s]$, la frequenza in corrispondenza del primo zero sarebbe $105 [Hz]$ quindi bisognerebbe considerare le ampiezze delle prime 2 frequenze naturali. **Questa osservazione è importante** perché per eseguire calcoli precisi si consiglia un passo temporale d'integrazione delle equazioni del moto inferiore a un ventesimo del periodo più breve. In questo caso sarebbe consigliabile che il passo temporale d'integrazione Δt fosse più breve di circa $\frac{T_2}{20} \cong 0.001 [s]$, quindi per esaminare la risposta del sistema durante il primo secondo di carico, sarebbero necessari circa 1000 passi di calcolo!!



L'ampiezza della trasformata di Fourier di un carico triangolare crescente è il seguente:



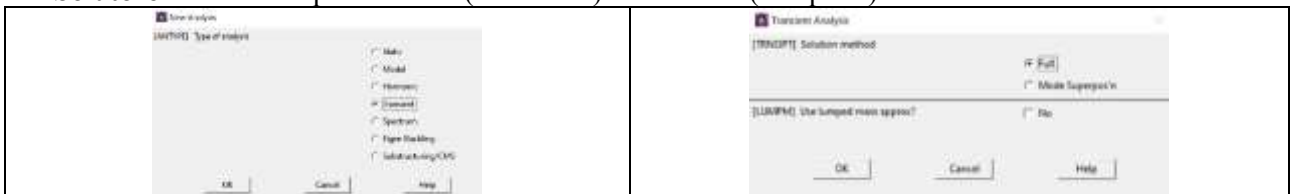
Per stabilire una soglia sulle frequenze più importanti, si possono utilizzare due criteri: quello della mezza potenza (intesa come l'area sottesa dallo spettro) e quello della mezza ampiezza massima. In base al primo criterio, se si indica con P l'area totale dello spettro, la frequenza di taglio f_{HP} si ottiene dalla seguente formula:

$$\frac{P}{2} = \int_{-f_{HP}}^{f_{HP}} Ampl(f)df$$

Se il carico massimo è raggiunto nel tempo $t_1 = 8/1024$ [s], la frequenza di taglio vale circa $f_{HP} = 128$ [Hz], a cui corrisponde la linea orizzontale blu indicata nel diagramma precedente. In base al 2° criterio, la frequenza di taglio è quella corrispondente a metà ampiezza massima: nell'esempio precedente corrisponde alla linea rossa del diagramma e la frequenza di taglio vale circa $f_{HA} = 192$ [Hz]. Se la forza impiega un secondo per raggiungere il valore massimo, la frequenza di taglio vale meno di un Hertz e l'unica frequenza naturale che sarà eccitata sarà la prima: in questo caso il passo temporale Δt può essere posto pari ad un ventesimo della prima frequenza naturale, cioè: $\Delta t = 0.006$ [s].

Esecuzione dell'esercizio: carico "lento"

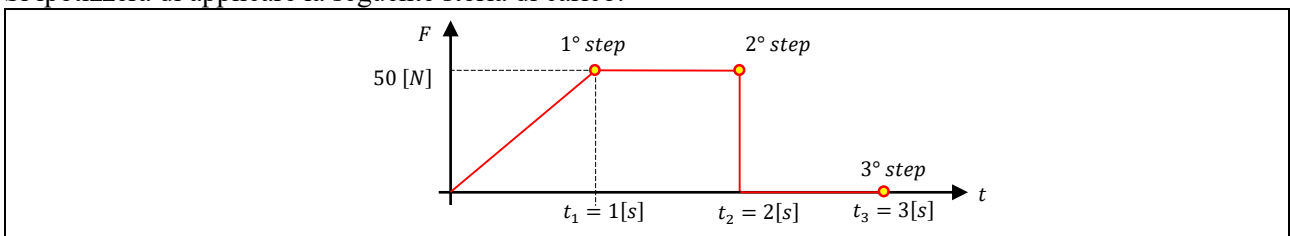
Nel **Solutore** si indica il tipo di analisi (transitoria) e il metodo (completo):



In questa fase è possibile scegliere se usare le matrici di massa di tipo consistente o diagonale.

A questo punto è possibile scegliere le opzioni del calcolo: **Solution > Analysis Type > Sol'n Controls**

Si ipotizzerà di applicare la seguente storia di carico:



Perché i calcoli siano precisi è necessario che il passo d'integrazione sia inferiore ad un ventesimo del periodo della frequenza più alta eccitata dal carico. Poiché il carico viene applicato lentamente (in un secondo) rispetto alla prima frequenza naturale del sistema ($f_1 = 8.365$ [Hz]) al passo temporale si assegnerà il valore $\Delta t = \frac{1}{20f_1} \cong 0.006$ [s].



| | |
|--|---|
| | <p>Il tempo al termine del primo step sarà un secondo;</p> <p>Il programma potrà modificare il passo temporale;</p> <p>$\Delta t = 0.006$; $\Delta t_{min} = 0.001$; $\Delta t_{max} = 0.01$</p> <p>Per limitare la quantità di output, si salveranno solo gli spostamenti nodali, ogni due passi.</p> |
|--|---|

Nel sottomenu **Transient** è possibile selezionare altre opzioni:

| | |
|--|--|
| | <p>Il carico crescerà in modo lineare;</p> <p>non si inserisce lo smorzamento, già fornito al materiale;</p> <p>Si utilizzerà il criterio “a mezzo passo” per aggiustare il passo d’integrazione;</p> <p>Si utilizzerà l’algoritmo di Newmark con i parametri scelti “per difetto”; ANSYS dispone anche di un altro algoritmo (HHT).</p> |
|--|--|

| | |
|--|--|
| <p>Si applica un carico verticale pari a 50 [N] sul keypoint n.2 (sull’apice della mensola).</p> | |
|--|--|

Sotto **Solution > Define Loads > Apply > Initial Condit’n** è possibile indicare le condizioni iniziali (spostamento e velocità), ma in questo esercizio si ipotizzerà che siano nulle.

| | |
|---|--|
| <p>Si salva su file il primo Load step:</p> <p>Solution > Load Step Opts > Write LS file</p> | |
|---|--|

A questo punto è possibile inserire il secondo passo di carico.

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

| | |
|--|--|
| <p>Si mantiene la forza applicata pari a 50 [N] per un altro secondo e si salva il 2° Load Step:</p> | |
|--|--|

Si conclude con l’inserimento del terzo passo di carico.



| | |
|--|--|
| | |
| <p>Si annulla il carico esterno:</p> | |
| <p>Si salva il 3° Load Step:</p> | |
| <p>Eseguendo il comando Solution > Solve > From LS Files è possibile indicare i passi di carico da mandare in esecuzione:</p> | |

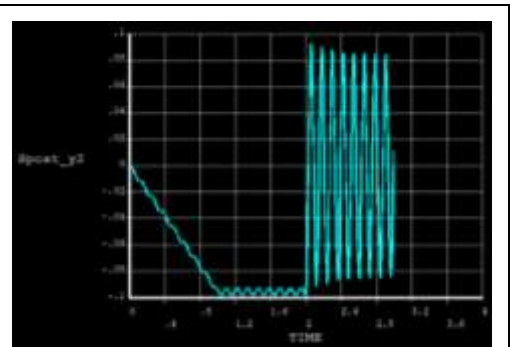
Uscendo dal **solution** ed entrando nel post-processor **General**, si può eseguire il comando: **Results Summary** che stampa una sintesi della storia di carico. Si può osservare che il primo secondo dell'analisi è stato coperto da 168 subset (di cui ne sono stati salvati 84), per coprire il secondo passo sono stati necessari 167 subset (di cui ne sono stati salvati la metà) e per coprire l'ultimo passo sono stati necessari altri 167 subset.

Per analizzare i risultati è possibile utilizzare il post-processor **TimeHist** che consente di visualizzare le risposte del sistema al trascorrere del tempo.

| Name | Element | Node | Result Item | Minimum | Maximum |
|------|---------|------|-----------------------------|------------|-----------|
| TIME | | | Time | 0.011976 | 3 |
| UY_2 | | 2 | Y-Component of displacement | -0.0978051 | 0.0926105 |
| UY_3 | | 7 | Y-Component of displacement | -0.0306323 | 0.0304363 |

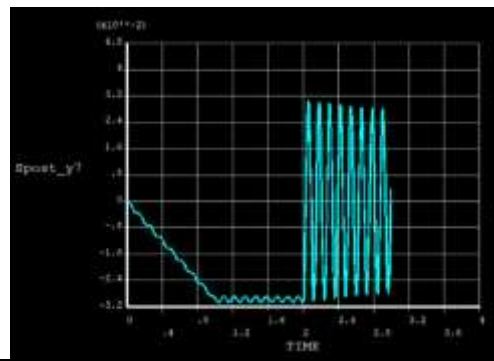
Con la finestra di dialogo qui rappresentata è possibile selezionare un nodo della struttura, estrarne una informazione e diagrammarla in funzione del tempo.

Durante il primo secondo, l'apice della trave si abbassa progressivamente di circa 97.8 [mm] (il valore dello spostamento statico vale 95.2 [mm]);
 poi per circa un secondo rimane quasi ferma.
 Durante il terzo passo, eliminando improvvisamente il carico, l'apice oscilla rapidamente con un piccolo smorzamento.

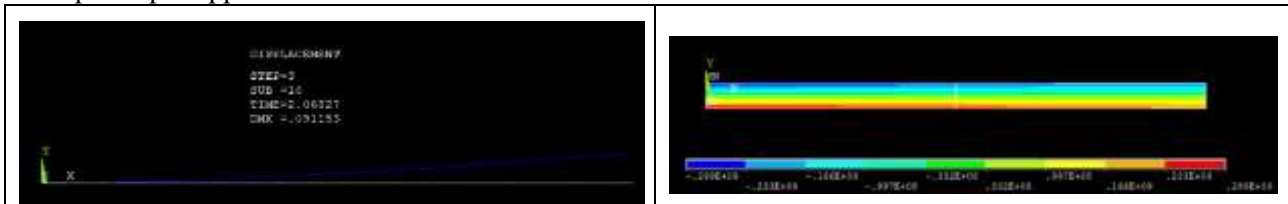




Nel diagramma a lato è rappresentato lo spostamento verticale del nodo n.7 disposto a metà trave in $x = 500 [mm]$.



Entrando nel post-processor **General** è possibile osservare il campo di spostamenti e di sforzi su tutta la trave in un dato istante di tempo. Per esempio, al tempo $t = 2.0683 [s]$ lo spostamento verticale e lo sforzo assiale sono quelli qui rappresentati.



Il file *.log per l'esecuzione dei calcoli è il seguente:

```

/BATCH                ! Per l'esecuzione in background
/PREP7                ! Entra nel pre-processore
ET,1,BEAM188          ! Scegli l'elemento di tipo BEAM188 a 2 nodi
KEYOPT,1,3,3          ! Formulazione "cubic"

                        ! Selezione il tipo di materiale
MP,EX,1,210E9          ! Modulo di Young: Ex=210 [GPa]
MP,PRXY,1,0.3          ! Coeff. di Poisson: PRXY = 0.3
MP,DENS,1,7830          ! Densità: DENS = 7830 [Kg/m^3]
MP,ALPD,1,0.1          ! Coeff. Alfa del modello di smorzamento di Rayleigh legato alla massa
MP,BETD,1,1.33E-5      ! Coeff. Beta del modello di smorzamento di Rayleigh legato alla rigidizza

SECTYPE, 1, BEAM, RECT ! Selezione il tipo di sezione: Rettangolare
SECDATA,0.01,0.01      ! B = H = 0.010 [m]

K, ,,,                ! Crea il keypoint n.1 (0,0,0)
K, ,1                  ! Crea il keypoint n.2 (1,0,0)
LSTR, 1, 2             ! Crea la line ache unisce i keypoint 1 e 2
LESIZE,ALL, , ,10, ,1, ,1, ! Dividi tutte le line in 10 parti
LMESH, 1               ! Esegui la mesh

FINISH                 ! Esci dal preprocessore
SAVE                   ! Salva i dati nel DataBase

/SOLU                  ! Entra nel processore SOLUTION
ANTYPE,TRANS           ! Scegli l'analisi Transitoria
TRNOPT,FULL            ! Scegli il metodo complete (Full)
LUMPM,0                ! Matrice di massa consistente

AUTOTS,ON              ! Attiva la scelta automatica del passo temporale
DELTIM,0.006,0.001,0.01 ! Passo d'integrazione : Δt = 0.006 [s]
TIME,1                 ! Tempo alla fine del primo passo di calcolo
MIDTOL,On,10,0         ! Attiva il criterio del residuo a metà passo
KBC,0                  ! Il carico crescerà in modo lineare: a rampa.
                        ! CONDIZIONI AL CONTORNO
DK,1, ,0, , , ,ALL, , , , ! Vincola il keypoint n.1 (incastro)
    
```



| | |
|---|--|
| FK,2,FY,-50 | ! Applica una forza concentrata sul keypoint n.2 in direzione verticale |
| OUTRES,BASIC,2 | ! Salva i risultati di base: spostamenti, sforzi, etc. ogni due subsets. |
| LSWRITE, 1 | ! Salva su file il primo passo di carico |
| ! Forze, tempo, etc. relative al 2° passo di carico | |
| TIME,2 | ! Tempo alla fine del 2° passo di calcolo |
| KBC,1 | ! Carico costante: a gradino. |
| LSWRITE, 2 | ! Salva su file il secondo passo di carico |
| ! Forze, tempo, etc. relative al 3° passo di carico | |
| TIME,3 | ! Scegli il tempo alla fine del passo di carico |
| FK,2,FY,0 | ! Cancella il carico |
| KBC,1 | ! Scegli il tipo di carico: a gradino |
| LSWRITE,3 | ! Salva su file il terzo passo di carico |
| LSSOLVE,1,3 | ! Inizia la soluzione con diversi passi di carico |
| FINISH | |
| SAVE | ! Salva sul DataBase |
| ! | |
| ! A questo punto si possono esaminare i risultati con i due post-processori | |



Esecuzione dell'esercizio: carico "impulsivo"

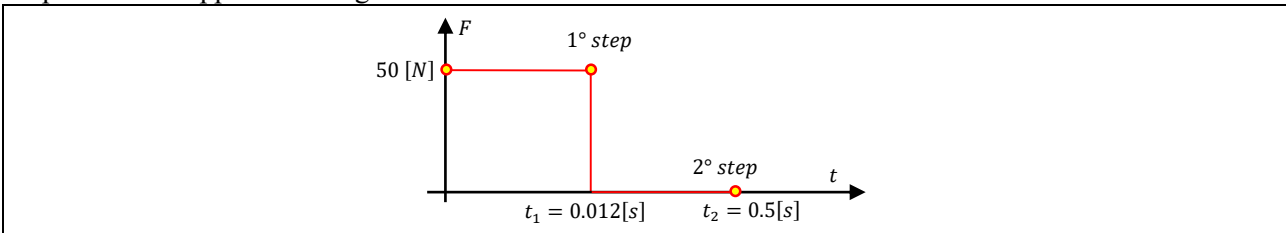
Nel caso di carichi di breve durata può essere utile esaminare l'influenza del passo temporale Δt sui risultati del calcolo. Nel **Solutore** si indica il tipo di analisi (transitoria) e il metodo (completo):



In questa fase è possibile scegliere se usare le matrici di massa di tipo consistente o diagonale.

A questo punto è possibile scegliere le opzioni del calcolo: **Solution > Analysis Type > Sol'n Controls**

Si ipotizzerà di applicare la seguente storia di carico:



Perché i calcoli siano precisi si consiglia di utilizzare un passo d'integrazione Δt inferiore ad un ventesimo del periodo della frequenza più alta eccitata dal carico. Per esaminare l'influenza di Δt , l'esercizio verrà ripetuto tre volte: prima si porrà $\Delta t = 0.012$, poi $\Delta t = 0.004 \cong \frac{1}{5f_2}$ [s] ed infine $\Delta t = 0.001 \cong \frac{1}{20f_2}$ [s].



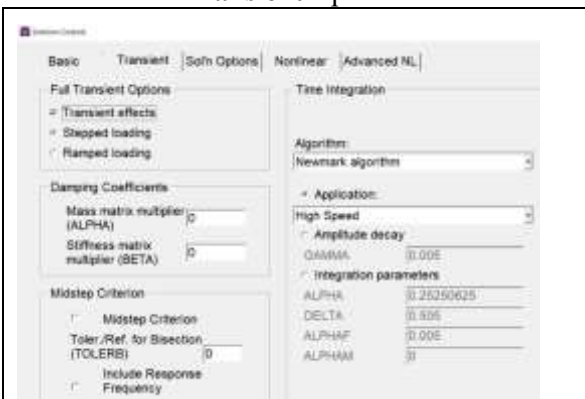
Il tempo al termine del primo step sarà 0.012[s];

Il programma NON potrà modificare il passo temporale;

$\Delta t = 0.012$

Si salveranno i risultati di base per tutti i passi di calcolo.

Nel sottomenu **Transient** è possibile selezionare altre opzioni:



Il carico sarà costante (stepped);

Non si inserisce lo smorzamento, già fornito al materiale;

Si utilizzerà l'algoritmo di Newmark con i parametri scelti "per difetto".

Si applica un carico verticale pari a 50 [N] sul keypoint n.2 (sull'apice della mensola).

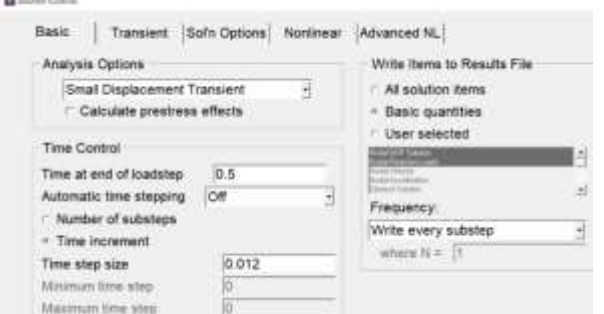




Sotto **Solution > Define Loads > Apply > Initial Condit'n** è possibile indicare le condizioni iniziali (spostamento e velocità), ma in questo esercizio si ipotizzerà che siano nulle.





| | |
|--|--|
| <p>Si salva su file il primo Load step: Solution > Load Step Opts > Write LS file</p> |  |
|--|--|

A questo punto è possibile inserire il secondo passo di carico.

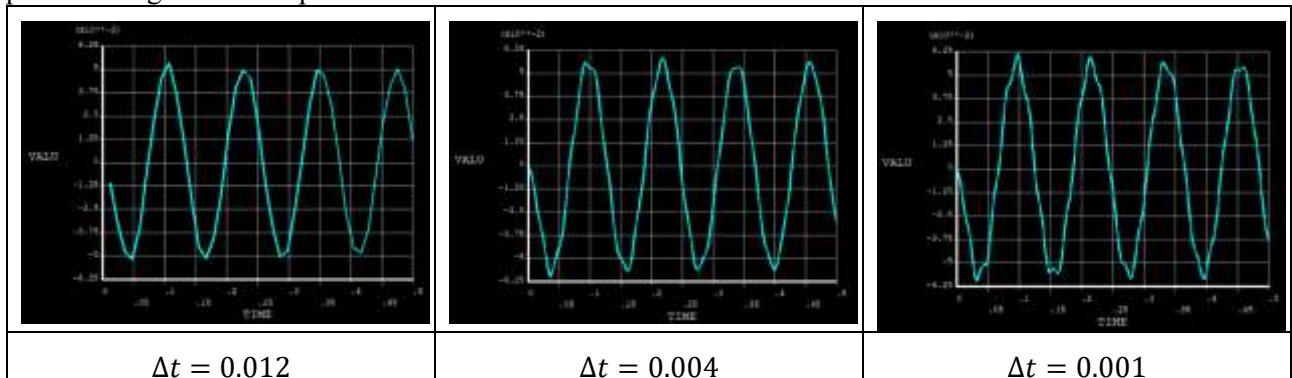
| | |
|---|--|
|  |  |
|---|--|

| | |
|--------------------------------------|--|
| <p>Si annulla il carico esterno:</p> |  |
|--------------------------------------|--|

| | |
|--|--|
| <p>Si salva su file il secondo Load step: Solution > Load Step Opts > Write LS file</p> |  |
|--|--|

| | |
|--|--|
| <p>Eseguendo il comando Solution > Solve > From LS Files è possibile indicare i passi di carico da mandare in esecuzione:</p> |  |
|--|--|

Per analizzare i risultati è possibile utilizzare il post-processore **TimeHist** che consente di visualizzare le risposte del sistema al trascorrere del tempo. Qui di seguito è rappresentata la storia dello spostamento verticale dell'apice della mensola al variare del tempo. Sono messe a confronto le tre soluzioni ottenute variando il passo d'integrazione temporale.



Nel primo caso lo spostamento massimo è di poco superiore a 50 [mm], nel terzo caso si arriva quasi a 62 [mm]. Nel primo caso al tempo $t = 0.5$ [s] lo spostamento vale circa 12.5 [mm], nel terzo vale -37.5 [mm]. Nel terzo caso si osserva l'effetto molto limitato dello smorzamento.



```
/PREP7                ! Entra nel pre-processore
ET,1,BEAM188          ! Scegli l'elemento di tipo BEAM188 a 2 nodi
KEYOPT,1,3,3          ! Formulazione "cubic"
MP,EX,1,210E9         ! Modulo di Young: Ex=210 [GPa]
MP,PRXY,1,0.3         ! Coeff. di Poisson: PRXY = 0.3
MP,DENS,1,7830        ! Densità: DENS = 7830 [Kg/m^3]
MP,ALPD,1,0.1        ! Coeff. Alfa del modello di smorzamento di Rayleigh legato alla massa
MP,BETD,1,1.33E-5    ! Coeff. Beta del modello di smorzamento di Rayleigh legato alla rigidezza
SECTYPE, 1, BEAM, RECT ! Seleziona il tipo di sezione: Rettangolare
SECDATA,0.01,0.01    ! B = H = 0.010 [m]
K, ,,,               ! Crea il keypoint n.1 (0,0,0)
K, ,1                 ! Crea il keypoint n.2 (1,0,0)
LSTR, 1, 2           ! Crea la line ache unisce i keypoint 1 e 2
LESIZE,ALL, , ,10, ,1, , ,1, ! Dividi tutte le line in 10 parti
LMESH, 1             ! Esegui la mesh
FINISH               ! Esci dal preprocessor
SAVE                 ! Salva i dati nel DataBase

/SOLU                ! Entra nel processore SOLUTION
ANTYPE,TRANS         ! Scegli l'analisi Transitoria
TRNOPT,FULL          ! Scegli il metodo complete (Full)
LUMPM,0              ! Matrice di massa consistente
AUTOTS,Off           ! Disattiva la scelta automatica del passo temporale
TIME,0.012           ! Tempo alla fine del primo passo di calcolo
DELTIM,0.001         ! Passo d'integrazione :  $\Delta t = 0.001$  [s]
KBC,1                ! Carico costante: a gradino.
DK,1, ,0, , , ,ALL, , , , ! Vincola il keypoint n.1 (incastro)
FK,2,FY,-50          ! Applica una forza concentrata sul keypoint n.2 in direzione verticale
OUTRES,BASIC,ALL     ! Salva i risultati di base: spostamenti, sforzi, etc.
LSWRITE, 1           ! Salva su file il primo passo di carico

! Forze, tempo, etc. relative al 2° passo di carico
TIME,0.5             ! Scegli il tempo alla fine del passo di carico
FK,2,FY,0            ! Cancella il carico
KBC,1                ! Scegli il tipo di carico: a gradino
LSWRITE,2            ! Salva su file il terzo passo di carico
LSSOLVE,1,2         ! Inizia la soluzione con diversi passi di carico
FINISH
SAVE                 ! Salva sul DataBase
!
! A questo punto si possono esaminare i risultati con i due post-processori
```