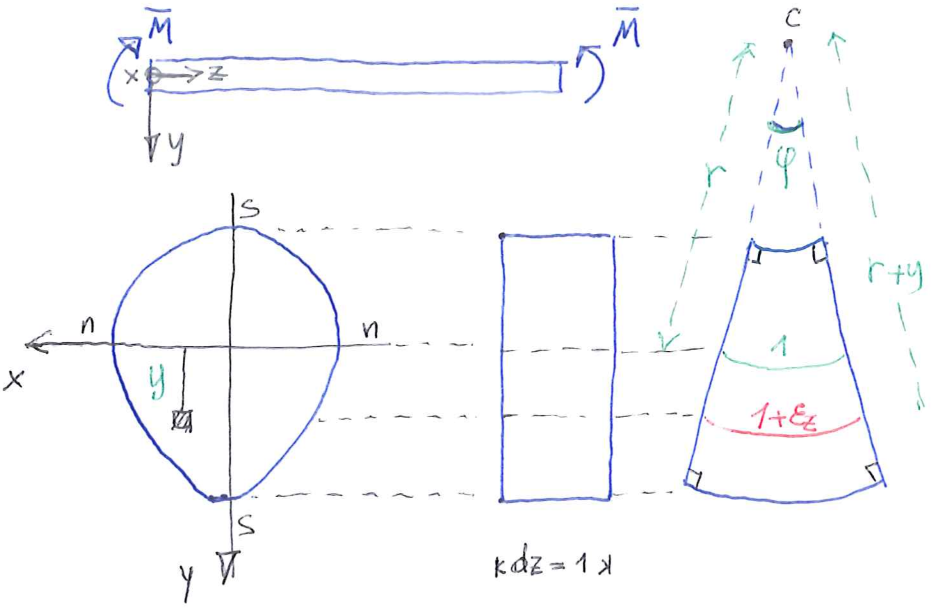
L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA PER IL CALCOLO DI TRAVI ELASTICHE AD ASSE RETTILINEO.

SI RIPRENDONO ALCUNI RISULTATI RELATIVI ALLA FLESSIONE RETTA: SI CONSIDERA UNA TRAVE SOLLECITATA DA 2 COPPIE APPLICATE ALLE ESTREMITÀ IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E SI DETERMINANO LE CARATTERISTICHE DI DEFORMAZIONE.

SIA Z L'ASSE DELLA TRAVE, X E Y GLI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA DELLA SEZIONE, CHE COINCIDONO CON L'ASSE NEUTRO (n-n) E CON L'ASSE DI SOLLECITAZIONE (s-s) NEL CASO CHE $\overline{M} = M_x$



r È IL RAGGIO DI CURVATURA E C È IL CENTRO DI CURVATURA; $\frac{1}{r}$ RAPPRESENTA LA CURVATURA.

LO SFORZO NORMALE È DATO DA $\boxed{\sigma_z = \frac{\overline{M}}{I_x} y}$ [1]

D'ALTRA PARTE SI RICONOSCE CHE

$$\varphi = \frac{1}{r} \qquad \text{E} \qquad \varphi = \frac{1+\varepsilon_z}{r+y}$$

DA CUI SEGUE

$$\frac{1}{r}(r+y) = 1+\varepsilon_z \Rightarrow 1+\frac{y}{r} = 1+\varepsilon_z \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = \frac{y}{r}} \quad [2]$$

PER IL LEGAME COSTITUTIVO INVERSO, ELASTICO, SI HA

$$\boxed{\sigma_z = E\varepsilon_z} \quad [3]$$

DA CUI, SOSTITUENDO LA [2] SI OTTIENE $\boxed{\sigma_z = E\frac{y}{r}}$ [4]

SE ORA SI EGUAGLIANO LE ESPRESSIONI [1] E [4] DI σ_z SI OTTIENE

$$\frac{\overline{M}}{I_x}\cancel{y} = E\frac{\cancel{y}}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = \frac{\overline{M}}{EI_x}} \quad [5]$$

QUESTA RAPPRESENTA L'EQUAZIONE FONDAMENTALE DI ELASTICITÀ DELLA FLESSIONE, GIÀ VISTA NELL'ANALISI DEL 2° CASO DI SOLLECITAZIONE SEMPLICE PER IL SOLIDO DI DE SAINT VENANT.

LA [5], QUI RIPROPOSTA:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_x}{EI_x} \qquad [6]$$

ESPRIME LA CURVATURA DI OGNI PUNTO DELLA <u>LINEA ELASTICA</u>, CIOÈ DELLA <u>DEFORMATA</u> DELL'ASSE GEOMETRICO DELLA TRAVE (COINCIDENTE CON L'ASSE Z CON LA SCELTA DI ASSI ADOTTATA).

È NOTO DALLA TEORIA DELLA FLESSIONE RETTA CHE L'ASSE GEOMETRICO DELLA TRAVE SUBISCE SPOSTAMENTI SECONDO LA DIREZIONE y, CIOÈ L'UNICA COMPONENTE NON NULLA DELLO SPOSTAMENTO È $v = v(z)$.

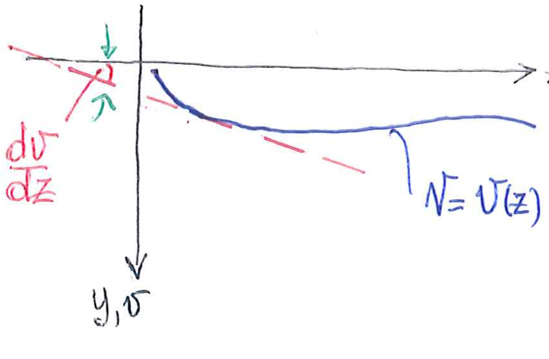
SI PUÒ PERTANTO CONSIDERARE L'ESPRESSIONE DI $v = v(z)$ COME QUELLA DELLA LINEA (GIACENTE NEL PIANO y-z) SECONDO CUI SI ATTEGGIA L'ASSE GEOMETRICO DELLA TRAVE A DEFORMAZIONE AVVENUTA.

DALLA GEOMETRIA DIFFERENZIALE È NOTO CHE LA <u>CURVATURA</u> IN UN PUNTO GENERICO DI UNA LINEA $v = v(z)$ (NEL SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANE z-v) È DATA DA:

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\dfrac{d^2 v(z)}{dz^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dv(z)}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad [7]$$

DOVE IL SEGNO (+/−) DIPENDE DALL'ORIENTAMENTO DEGLI ASSI.

NEL CASO DELLE TRAVI, GENERALMENTE, L'INCLINAZIONE $\frac{dv}{dz}$ DELLA RETTA TANGENTE IN UN PUNTO RISPETTO ALL'ASSE Z È MOLTO PICCOLA, E QUINDI IL SUO QUADRATO SI PUÒ RITENERE TRASCURABILE RISPETTO ALL'UNITÀ.



SI PUÒ QUINDI PORRE, CON BUONA APPROSSIMAZIONE:

$$\frac{1}{r} \simeq \pm \frac{d^2 v}{dz^2} \qquad [8]$$

SOSTITUENDO LA [8] NELLA [6] SI OTTIENE:

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dz^2} = \pm \frac{M_x}{EJ_x}} \qquad [9],$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA NELLA SUA FORMA LINEARIZZATA.

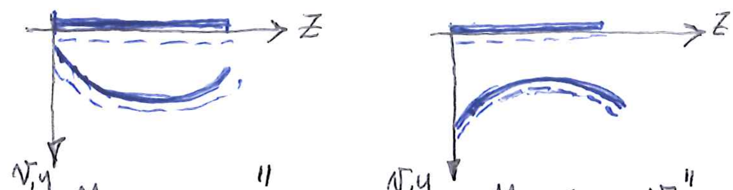
SI TRATTA DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE, IL CUI INTEGRALE GENERALE DIPENDE DA 2 COSTANTI DI INTEGRAZIONE, DETERMINABILI IMPONENDO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO DUE CONDIZIONI AL CONTORNO SU $v(z)$ O SULLA SUA DERIVATA PRIMA, $\frac{dv(z)}{dz} = v'(z)$.

NEL SEGUITO PER PRATICITA' SI DENOTERANNO LE DERIVATE MEDIANTE APICI: $(\,)' = \frac{d}{dz}(\cdot)$; LA [9] DIVIENE ALLORA

$$\boxed{v''(z) = \pm \frac{M_x(z)}{EJ_x}} \qquad [10]$$

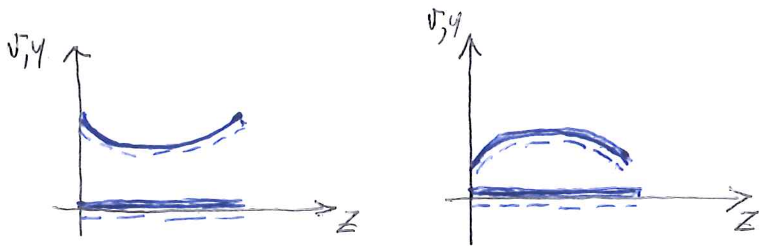
<u>NOTA 1.</u> PER QUANTO RIGUARDA LA SCELTA DEL SEGNO, IN DIPENDENZA DALLA SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, SI POSSONO DARE LE CONDIZIONI SEGUENTI:

i)



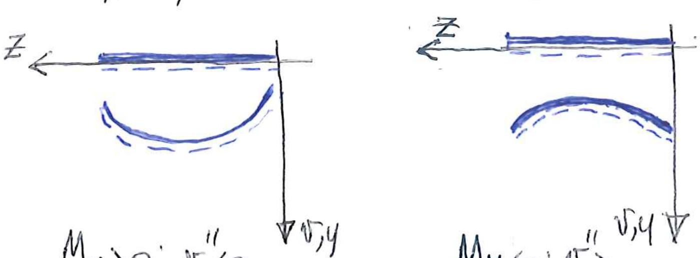
$M_x > 0;\ v'' < 0$ $\qquad$ $M_x < 0;\ v'' > 0$ $\qquad \Rightarrow v'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$

ii)



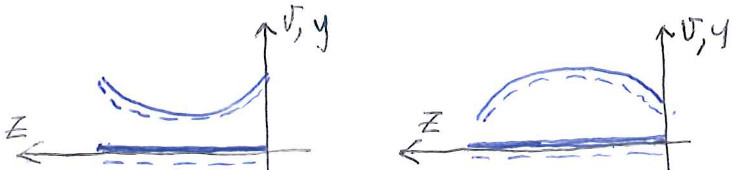
$M_x > 0;\ v'' > 0$ $\qquad$ $M_x < 0;\ v'' < 0$ $\qquad \Rightarrow v'' = +\frac{M_x}{EJ_x}$

iii)



$M_x > 0;\ v'' < 0$ $\qquad$ $M_x < 0;\ v'' > 0$ $\qquad \Rightarrow v'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$

iv)



$M_x > 0;\ v'' > 0$ $\qquad$ $M_x < 0;\ v'' < 0$ $\qquad \Rightarrow v'' = +\frac{M_x}{EJ_x}$

NOTA 2. SE LA RIGIDEZZA FLESSIONALE $EJ_x = \text{const}$, CIOÈ NEL CASO DI TRAVE OMOGENEA E PRISMATICA, ALLORA DERIVANDO LA [10] SI OTTIENE:

$$v'''(z) = \pm \frac{1}{EJ_x} \frac{dM_x}{dz} \qquad [11]$$

SE SI SFRUTTA L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO PER LA TRAVE AD ASSE RETTILINEO (IN ASSENZA DI COPPIE DISTRIBUITE),

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y \qquad [12]$$

E SOSTITUENDO LA [12] NELLA [11] SI RICAVA:

$$v'''(z) = \pm \frac{T_y}{EJ_x} \qquad [13]$$

DERIVANDO ULTERIORMENTE, SI GIUNGE A:

$$v^{IV}(z) = \pm \frac{1}{EJ_x} \frac{dT_y}{dz} \qquad [14]$$

ANCORA, PER L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DELLA TRAVE AD ASSE RETTILINEO, SI HA:

$$\frac{dT_y}{dz} = -q(z) \qquad [15]$$

SICCHÉ, SOSTITUENDO ANCORA LA [15] NELLA [14] SI PERVIENE A:

$$\boxed{v^{IV}(z) = \mp \frac{q(z)}{EJ_x}} \qquad [16]$$

NOTA:
- VALE IL SEGNO ⊖ SE L'ASSE y/v È ORIENTATO VERSO L'ALTO!
- VALE IL SEGNO ⊕ SE L'ASSE y/v È ORIENTATO VERSO IL BASSO!

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA NELLA SUA FORMA AL 4° ORDINE: SI OSSERVI, IN VIRTÙ DELLA [15], L'INVERSIONE DEI SEGNI PER LE DIVERSE SCELTE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

LA [16] È UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 4° ORDINE, IL CUI INTEGRALE GENERALE DIPENDE DA 4 COSTANTI DI INTEGRAZIONE, DETERMINABILI IMPONENDO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO 4 CONDIZIONI AL CONTORNO SU $v(z)$ O SULLE SUE DERIVATE (FINO ALLA TERZA INCLUSA).

AGLI ESTREMI SI CONOSCONO INFATTI, SE SI CONSIDERA L'ASSE y/z ORIENTATO VERSO IL BASSO

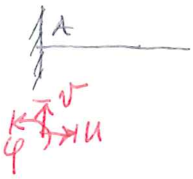
$v(z)$ OPPURE $M_x = -EJ_x\, v''(z)$

$v'(z)$ OPPURE $T_y = -EJ_x\, v'''(z)$.

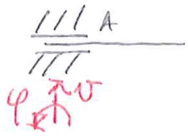
□

NOTA 3. LE CONDIZIONI AL CONTORNO DIPENDONO DAI VINCOLI PRESENTI. LE SI ANALIZZA DISTINGUENDO I VINCOLI A TERRA (ESTERNI) DAI VINCOLI INTERNI E DALLE CONDIZIONI DI CONTINUITA'.

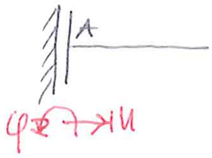
A) VINCOLI A TERRA.

- INCASTRO 

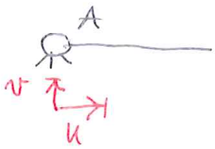
IMPONE IN (A) $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(A)=0 \\ v'(A)=0 \end{cases}$

- MANICOTTO 

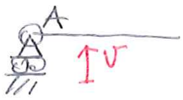
IMPONE IN (A) $\begin{cases} v=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(A)=0 \\ v'(A)=0 \end{cases}$

- PATTINO 

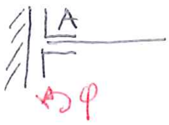
IMPONE IN (A) $\begin{cases} u=0 \\ \varphi=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v'(A)=0$

- CERNIERA 

IMPONE IN (A) $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v(A)=0$

- CARRELLO 

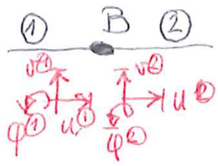
IMPONE IN (A) $\{ v=0$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v(A)=0$

- PATTINO - MANICOTTO 

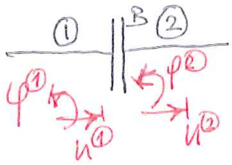
IMPONE IN (A) $\{ \varphi=0$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v'(A)=0$

SI NOTI CHE I GRADI DI VINCOLO AGENTI SECONDO L'ASSE DELLA TRAVE NON DANNO LUOGO A C.C. POICHÉ QUESTE ULTIME INTERESSANO SOLO SPOSTAMENTI PERPENDICOLARI ALL'ASSE E ROTAZIONI. DUNQUE DAL PUNTO DI VISTA DELL'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA UN MANICOTTO RISULTA EQUIVALENTE A UN INCASTRO, E UN CARRELLO (CON PIANO DI SCORRIMENTO PARALLELO ALL'ASSE DELLA TRAVE) A UNA CERNIERA.

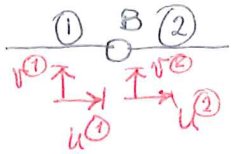
B) VINCOLI INTERNI

- SALDATURA (VINCOLO DI CONTINUITA') 

IMPONE IN (B) $\begin{cases} u^{(1)}=u^{(2)} \\ v^{(1)}=v^{(2)} \\ \varphi^{(1)}=\varphi^{(2)} \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\begin{cases} v(B^-)=v(B^+) \\ v'(B^-)=v'(B^+) \end{cases}$

- PATTINO 

IMPONE IN (B) $\begin{cases} u^{(1)}=u^{(2)} \\ \varphi^{(1)}=\varphi^{(2)} \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v'(B^-)=v'(B^+)$

- CERNIERA 

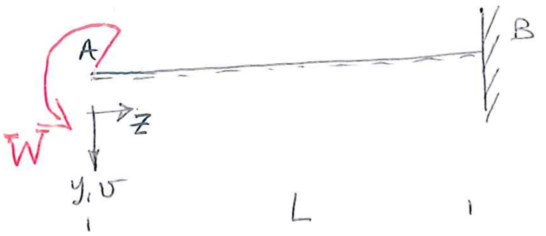
IMPONE IN (B) $\begin{cases} u^{(1)}=u^{(2)} \\ v^{(1)}=v^{(2)} \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.C. $\{ v(B^-)=v(B^+)$

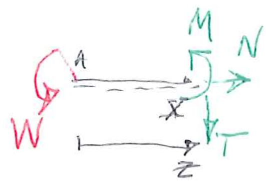
I CASI DI MANICOTTO INTERNO, PATTINO-MANICOTTO INTERNO E CARRELLO INTERNO (CON PIANO DI SCORRIMENTO PARALLELO ALL'ASSE DELLA TRAVE) DANNO LUOGO ALLE STESSE C.C. DELLA SALDATURA, DEL PATTINO E DELLA CERNIERA RISPETTIVAMENTE. $\square$

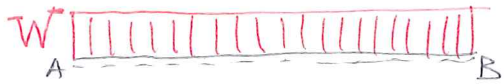
SI CONSIDERANO ALCUNE APPLICAZIONI SIGNIFICATIVE CON RIFERIMENTO A DIVERSE TIPOLOGIE STRUTTURALI.

A) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

1- SI STUDIA LA SEGUENTE TRAVE A MENSOLA DI LUCE L, CARICATA DA UNA COPPIA W APPLICATA ALL'ESTREMO LIBERO.







L'EQUAZIONE (E IL DIAGRAMMA) DEL MOMENTO FLETTENTE PUÒ ESSERE AGEVOLMENTE CALCOLATO PARTENDO DALL'ESTREMO (A) SENZA LA NECESSITÀ DI CALCOLARE PRELIMINARMENTE LE REAZIONI VINCOLARI: RISULTA

$$M_x(z) = -W$$

SI HA QUINDI, DALLA [10], E TENUTO CONTO DELLA NOTA 1:

$$v''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow v''(z) = +\frac{W}{EJ_x}$$

SEGUE DI QUI, INTEGRANDO 2 VOLTE L'EQUAZIONE:

$$v'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} + C_1 z + C_2$$

LE CONDIZIONI AL CONTORNO SONO DETERMINATE DAL VINCOLO IN (B) (INCASTRO):

$$\begin{cases} v'(z=L) = 0 \\ v(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{WL}{EJ_x} + C_1 = 0 \\ \dfrac{WL^2}{2EJ_x} + C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{WL}{EJ_x} \\ C_2 = -\dfrac{WL^2}{2EJ_x} + \dfrac{WL^2}{EJ_x} = +\dfrac{WL^2}{2EJ_x} \end{cases}$$

SI TROVA COSÌ:

$$v(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} - \frac{WL}{EJ_x}z + \frac{WL^2}{2EJ_x} = \frac{W}{2EJ_x}(z^2 - 2Lz + L^2) = \frac{W}{2EJ_x}(z-L)^2$$

$$v'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} - \frac{WL}{EJ_x} = \frac{W}{EJ_x}(z-L)$$

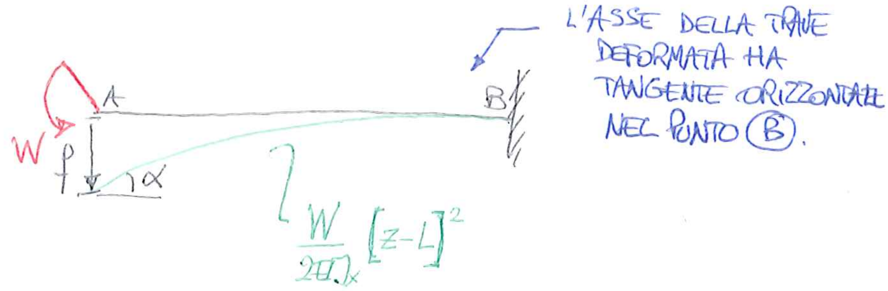
DA QUI SI POSSONO DETERMINARE SPOSTAMENTI (v) E ROTAZIONI (v') DI TUTTI

I PUNTI DELLA LINEA D'ASSE.

IN PARTICOLARE SI TROVA:

$$f = v(z=0) = +\frac{WL^2}{2EJ_x}$$

$$\alpha = v'(z=0) = -\frac{WL}{EJ_x}$$



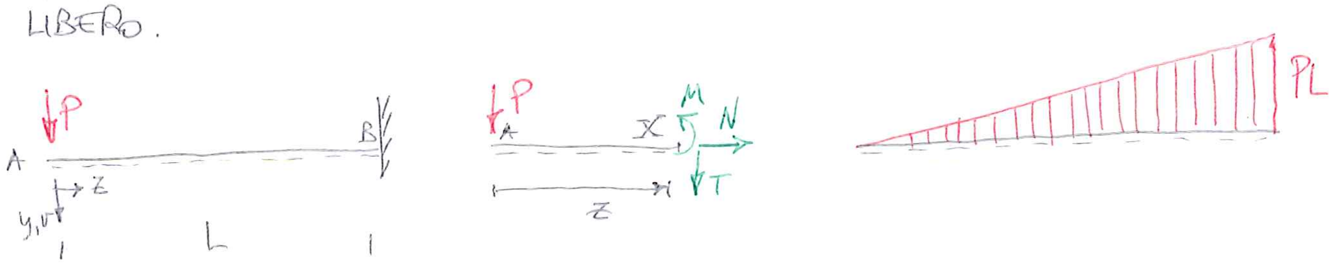
SI OSSERVI CHE DIMENSIONALMENTE LE QUANTITA' OTTENUTE SONO CORRETTE:

$$[f] = [L] \; ; \quad \left[\frac{WL^2}{2EJ_x}\right] = \frac{[F \cdot L][L^2]}{\left[\frac{\cancel{F}}{L^2}\right] \cdot [L^4]} = \frac{[\cancel{L^3}]}{[\cancel{L^2}]} = [L]$$

$$[\alpha] = [-] \; ; \quad \left[\frac{WL}{EJ_x}\right] = \frac{[\cancel{F} \cdot L][L]}{\left[\frac{\cancel{F}}{L^2}\right] \cdot [L^4]} = \frac{[\cancel{L^2}]}{[\cancel{L^2}]} = [-]$$

PER QUANTO RIGUARDA I SEGNI, SI HA CHE f È RIVOLTA VERSO IL BASSO ED E' DUNQUE POSITIVA, IN BASE ALLA SCELTA FATTA PER IL SISTEMA DI RIFERIMENTO; α È INVECE <0; ORA v' E' POSITIVO SE L'ANGOLO "TENDE AD AVVICINARE" L'ASSE DELLA TRAVE DEFORMATA ALL'ASSE y. NEL CASO PRESENTE LA TANGENTE ALLA LINEA D'ASSE IN A FORMA UN ANGOLO CHE TENDE AD ALLONTANARE L'ASSE DELLA TRAVE DEFORMATA DALL'ASSE y E RISULTA DUNQUE <0.

2 - TRAVE A MENSOLA DI LUCE L SOGGETTA A UN CARICO CONCENTRATO P ALL'ESTREMO LIBERO.



DI NUOVO L'EQUAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE PUO' ESSERE DETERMINATO SENZA LA NECESSITA' DI CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI. SI HA:

$$M_x(z) = -Pz$$

DUNQUE DALLA [10] SEGUE, QUESTA VOLTA:

$$v''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow v''(z) = \frac{Pz}{EJ_x}$$

DI QUI INTEGRANDO 2 VOLTE SI OTTIENE:

$$v'(z) = \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{Pz^3}{6EJ_x} + C_1 z + C_2 .$$

LE C.C. DIPENDONO DAI VINCOLI E IMPONGONO ANCORA: $\begin{cases} v(z=L) = 0 \\ v'(z=L) = 0 \end{cases}$
IN QUANTO IN (B) ($z=L$) È PRESENTE UN INCASTRO.

SI HA QUINDI DA RISOLVERE QUESTO SISTEMA DI 2 EQUAZIONI NELLE 2 INCOGNITE C_1, C_2:

$$\begin{cases} \frac{PL^2}{2EJ_x} + C_1 = 0 \\ \frac{PL^3}{6EJ_x} + C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{PL^2}{2EJ_x} \\ C_2 = -\frac{PL^3}{6EJ_x} + \frac{PL^2 \cdot L}{2EJ_x} = \frac{(-1+3)PL^3}{6EJ_x} = \frac{\cancel{2}PL^3}{\cancel{6}_3 EJ_x} = \frac{PL^3}{3EJ_x} \end{cases}$$

PERTANTO

$$v(z) = \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{PL^2 z}{2EJ_x} + \frac{PL^3}{3EJ_x} = \frac{P}{6EJ_x}\left(z^3 - 3L^2 z + 2L^3\right)$$

$$v'(z) = \frac{Pz^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x} = \frac{P}{2EJ_x}\left(z^2 - L^2\right)$$

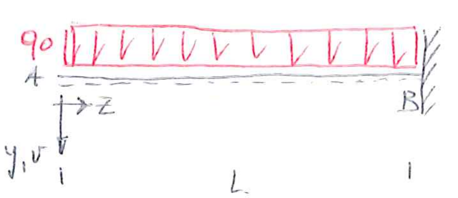
IN PARTICOLARE SI OTTIENE:

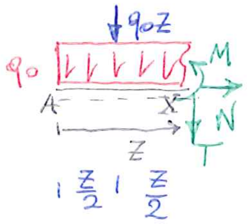
$$f = v(z=0) = \frac{PL^3}{3EJ_x}$$

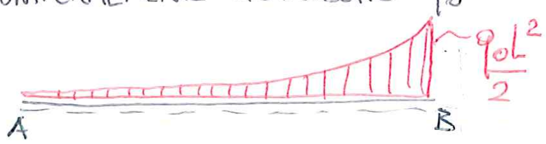
$$\alpha = v'(z=0) = -\frac{PL^2}{2EJ_x}$$

E DI NUOVO LA VERIFICA DIMENSIONALE È SODDISFATTA.

3- TRAVE A MENSOLA DI LUCE L SOGGETTA A UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO q_0







ANCORA L'EQUAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE PUÒ ESSERE DETERMINATA DIRETTAMENTE, SENZA LA NECESSITÀ DI CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI, E RISULTA:

$$M_x(z) = -q_0 \frac{z^2}{2}$$

DALLA [10] SEGUE ALLORA:

$$v''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad \Rightarrow \quad v''(z) = \frac{q_0 z^2}{2EJ_x}$$

INTEGRANDO 2 VOLTE SI TROVA:

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} + C_1 z + C_2$$

LA PRESENZA DELL'INCASTRO IN (B) DÀ LUOGO A QUESTE C.C: $\begin{cases} v(z=L)=0 \\ v'(z=L)=0 \end{cases}$.

NE SEGUE:

$$\begin{cases} \dfrac{q_0 L^3}{6EJ_x} + C_1 = 0 \\ \dfrac{q_0 L^4}{24EJ_x} + C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{q_0 L^3}{6EJ_x} \\ C_2 = -\dfrac{q_0 L^4}{24EJ_x} + \dfrac{q_0 L^3}{6EJ_x} \cdot L = \dfrac{(-1+4) q_0 L^4}{24EJ_x} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{8}{\cancel{24}}} \dfrac{q_0 L^4}{EJ_x} = \dfrac{q_0 L^4}{8EJ_x} \end{cases}$$

DUNQUE:

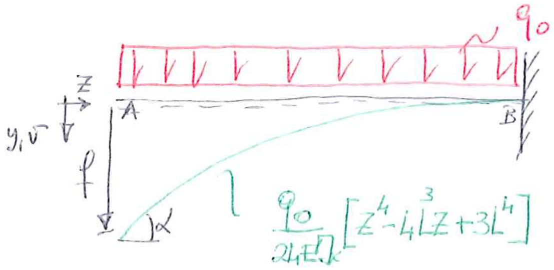
$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} - \frac{q_0 L^3 z}{6EJ_x} + \frac{q_0 L^4}{8EJ_x} = \frac{q_0}{24EJ_x}\left[z^4 - 4L^3 z + 3L^4\right]$$

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} - \frac{q_0 L^3}{6EJ_x} = \frac{q_0}{6EJ_x}\left[z^3 - L^3\right]$$

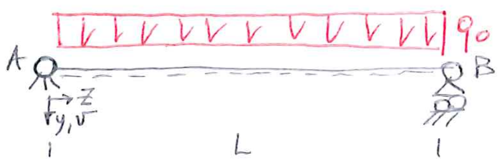
SI HA POI:

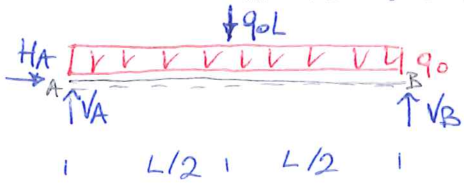
$$f = v(z=0) = \frac{q_0 L^4}{8EJ_x}$$

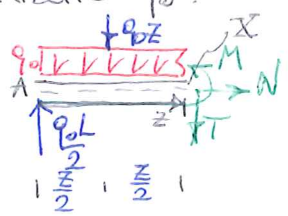
$$\alpha = v'(z=0) = -\frac{q_0 L^3}{EJ_x}$$



4 - TRAVE APPOGGIATA DI LUCE L SOGGETTA A UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO q_0.







QUESTA VOLTA OCCORRE DETERMINARE PRELIMINARMENTE LE REAZIONI VINCOLARI:

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_B - q_0 L = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & -\dfrac{q_0 L^{\cancel{2}}}{2} + V_B \cancel{L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \dfrac{q_0 L}{2} \\ V_B = \dfrac{q_0 L}{2} \end{cases}$$

PROCEDENDO CON I CALCOLI SI TROVA:

$$M_x(z) = \frac{q_0 L}{2} z - \frac{q_0 z^2}{2}$$

SEGUE DALLA [10]: $\quad v''(z) = -\dfrac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow v''(z) = \dfrac{q_0 z^2}{2EJ_x} - \dfrac{q_0 L z}{2EJ_x}$

CON UNA DOPPIA INTEGRAZIONE SI TROVA:

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} - \frac{q_0 L z^2}{4EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} - \frac{q_0 L z^3}{12EJ_x} + C_1 z + C_2.$$

QUESTA VOLTA LE C.C. DOVUTE AI 2 VINCOLI IN (A) E (B) FORNISCONO: $\begin{cases} v(z=0)=0 \\ v(z=L)=0 \end{cases}$

SI TROVA COSÌ:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ \dfrac{q_0 L^{\cancel{4}3}}{24EJ_x} - \dfrac{q_0 L^{\cancel{4}3}}{12EJ_x} + C_1\cancel{L} + \cancel{C_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\dfrac{q_0 L^3 (1-2)}{24EJ_x} = +\dfrac{q_0 L^3}{24EJ_x} \end{cases}$$

DUNQUE

$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} - \frac{q_0 L z^3}{12EJ_x} + \frac{q_0 L^3 z}{24EJ_x} = \frac{q_0 z}{24EJ_x}\left[z^3 - 2Lz^2 + L^3\right]$$

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} - \frac{q_0 L z^2}{4EJ_x} + \frac{q_0 L^3}{24EJ_x} = \frac{q_0}{24EJ_x}\left[4z^3 - 6Lz^2 + L^3\right]$$

LE ROTAZIONI IN CORRISPONDENZA DEGLI APPOGGI, α E β VALGONO RISPETTIVAMENTE:

$$\alpha = v'(z=0) = \frac{q_0 L^3}{24EJ_x}$$

$$\beta = v'(z=L) = \frac{q_0}{24EJ_x}\left(4L^3 - 6L^3 + L^3\right) = -\frac{q_0 L^3}{24EJ_x}$$

SI OSSERVA INOLTRE CHE $v'\left(z=\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0}{24EJ_x}\left[4\frac{L^3}{8} - 6L\frac{L^2}{4} + L^3\right] = \frac{q_0 L^3}{24EJ_x}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1\right] = 0$

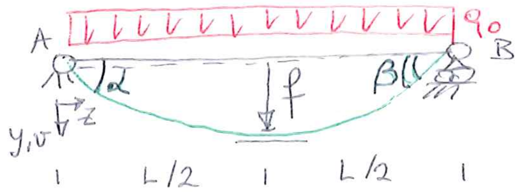
PERTANTO PER $z = \frac{L}{2}$ IL VALORE DI $v(z)$ È STAZIONARIO (È UN MASSIMO IN QUANTO $v''\left(z=\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^2}{8EJ_x} - \frac{q_0 L^2}{4EJ_x} < 0.$).

IN PARTICOLARE SI TROVA:

$$f = v\left(z=\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L}{48EJ_x}\left[\frac{L^3}{8} - 2L\frac{L^2}{4} + L^3\right] = \frac{q_0 L^4}{48EJ_x}\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{q_0 L^4}{48EJ_x}\left[\frac{1-4+8}{8}\right]$$

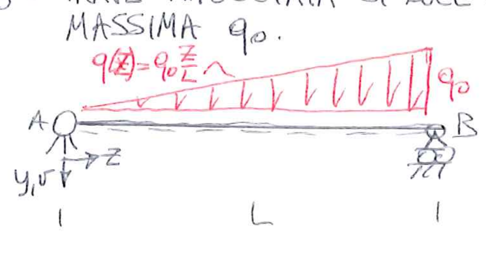
DUNQUE

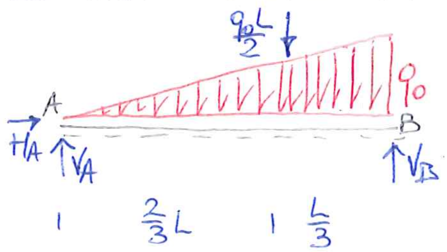
$$f = v\left(z=\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{q_0 L^4}{EJ_x}$$

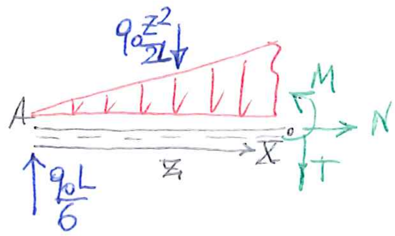


SI OSSERVI CHE LA DEFORMATA DELLA LINEA D'ASSE (UNA QUARTICA) RISULTA SIMMETRICA RISPETTO ALLA MEZZERIA

5 - TRAVE APPOGGIATA DI LUCE L SOGGETTA A UN CARICO DISTRIBUITO LINEARMENTE CON INTENSITÀ MASSIMA q_0.







LE REAZIONI VINCOLARI FORNISCONO:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_B - q_0\frac{L}{2} = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & -\frac{q_0 L^2}{3} + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{q_0 L}{6} \\ V_B = \frac{q_0 L}{3} \end{cases}$$

PROCEDENDO CON I CALCOLI SI OTTIENE:

$$M_x(z) = q_0 \frac{L}{6} z - q_0 \frac{z^2}{2L} \cdot \frac{z}{3} = \frac{q_0}{6}\left[Lz - \frac{z^3}{L}\right]$$

DALLA [10] SI OTTIENE:

$$v''(z) = -\frac{M_x(z)}{EJ_x} = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x L} - \frac{q_0 L z}{6EJ_x}$$

CON 2 INTEGRAZIONI SUCCESSIVE SI OTTIENE:

$$v'(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x L} - \frac{q_0 L z^2}{12EJ_x} + C_1$$

$$v(z) = \frac{q_0 z^5}{120EJ_x L} - \frac{q_0 L z^3}{36EJ_x} + C_1 z + C_2$$

LE CONDIZIONI AL CONTORNO IN Ⓐ E IN Ⓑ RICHIEDONO CHE SIA:

$$\begin{cases} v(z=0) = 0 \\ v(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ \frac{q_0 L^{\cancel{4}3}}{120EJ_x} - \frac{q_0 L^{\cancel{4}3}}{36EJ_x} + C_1 \cancel{L} + \cancel{C_2} = 0 \end{cases} \quad C_1 = \frac{q_0 L^3 (10-3)}{360\, EJ_x} = \frac{7}{360} \frac{q_0 L^3}{EJ_x}$$

NE SEGUE:

$$v(z) = \frac{q_0 z^5}{120EJ_x L} - \frac{q_0 L z^3}{36EJ_x} + \frac{7}{360} \frac{q_0 L^3 z}{EJ_x}$$

$$v'(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x L} - \frac{q_0 L z^2}{12EJ_x} + \frac{7}{360} \frac{q_0 L^3}{EJ_x}$$

LE ROTAZIONI IN CORRISPONDENZA DEGLI APPOGGI, α E β, VALGONO RISPETTIVAMENTE:

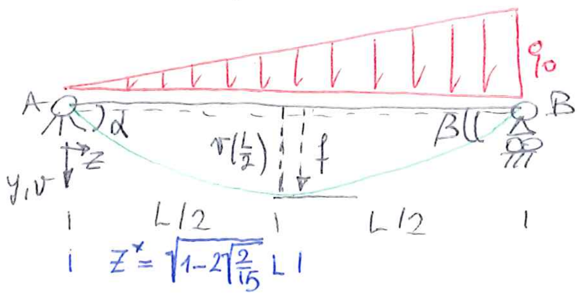
$$\alpha = v'(z=0) = \frac{7}{360} \frac{q_0 L^3}{EJ_x}$$

$$\beta = v'(z=L) = \frac{q_0 L^{\cancel{4}3}}{24EJ_x \cancel{L}} - \frac{q_0 L^3}{12EJ_x} + \frac{7}{360} \frac{q_0 L^3}{EJ_x} = \frac{q_0 L^3 (15-30+7)}{360\, EJ_x} = \frac{-8\, q_0 L^3}{360\, EJ_x} = -\frac{q_0 L^3}{45 EJ_x}$$

LO SPOSTAMENTO MASSIMO, f, SI TROVA IN CORRISPONDENZA DEL VALORE (CONTENUTO NELL'INTERVALLO $0 \le z \le L$) IN CUI $v'(z) = 0$. TALE VALORE RISULTA $z^* = \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{2}{15}}}\, L \simeq 0{,}519 L$

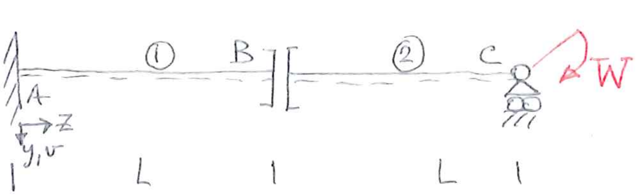
SE INVECE SI CALCOLA $v(z = \frac{L}{2})$ ($< f$) SI OTTIENE

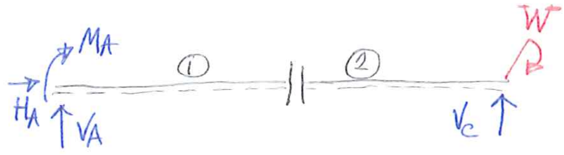
$$v\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^4}{EJ_x}\left(\frac{1}{3840} - \frac{1}{288} + \frac{7}{720}\right) = \frac{5}{768} \frac{q_0 L^4}{EJ_x}$$

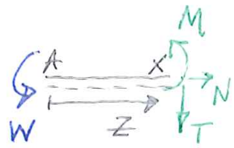


B) TRAVI ISOSTATICHE DOTATE DI VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

1- TRAVE ISOSTATICA CON UN VINCOLO INTERNO







SI HA, IN BASE ALLE EQUAZIONI CARDINALI E ALL'EQUAZIONE AUSILIARIA:

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_C = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & -M_A + W - V_C \cdot 2L = 0 \\ R_y^{②} = 0 & V_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ V_C = 0 \\ M_A = -W \end{cases}$$

L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE È UNICA PER LE 2 TRAVI:

$$M_x(z) = -W \qquad 0 \leq z \leq 2L$$

TUTTAVIA LA PRESENZA DEL VINCOLO INTERNO CONSENTE IN B UNA DISCONTINUITÀ DEGLI SPOSTAMENTI E RENDE NECESSARIO SPEZZARE IN DUE PARTI L'INTEGRAZIONE DELLA LINEA ELASTICA:

$$v_1''(z) = +\frac{W}{EJ_x} \qquad 0 \leq z < L$$

$$v_2''(z) = +\frac{W}{EJ_x} \qquad L < z \leq 2L$$

PROCEDENDO SEPARATAMENTE PER I DUE TRATTI SI TROVA:

$$v_1'(z) = \frac{W}{EJ_x} z + C_1 \qquad v_2'(z) = \frac{W}{EJ_x} z + D_1$$

LE COSTANTI SONO DIVERSE!

$$v_1(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} + C_1 z + C_2 \qquad v_2(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} + D_1 z + D_2$$

LE C.C. IN A SONO:
$$\begin{cases} v(z=0) = 0 \Rightarrow v_1(z=0) = 0 \\ v'(z=0) = 0 \Rightarrow v_1'(z=0) = 0 \end{cases}$$

IN C SONO:
$$\{ v(z=2L) = 0 \Rightarrow v_2(z=2L) = 0$$

IN B (VINCOLO INTERNO):
$$\{ v'(z=L^-) = v'(z=L^+) \Rightarrow v_1'(z=L) = v_2'(z=L)$$

SI OTTIENE QUINDI IL SEGUENTE SISTEMA DI 4 EQUAZIONI IN 4 INCOGNITE (C_1, C_2, D_1, D_2):

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ \dfrac{W(2L)^2}{2EJ_x} + D_1 \cdot 2L + D_2 = 0 \\ \cancel{\dfrac{W}{EJ_x}L} + \cancel{C_1} = \cancel{\dfrac{W}{EJ_x}L} + D_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_2 = -\dfrac{2WL^2}{EJ_x} \end{cases}$$

SI OTTIENE QUINDI:

$$v_1(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x}; \qquad v_1'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} \qquad 0 \leq z < L$$

$$v_2(z) = \frac{Wz^2}{2EJ_x} - \frac{2WL^2}{EJ_x}; \qquad v_2'(z) = \frac{Wz}{EJ_x} \qquad L < z \leq 2L$$

SI OSSERVA CHE IN CIASCUN TRATTO LA DEFORMATA È PARABOLICA, A CURVATURA COSTANTE PARI A $\frac{W}{EJ}$, > 0 (COME È CORRETTO CHE SIA, DAL MOMENTO CHE $M_x = -W, < 0$).

LA ROTAZIONE $v'(z)$ IN CORRISPONDENZA DEL PATTINO B È CONTINUA E VALE:

$$v_1'(z=L) = \frac{WL}{EJ_x} = v_2'(z=L)$$

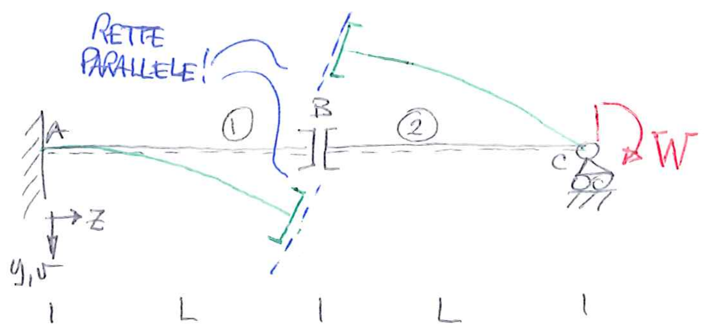
INVECE, IN CORRISPONDENZA DEL PATTINO B LO SPOSTAMENTO v È DISCONTINUO:

$$v_1(z=L) = +\frac{WL^2}{2EJ_x}$$

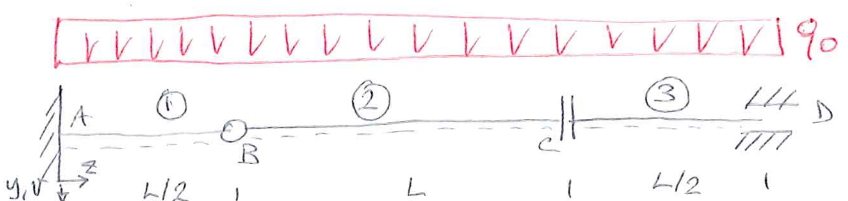
$$v_2(z=L) = +\frac{WL^2}{2EJ_x} - \frac{2WL^2}{EJ_x} = -\frac{3}{2}\frac{WL^2}{EJ_x}$$

SI HA QUINDI UN "SALTO" $\Delta v(z=L) = v_1(z=L) - v_2(z=L) = \frac{WL^2}{2EJ_x} - \left(-\frac{3WL^2}{2EJ_x}\right) = \frac{2WL^2}{EJ_x}$.

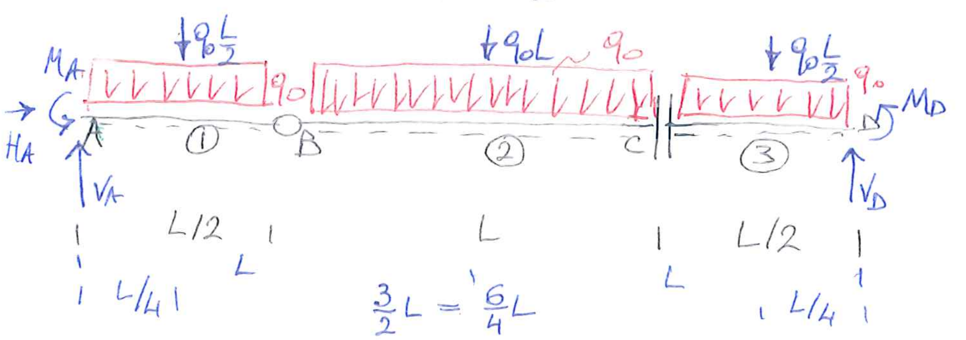
LA DEFORMATA ELASTICA DELLA STRUTTURA È LA SEGUENTE:

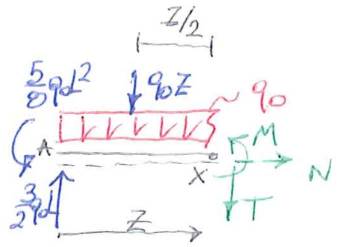


2 - TRAVE ISOSTATICA CON DUE VINCOLI INTERNI.



SI PASSA A DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI:





SI FA USO DELLE EQUAZIONI CARDINALI E DI 2 EQUAZIONI AUSILIARIE:

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_D \underbrace{- q_0\frac{L}{2} - q_0 L - q_0\frac{L}{2}}_{2q_0L} = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & M_A \underbrace{- q_0\frac{L^2}{8} - q_0L^2 - \frac{7}{8}q_0L^2}_{-2q_0L^2} + V_D\cdot 2L + M_D = 0 \\ \circlearrowleft M^{①}_{x(B)} = 0 & M_A - V_A\cdot\frac{L}{2} + q_0\frac{L^2}{8} = 0 \\ \uparrow R^{③}_y = 0 & V_D - q_0\frac{L}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_D = \frac{q_0L}{2} \\ V_A = \frac{3}{2}q_0L \\ M_A = \frac{5}{8}q_0L^2 \\ M_D = \frac{3}{8}q_0L^2 \end{cases}$$

L'ESPRESSIONE DI $M_x(z)$ È PERÒ UNICA PER TUTTA LA TRAVE:

$$M_x(z) = -\frac{5}{8}q_0L^2 + \frac{3}{2}q_0Lz - q_0\frac{z^2}{2} \qquad 0 \le z \le 2L$$

TUTTAVIA LA PRESENZA DEI VINCOLI INTERNI IN B E C RENDE NECESSARIO SPEZZARE IN TRE PARTI IL DOMINIO PER DETERMINARE LA LINEA ELASTICA.

SI HA:

•) $$v_1''(z) = \frac{\frac{5}{8}q_0L^2}{EJ_x} - \frac{\frac{3}{2}q_0Lz}{EJ_x} + \frac{q_0\frac{z^2}{2}}{EJ_x} \qquad 0 \le z < \frac{L}{2}$$

$$v_1'(z) = \frac{5q_0L^2z}{8EJ_x} - \frac{3q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} + A_1$$

$$v_1(z) = \frac{5q_0L^2z^2}{16EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{4EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} + A_1z + A_2$$

NB: LE COSTANTI DI INTEGRAZIONE SONO DIVERSE PER CIASCUN TRATTO!

••) $$v_2''(z) = \frac{\frac{5}{8}q_0L^2}{EJ_x} - \frac{\frac{3}{2}q_0Lz}{EJ_x} + \frac{q_0\frac{z^2}{2}}{EJ_x} \qquad \frac{L}{2} < z < \frac{3}{2}L$$

$$v_2'(z) = \frac{5q_0L^2z}{8EJ_x} - \frac{3q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} + B_1$$

$$v_2(z) = \frac{5q_0L^2z^2}{16EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{4EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} + B_1z + B_2$$

•••) $$v_3''(z) = \frac{\frac{5}{8}q_0L^2}{EJ_x} - \frac{\frac{3}{2}q_0Lz}{EJ_x} + \frac{q_0\frac{z^2}{2}}{EJ_x} \qquad \frac{3}{2}L < z \le 2L$$

$$v_3'(z) = \frac{5q_0L^2z}{8EJ_x} - \frac{3q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} + C_1$$

$$v_3(z) = \frac{5q_0L^2z^2}{16EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{4EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} + C_1z + C_2$$

LE 6 C.C FORNISCONO:

IN (A): $\begin{cases} v(z=0)=0 \\ v'(z=0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1(z=0)=0 \\ v_1'(z=0)=0 \end{cases}$

IN (D): $\begin{cases} v(z=2L)=0 \\ v'(z=2L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3(z=2L)=0 \\ v_3'(z=2L)=0 \end{cases}$

IN (B): $\left\{ v\left(z=\frac{L^-}{2}\right)=v\left(z=\frac{L^+}{2}\right) \Rightarrow \left\{ v_1\left(z=\frac{L}{2}\right)=v_2\left(z=\frac{L}{2}\right) \right.\right.$

IN (C): $\left\{ v'\left(z=\frac{3L^-}{2}\right)=v'\left(z=\frac{3L^+}{2}\right) \Rightarrow \left\{ v_2'\left(z=\frac{3L}{2}\right)=v_3'\left(z=\frac{3L}{2}\right) \right.\right.$

E FORNISCONO IL SEGUENTE SISTEMA DI 6 EQUAZIONI NELLE 6 INCOGNITE $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$:

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ A_1 = 0 \\ \frac{5 q_0 L^2 \cdot 4L^2}{16\, EJ_x} - \frac{q_0 L \cdot 8L^3}{4EJ_x} + \frac{q_0 \cdot 16L^4}{24EJ_x} + C_1 2L + C_2 = 0 \Rightarrow \frac{5}{4}\frac{q_0L^4}{EJ} - 2\frac{q_0L^4}{EJ_x} + \frac{2q_0L^4}{3EJ_x} + 2C_1L + C_2 = 0 \\ \frac{5}{8}\frac{q_0L^2\cdot 2L}{EJ_x} - \frac{3q_0L\cdot 4L^2}{4EJ_x} + \frac{q_0\cdot 8L^3}{6EJ_x} + C_1 = 0 \Rightarrow \frac{5}{4}\frac{q_0L^3}{EJ} - 3\frac{q_0L^3}{EJ_x} + \frac{4q_0L^3}{3EJ_x} + C_1 = 0 \\ \cancel{\frac{5q_0L^2\frac{L^2}{4}}{16EJ_x}} - \cancel{\frac{q_0L\frac{L^3}{8}}{4EJ_x}} + \cancel{\frac{q_0\frac{L^4}{16}}{24EJ_x}} + \cancel{A_1}\frac{L}{2} + \cancel{A_2} = \cancel{\frac{5q_0L^2\frac{L^2}{4}}{16EJ_x}} - \cancel{\frac{q_0L\frac{L^3}{8}}{4EJ_x}} + \cancel{\frac{q_0\frac{L^4}{16}}{24EJ_x}} + B_1\frac{L}{2} + B_2 \Rightarrow B_1\frac{L}{2} + B_2 = 0 \\ \cancel{\frac{5q_0L^2\frac{3}{2}L}{8EJ_x}} - \cancel{\frac{3q_0L\frac{9}{4}L^2}{4EJ_x}} + \cancel{\frac{q_0\frac{27}{8}L^3}{6EJ_x}} + B_1 = \cancel{\frac{5q_0L^2\frac{3}{2}L}{8EJ_x}} - \cancel{\frac{3q_0L\frac{9}{4}L^2}{4EJ_x}} + \cancel{\frac{q_0\frac{27}{8}L^3}{6EJ_x}} + C_1 \Rightarrow B_1 - C_1 = 0 \end{cases}$$

SI HA QUINDI:

$$\begin{cases} \frac{q_0L^4}{EJ_x}\left(\frac{15-24+8}{12}\right) + 2C_1L + C_2 = 0 \\ \frac{q_0L^3}{EJ_x}\left(\frac{15-36+16}{12}\right) + C_1 = 0 \\ B_1\frac{L}{2} + B_2 = 0 \\ B_1 - C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{q_0L^4}{12EJ_x} + 2C_1L + C_2 = 0 \\ -\frac{5q_0L^3}{12EJ_x} + C_1 = 0 \\ B_1\frac{L}{2} + B_2 = 0 \\ B_1 - C_1 = 0 \end{cases}$$

NE SEGUE:

$C_1 = \frac{5q_0L^3}{12EJ_x}$; $C_2 = \frac{(-10+1)\,q_0L^4}{12\; EJ_x} = -\frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{12}_{\,4}}\frac{q_0L^4}{EJ_x} = -\frac{3}{4}\frac{q_0L^4}{EJ_x}$; $B_1 = \frac{5q_0L^3}{12EJ_x}$;

$B_2 = -\frac{5q_0L^4}{24EJ_x}$

SI TROVA COSÌ LA SOLUZIONE COMPLETA DELLA LINEA ELASTICA: SOSTITUENDO I VALORI DI $A_1, \ldots, C_2$ SI OTTIENE:

$$v_1 = \frac{5q_0L^2z^2}{16EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{4EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} \quad ; \quad v_1'(z) = \frac{5q_0L^2z}{8EJ_x} - \frac{3q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} \qquad 0 \leq z < \frac{L}{2}$$

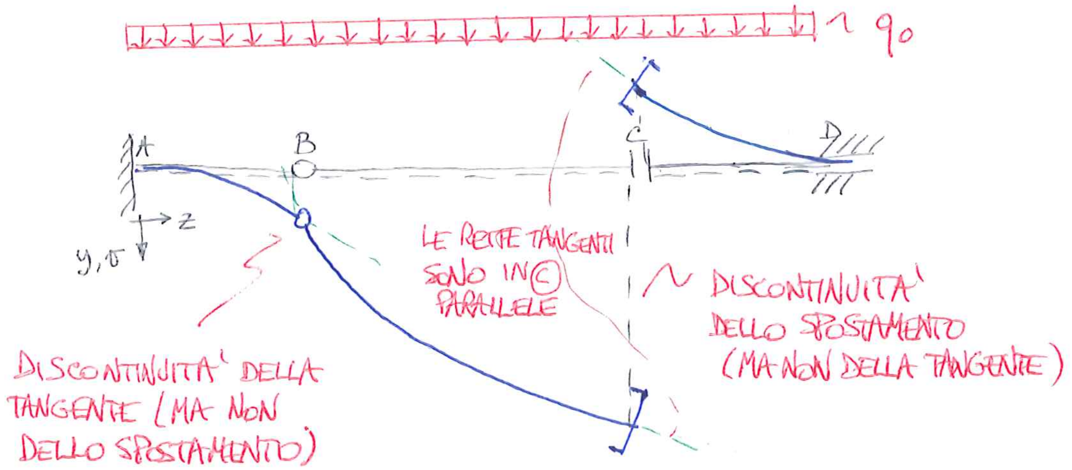
$$v_2 = \frac{5q_0L^2z^2}{16EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{4EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} + \frac{5q_0L^3z}{12EJ_x} - \frac{5q_0L^4}{24EJ_x} \; ; \; v_2'(z) = \frac{5q_0L^2z}{8EJ_x} - \frac{3q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} + \frac{5q_0L^3}{12EJ_x}$$

$$\frac{L}{2} < z < \frac{3}{2}L$$

$$v_3 = \frac{5q_0L^2z^2}{16EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{4EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} + \frac{5q_0L^3z}{12EJ_x} - \frac{3q_0L^4}{4EJ_x} \; ; \; v_3'(z) = \frac{5q_0L^2z}{8EJ_x} - \frac{3q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} + \frac{5q_0L^3}{12EJ_x}$$

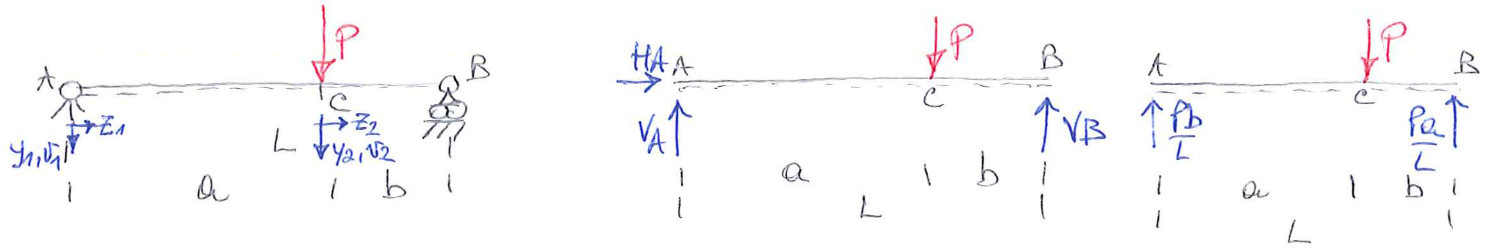
$$\frac{3}{2}L < z < 2L$$

LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI $v(z) = v_1(z) \cup v_2(z) \cup v_3(z)$ È LA SEGUENTE:



C) TRAVI ISOSTATICHE SENZA VINCOLI INTERNI NELLE QUALI IL MOMENTO FLETTENTE NON È RAPPRESENTATO DA UN'UNICA EQUAZIONE.

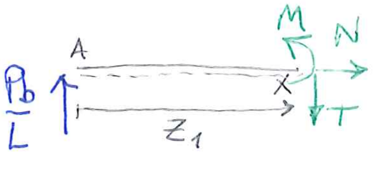
1- TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA A UN CARICO CONCENTRATO IN CAMPATA.



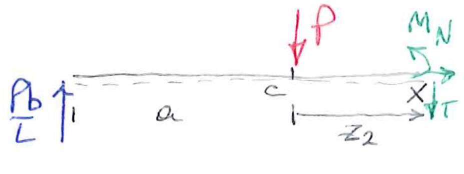
SI DETERMINANO LE REAZIONI VINCOLARI:

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_B - P = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & -Pa + V_BL = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = P\left(1 - \frac{a}{L}\right) = P\frac{b}{L} \\ V_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$

L'ESPRESSIONE DI M_x È DIVERSA PER I DUE TRATTI:



$$M_x(z_1) = \frac{Pb}{L} z_1 \qquad 0 \leq z_1 < a$$



$$M_x(z_2) = \frac{Pa}{L}(b - z_2) \qquad 0 < z_2 \leq b$$

SI TROVA QUINDI:

$$v_1''(z_1) = -\frac{\frac{Pb}{L}z_1}{EJ_x} \qquad 0 \leq z_1 < a$$

$$v_2''(z_2) = -\frac{\frac{Pa}{L}(b-z_2)}{EJ_x} \qquad 0 < z_2 \leq b$$

MEDIANTE DUE INTEGRAZIONI SI RISALE A $v_1(z_1)$ E $v_2(z_2)$; $v = v_1 \cup v_2$:

$$v_1'(z_1) = -\frac{\frac{Pb\,z_1^2}{2L}}{EJ_x} + A_1$$

$$v_1(z_1) = -\frac{Pbz_1^3}{6LEJ_x} + A_1 z_1 + A_2$$

$$v_2'(z_2) = \frac{-Pabz_2}{LEJ_x} + \frac{Paz_2^2}{2LEJ_x} + B_1$$

$$v_2(z_2) = -\frac{Pabz_2^2}{2LEJ_x} + \frac{Paz_2^3}{6LEJ_x} + B_1 z_2 + B_2$$

LE C.C. SONO:

$$\begin{cases} v_1(z_1=0) = 0 \\ v_2(z_2=b) = 0 \end{cases} \qquad \text{PER I VINCOLI ESTERNI}$$

$$\begin{cases} v_1(z_1=a) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=a) = v_2'(z_2=0) \end{cases} \qquad \text{PER IL VINCOLO INTERNO DI CONTINUITA' (SALDATURA)}$$

NE SEGUE:

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ -\frac{Pab^3}{2LEJ_x} + \frac{Pab^3}{6LEJ_x} + B_1 b + B_2 = 0 \\ -\frac{Pba^3}{6LEJ_x} + A_1 a + \cancel{A_2} = B_2 \\ \left(-\frac{Pba^2}{2LEJ_x} + A_1\right)a = B_1 \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ -\frac{Pab^3}{3LEJ_x} + B_1 b + B_2 = 0 \\ +\frac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a - B_2 = 0 \\ -\frac{Pba^2}{2LEJ_x} + A_1 = B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ \frac{-P(ab^3 - ba^3)}{3LEJ_x} + B_1(b+a) = 0 \\ \frac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a = B_2 \\ \frac{Pba^2}{2LEJ_x} + B_1 = A_1 \end{cases}$$

SI HA POI:

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ \frac{-Pab(b^2-a^2)}{3LEJ_x} + B_1(b+a) = 0 \\ B_2 = \frac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a \\ A_1 = \frac{Pba^2}{2LEJ_x} + B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ \frac{+Pab(b-a)\cancel{(b+a)}}{3LEJ_x} = B_1\cancel{(b+a)} \\ B_2 = \frac{Pba^3}{3LEJ_x} + B_1 a \\ A_1 = \frac{Pba^2}{2LEJ_x} + B_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 = 0 \\ B_1 = \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \\ B_2 = \frac{Pb\cancel{a^3}}{\cancel{3}LEJ_x} + \frac{Pa^2b(b-\cancel{a})}{3LEJ_x} \\ A_1 = \underbrace{\frac{Pba^2}{2LEJ_x} + \frac{Pab^2 - Pba^2}{3LEJ_x}}_{\frac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x}} \end{cases}$$

SI GIUNGE INFINE A QUESTO RISULTATO:

$$A_1 = \frac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x} \; ; \quad A_2 = 0 \; ; \quad B_1 = \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \; ; \quad B_2 = \frac{Pa^2b^2}{3LEJ_x}$$

E LA LINEA ELASTICA HA QUESTA ESPRESSIONE COMPLETA:

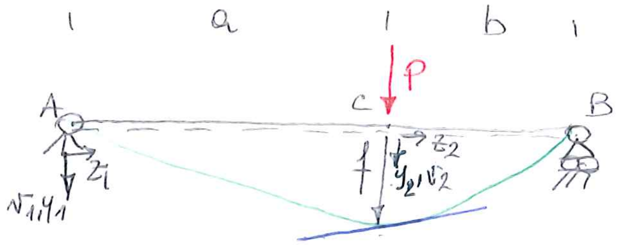
$$v_1(z_1) = -\frac{Pbz_1^3}{6LEJ_x} + \frac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x} z_1 \; ; \qquad v_1'(z_1) = \frac{-Pbz_1^2}{2LEJ_x} + \frac{Pba^2 + 2Pab^2}{6LEJ_x} \qquad 0 \leq z_1 < a$$

$$v_2(z_2) = -\frac{Pabz_2^2}{2LEJ_x} + \frac{Paz_2^3}{6LEJ_x} + \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} z_2 + \frac{Pa^2b^2}{3LEJ_x} \; ; \quad v_2'(z_2) = -\frac{Pabz_2}{LEJ_x} + \frac{Paz_2^2}{2LEJ_x} + \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \qquad 0 < z_2 \leq b$$

SI NOTA CHE LA LINEA ELASTICA RISULTA COSTITUITA DA 2 ARCHI DI CUBICA RACCORDATI IN (C) IN MODO DA AVERE DERIVATA PRIMA CONTINUA.

L'ABBASSAMENTO NEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA E' PARI A:

$$f = v_1(z_1 = a) = v_2(z_2 = 0) = \frac{Pa^2b^2}{3LEJ_x} = \frac{Pa^2(L-a)^2}{3LEJ_x}$$



SI NOTI CHE LA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO (C) FORMA CON L'ASSE Z UN ANGOLO DI VALORE

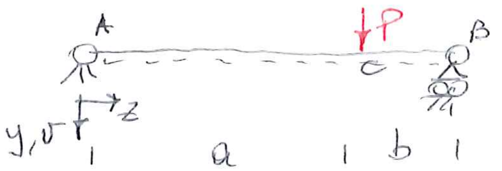
$$v_1'(z_1 = a) = v_2'(z_2 = 0) = \frac{Pab(b-a)}{3LEJ_x} \neq 0 \qquad \text{SE } b \neq a$$

SE $a = b = \frac{L}{2}$ SI TROVA INVECE

$$v_1'\left(z_1 = \frac{L}{2}\right) = v_2'(z_2 = 0) = 0 \qquad \text{(TANGENTE ORIZZONTALE)}$$

$$v_1\left(z_1 = \frac{L}{2}\right) = v_2(z_2 = 0) = \frac{P\frac{L^2}{4}\cdot\frac{L^2}{4}}{3LEJ_x} = \frac{P\cancel{L^4}^{3}}{48\cancel{L}EJ_x} = \frac{PL^3}{48EJ_x}$$

NOTA 4. SI NOTI CHE ANCHE IN QUESTO CASO PUR DOVENDO SPEZZARE IL DOMINIO SI SAREBBE POTUTO USARE UN UNICO SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE IN (A):



IN TALE CASO L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE SAREBBE LA SEGUENTE:

$$M_x(z) = \frac{Pb}{L} z \qquad 0 \leq z < a$$

$$M_x(z) = \frac{Pb}{L} z - P(z-a) \qquad a < z \leq L$$

SI HA POI:

$$\left.\begin{aligned}
v_1''(z) &= -\frac{Pb}{LEJ_x}z \\
v_1'(z) &= -\frac{Pbz^2}{2LEJ_x} + C_1 \\
v_1(z) &= -\frac{Pbz^3}{6LEJ_x} + C_1 z + C_2
\end{aligned}\right\} \quad 0 \le z < a$$

$$\left.\begin{aligned}
v_2''(z) &= -\frac{Pb}{LEJ_x}z + \frac{Pz}{EJ_x} - \frac{Pa}{EJ_x} \\
v_2'(z) &= -\frac{Pbz^2}{2LEJ_x} + \frac{Pz^2}{2EJ_x} - \frac{Paz}{EJ_x} + D_1 \\
v_2(z) &= -\frac{Pbz^3}{6LEJ_x} + \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{Paz^2}{2EJ_x} + D_1 z + D_2
\end{aligned}\right\} \quad a < z \le L$$

COSTANTI DIVERSE DAL CASO PRECEDENTE! (RIFERITE A COORDINATE $\neq$!)

OVVIAMENTE LE C.C. VANNO IMPOSTE NEI VALORI CORRETTI DELL'ASCISSA z!

$$\begin{cases}
v(z=0)=0 \Rightarrow v_1(z=0)=0 \\
v(z=L)=0 \Rightarrow v_2(z=L)=0 \\
v(z=a^-)=v(z=a^+) \Rightarrow v_1(z=a)=v_2(z=a) \\
v'(z=a^-)=v'(z=a^+) \Rightarrow v_1'(z=a)=v_2'(z=a)
\end{cases}$$

E QUESTO COMPORTA:

$$\begin{cases}
C_2 = 0 \\
-\frac{PbL^3}{6LEJ_x} + \frac{PL^3}{6EJ_x} - \frac{PaL^2}{2EJ_x} + D_1 L + D_2 = 0 \\
\cancel{-\frac{Pba^3}{6LEJ_x}} + C_1 a + C_2 = \cancel{-\frac{Pba^3}{6LEJ_x}} + \frac{Pa^3}{6EJ_x} - \frac{Pa^3}{2EJ_x} + D_1 a + D_2 \\
\cancel{-\frac{Pba^2}{2LEJ_x}} + C_1 = \cancel{-\frac{Pba^2}{2LEJ_x}} + \frac{Pa^2}{2EJ_x} - \frac{Pa^2}{EJ_x} + D_1
\end{cases}$$

RISOLVENDO IL SISTEMA COSÌ FORMATO SI TROVA:

$$C_1 = -\frac{Pa^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{6EJ_x} + \frac{PaL}{2EJ_x} + \frac{PbL}{6EJ_x} + \frac{Pa^3}{6LEJ_x}; \quad C_2 = 0; \quad D_1 = -\frac{PL^2}{6EJ_x} + \frac{PaL}{2EJ_x} + \frac{PbL}{6EJ_x} + \frac{Pa^3}{6LEJ_x};$$

$$D_2 = -\frac{Pa^3}{6EJ_x}$$

SOSTITUENDO SI OTTIENE:

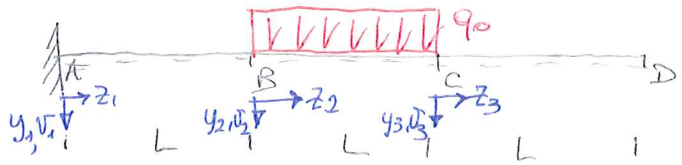
$$v_1(z) = -\frac{Pbz^3}{6LEJ_x} + \left(-\frac{Pa^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{6EJ_x} + \frac{PaL}{2EJ_x} + \frac{PbL}{6EJ_x} + \frac{Pa^3}{6LEJ_x}\right)z \qquad 0 \le z < a$$

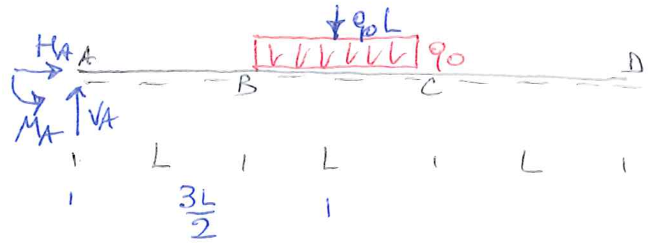
$$v_2(z) = -\frac{Pbz^3}{6LEJ_x} + \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{Paz^2}{2EJ_x} + \left(-\frac{PL^2}{6EJ_x} + \frac{PaL}{2EJ_x} + \frac{PbL}{6EJ_x} + \frac{Pa^3}{6LEJ_x}\right)z - \frac{Pa^3}{6EJ_x} \qquad a < z \le L.$$

SI OSSERVA CHE, A DIFFERENZA DEL CASO IN CUI L'ESPRESSIONE DI $M_x(z)$ È IDENTICA PER TUTTA LA TRAVE NON CI SONO PARTICOLARI VANTAGGI A USARE UN UNICA COORDINATA: ANZI LA DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE RISULTA PIÙ LABORIOSA PERCHÉ NEI PUNTI DI CONTINUITÀ (COME Ⓒ) L'ESPRESSIONE DELLA LINEA ELASTICA NON SI SEMPLIFICA IN ALMENO UNO DEI 2 CAMPI. PER QUESTA RAGIONE È PREFERIBILE IN CASI COME QUESTO PROCEDERE COME GIÀ VISTO.

II.

2.- TRAVE A MENSOLA CON CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO SU PARTE DELLA LUCE

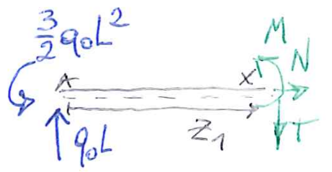


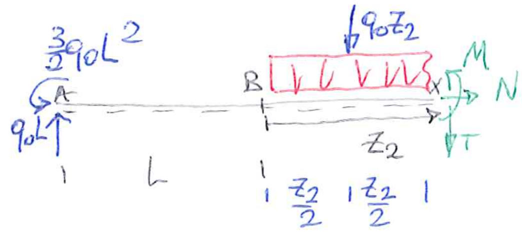


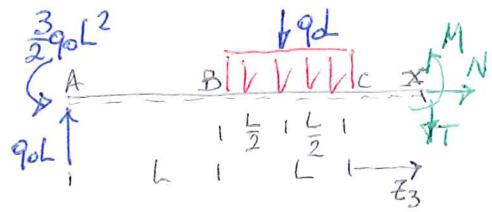
SI DETERMINANO LE REAZIONI VINCOLARI

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0 L = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & M_A - q_0 L \cdot \frac{3}{2} L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = q_0 L \\ M_A = +\frac{3}{2} q_0 L^2 \end{cases}$$

L'ESPRESSIONE DI $M_x(z)$ È DIVERSA PER I TRE TRATTI AB, BC, CD. IN BASE A QUANTO VISTO IN PRECEDENZA, CONVIENE UTILIZZARE 3 DIVERSE ASCISSE z_1, z_2, z_3.







$$M_x(z_1) = q_0 L z_1 - \frac{3}{2} q_0 L^2 \qquad \begin{matrix} 0 \le z_1 < L \\ A \rightarrow B \end{matrix}$$

$$M_x(z_2) = -\frac{3}{2} q_0 L^2 + q_0 L^2 + q_0 L z_2 - \frac{q_0 z_2^2}{2} \Rightarrow M_x(z_2) = -\frac{1}{2} q_0 L^2 + q_0 L z_2 - \frac{q_0 z_2^2}{2} \qquad \begin{matrix} 0 < z_2 < L \\ B \rightarrow C \end{matrix}$$

$$M_x(z_3) = -\cancel{\frac{3}{2} q_0 L^2} + \cancel{2 q_0 L^2} + \cancel{q_0 L z_3} - \cancel{\frac{q_0 L^2}{2}} - \cancel{q_0 L z_3} \Rightarrow M_x(z_3) = 0 \qquad \begin{matrix} 0 < z_3 \le L \\ C \rightarrow D. \end{matrix}$$

SI TROVA QUINDI: $v = v_1 \cup v_2 \cup v_3$, CON

$$\left.\begin{aligned} v_1''(z_1) &= \frac{\frac{3}{2} q_0 L^2}{EJ_x} - \frac{q_0 L z_1}{EJ_x} \\ v_1'(z_1) &= \frac{3 q_0 L^2 z_1}{2EJ_x} - \frac{q_0 L z_1^2}{2EJ_x} + A_1 \\ v_1(z_1) &= \frac{3 q_0 L^2 z_1^2}{4EJ_x} - \frac{q_0 L z_1^3}{6EJ_x} + A_1 z_1 + A_2 \end{aligned}\right\} \quad 0 \le z_1 < L$$

$$\left.\begin{aligned} v_2''(z_2) &= \frac{\frac{1}{2} q_0 L^2}{EJ_x} - \frac{q_0 L z_2}{EJ_x} + \frac{\frac{1}{2} q_0 z_2^2}{EJ_x} \\ v_2'(z_2) &= \frac{q_0 L^2 z_2}{2EJ_x} - \frac{q_0 L z_2^2}{2EJ_x} + \frac{q_0 z_2^3}{6EJ_x} + B_1 \end{aligned}\right\} \quad 0 < z_2 < L$$

$$v_2(z_2) = \frac{q_0 L^2 z_2^2}{4EJ_x} - \frac{q_0 L z_2^3}{6EJ_x} + \frac{q_0 z_2^4}{24EJ_x} + B_1 z_2 + B_2$$

$$\left.\begin{aligned} v_3''(z_3) &= 0 \\ v_3'(z_3) &= C_1 \\ v_3(z_3) &= C_1 z_3 + C_2 \end{aligned}\right\} \quad 0 < z_3 \le L$$

SI OSSERVI CHE $M_x(z_3) = 0$ NON COMPORTA CHE $v_3 \equiv 0$! SI HA PERÒ CHE LA CURVATURA È NULLA E DUNQUE $v_3(z_3)$ È RETTILINEA.

LE C.C. RICHIEDONO:

IN (A) (VINCOLO ESTERNO = INCASTRO) $\begin{cases} v_1(z_1=0) = 0 \\ v_1'(z_1=0) = 0 \end{cases}$

IN (B) (VINCOLO INTERNO = SALDATURA) $\begin{cases} v_1(z_1=L) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=L) = v_2'(z_2=0) \end{cases}$

IN (C) (VINCOLO INTERNO = SALDATURA) $\begin{cases} v_2(z_2=L) = v_3(z_3=0) \\ v_2'(z_2=L) = v_3'(z_3=0) \end{cases}$

SI TROVA COSÌ:

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ A_1 = 0 \\ \frac{3}{4}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} - \frac{q_0 L^4}{6EJ_x} + \cancel{A_1} L + \cancel{A_2} = B_2 \\ \frac{3 q_0 L^3}{2EJ_x} - \frac{q_0 L^3}{2EJ_x} + \cancel{A_1} = B_1 \\ \frac{q_0 L^4}{4EJ_x} - \frac{q_0 L^4}{6EJ_x} + \frac{q_0 L^4}{24EJ_x} + B_1 L + B_2 = C_2 \\ \cancel{\frac{q_0 L^3}{2EJ_x}} - \cancel{\frac{q_0 L^3}{2EJ_x}} + \frac{q_0 L^3}{6EJ_x} + B_1 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ B_2 = \frac{(9-2) q_0 L^4}{12 EJ_x} = \frac{7}{12}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} \\ B_1 = \frac{q_0 L^3}{EJ_x} \\ C_2 = \frac{6-4+1}{24 EJ_x} q_0 L^4 + \frac{q_0 L^4}{EJ_x} + \frac{7}{12}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} \\ C_1 = \frac{q_0 L^3}{6EJ_x} + \frac{q_0 L^3}{EJ_x} = \frac{7}{6}\frac{q_0 L^3}{EJ_x} \end{cases}$$

SEMPLIFICANDO SI TROVA $C_2 = \frac{3+24+14}{24}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} = \frac{41}{24}\frac{q_0 L^4}{EJ_x}$

LA LINEA ELASTICA RISULTA COSIFFATTA:

$$v_1(z_1) = \frac{3}{4}\frac{q_0 L^2 z_1^2}{EJ_x} - \frac{q_0 L z_1^3}{6EJ_x} \qquad v_1'(z_1) = \frac{3}{2}\frac{q_0 L^2 z_1}{EJ_x} - \frac{q_0 L z_1^2}{2EJ_x} \quad 0 \le z_1 < L$$

$$v_2(z_2) = \frac{q_0 L^2 z_2^2}{4EJ_x} - \frac{q_0 L z_2^3}{6EJ_x} + \frac{q_0 z_2^4}{24EJ_x} + \frac{q_0 L^3}{EJ_x} z_2 + \frac{7}{12}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} \qquad v_2'(z_2) = \frac{q_0 L^2 z_2}{2EJ_x} - \frac{q_0 L z_2^2}{2EJ_x} + \frac{q_0 z_2^3}{6EJ_x} + \frac{q_0 L^3}{EJ_x} \quad 0 < z_2 < L$$

$$v_3(z_3) = \frac{7}{6}\frac{q_0 L^3}{EJ_x} z_3 + \frac{41}{24}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} \qquad v_3'(z_3) = \frac{7}{6}\frac{q_0 L^3}{EJ_x}$$

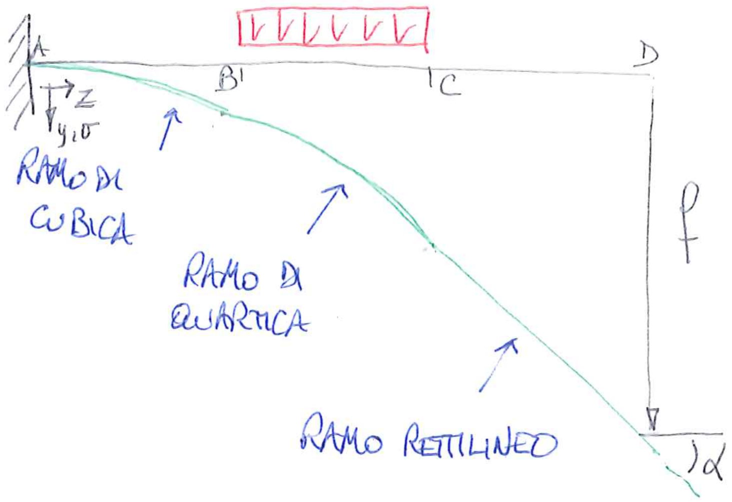
SI HA QUINDI CHE LA DEFORMATA DELLA LINEA D'ASSE È COMPOSTA DA UN ARCO DI

CUBICA, UN ARCO DI QUARTICA E UN TRATTO DI RETTA RACCORDATE IN MODO TALE DA FORNIRE UNA CURVA CONTINUA CON DERIVATA PRIMA CONTINUA.

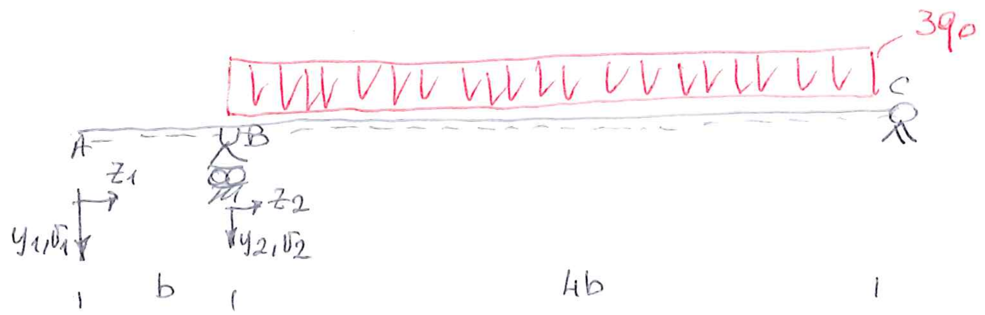
LO SPOSTAMENTO IN Ⓓ, f E LA ROTAZIONE ALL'ESTREMO LIBERO Ⓓ, α VALGONO:

$$f = v\Big|_D = v_3(z_3 = L) = \frac{7}{6}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} + \frac{41}{24}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} = \frac{\overbrace{28+41}^{69}}{24}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} = \frac{\cancel{69}^{\,23}}{\cancel{24}_{\,8}}\frac{q_0 L^4}{EJ_x} = \frac{23}{8}\frac{q_0 L^4}{EJ_x}$$

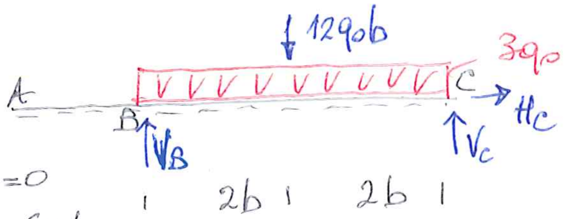
$$\alpha = v'\Big|_D = v_3'(z_3 = L) = \frac{7}{6}\frac{q_0 L^3}{EJ_x}$$



3 - TRAVE APPOGGIATA CON SBALZO CARICATA UNIFORMEMENTE IN CAMPATA.

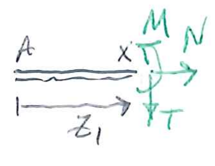


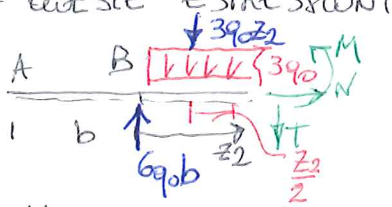
LE REAZIONI VINCOLARI FORNISCONO:



$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 \quad H_C = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_B + V_C - 12q_0 b = 0 \\ \circlearrowright M_{x(B)} = 0 \quad -12q_0 b \cdot 2b + V_C \cdot 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = 0 \\ V_B = 6q_0 b \\ V_C = 6q_0 b \end{cases}$$

IL MOMENTO FLETTENTE HA QUESTE ESPRESSIONI NEI TRATTI AB E BC:





$$M_x(z_1) = 0 \qquad 0 \leq z_1 < b$$

$$M_x(z_2) = 6q_0 b z_2 - 3q_0 \frac{z_2^2}{2} \qquad 0 < z_2 \leq 4b$$

LA LINEA ELASTICA È QUINDI $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$

$$\left.\begin{aligned} v_1''(z_1) &= 0 \\ v_1'(z_1) &= A_1 \\ v_1(z_1) &= A_1 z_1 + A_2 \end{aligned}\right\} \quad 0 \le z_1 < b$$

NOTA: $v''(z_1) = 0$ NON COMPORTA CHE $v(z_1) = 0$!

$$\left.\begin{aligned} v_2''(z_2) &= -\frac{M_x}{EJ} = \frac{3q_0 z_2^2}{2EJ_x} - \frac{6q_0 b z_2}{EJ_x} \\ v_2'(z_2) &= \frac{q_0 z_2^3}{2EJ_x} - \frac{3q_0 b z_2^2}{EJ_x} + B_1 \\ v_2(z_2) &= \frac{q_0 z_2^4}{8EJ_x} - \frac{q_0 b z_2^3}{EJ_x} + B_1 z_2 + B_2 \end{aligned}\right\} \quad 0 < z_2 \le 4b$$

LE C.C. SONO:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} v|_B &= 0 \\ v|_D &= 0 \end{aligned}\right\} & \Leftarrow \text{PER I VINCOLI ESTERNI IN (B) E (C)} \\ \left.\begin{aligned} v|_{B^-} &= v|_{B^+} \\ v'|_{B^-} &= v'|_{B^+} \end{aligned}\right\} & \text{PER IL VINCOLO INTERNO (SALDATURA) IN (B)} \end{cases}$$

NE SEGUE:

$$\begin{cases} v_1(z_1 = b) = 0 \\ v_2(z_2 = 4b) = 0 \\ v_1(z_1 = b) = v_2(z_2 = 0) \\ v_1'(z_1 = b) = v_2'(z_2 = 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 b + A_2 = 0 \\ \frac{\cancel{256}^{32} q_0 b^4}{\cancel{8}EJx} - \frac{64 q_0 b^4}{EJx} + B_1 \cdot 4b + B_2 = 0 \\ A_1 b + A_2 = B_2 \\ A_1 = B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 b + A_2 = 0 \\ B_2 = 0 \\ A_1 = B_1 \\ \cancel{4b} B_1 = + \frac{\cancel{32}^{8} q_0 b^{\cancel{4}\,3}}{EJx} \end{cases}$$

PERTANTO $B_1 = +\frac{8q_0 b^3}{EJx}$; $B_2 = 0$; $A_1 = +\frac{8q_0 b^3}{EJx}$; $A_2 = -\frac{8q_0 b^4}{EJx}$

DUNQUE

$$v_1(z_1) = +\frac{8q_0 b^3}{EJx} z_1 - \frac{8q_0 b^4}{EJx} \quad ; \quad v_1'(z_1) = +\frac{8q_0 b^3}{EJ_x} \qquad 0 \le z_1 < b$$

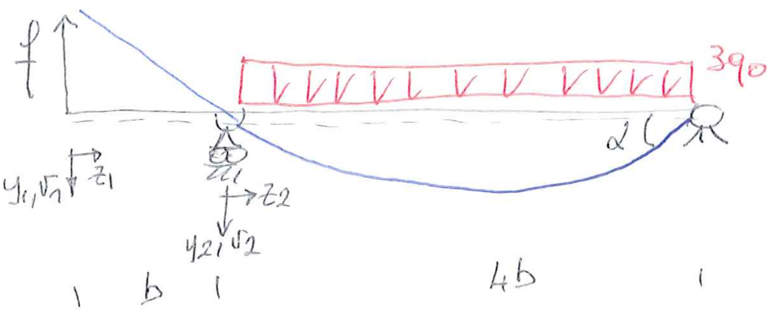
$$v_2(z_2) = \frac{q_0 z_2^4}{8EJ_x} - \frac{q_0 b z_2^3}{EJ_x} + \frac{8q_0 b^3}{EJx} z_2 \quad ; \quad v_2'(z_2) = \frac{q_0 z_2^3}{2EJx} - \frac{3q_0 b z_2^2}{EJx} + \frac{8q_0 b^3}{EJx} \qquad 0 < z_2 \le 4b$$

LO SPOSTAMENTO VERTICALE IN (A) E LA ROTAZIONE IN (C) VALGONO RISPETTIVAMENTE:

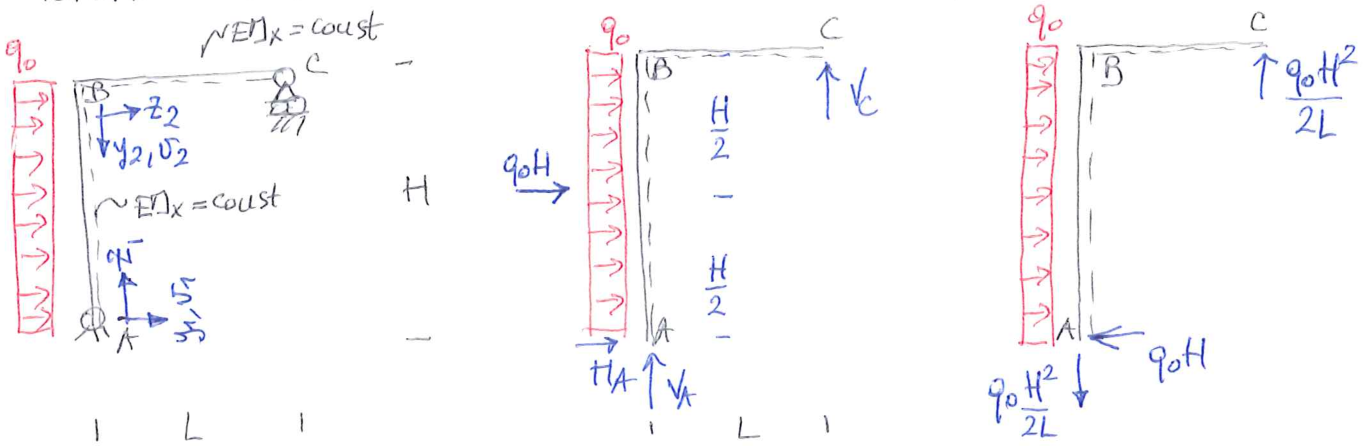
$$f = v_1(z_1 = 0) = -\frac{8q_0 b^4}{EJx}$$ ← LA ESTREMITÀ (A) SI SOLLEVA!

$$v_2'(z_2 = 4b) = \frac{\cancel{64}^{32} q_0 b^3}{\cancel{2}EJx} - \frac{48 q_0 b^3}{EJx} + \frac{8q_0 b^3}{EJx} = -\frac{8q_0 b^3}{EJx}$$

GRAFICAMENTE LA SITUAZIONE È QUESTA:



4. - PORTALE ZOPPO SOGGETTO A CARICO DISTRIBUITO.

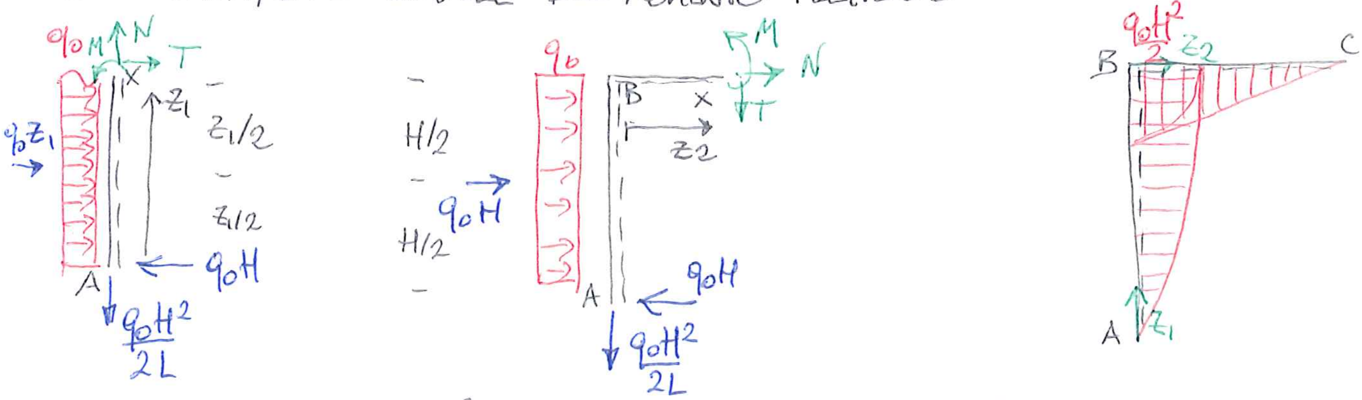


L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA PUÒ ESSERE UTILIZZATA PER STUDIARE STRUTTURE COMPLESSE, PER LE QUALI SI TIENE CONTO DEL COMPORTAMENTO FLESSIONALE, CONSIDERANDO, IN TERMINI CINEMATICI, SPOSTAMENTI TRASVERSALI E ROTAZIONI.

PER LE REAZIONI VINCOLARI SI HA:

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A + q_0 H = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A + V_C = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & -q_0 \frac{H^2}{2} + V_C \cdot L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -q_0 H \\ V_C = q_0 \frac{H^2}{2L} \\ V_A = -q_0 \frac{H^2}{2L} \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO SI POSSONO DETERMINARE LE ESPRESSIONI DELLE AZIONI INTERNE, E SEGNATAMENTE QUELLE DEL MOMENTO FLETTENTE:



$$M_x(z_1) = q_0 H z_1 - q_0 \frac{z_1^2}{2} \qquad M_x(z_2) = q_0 \frac{H^2}{2} - \frac{q_0 H^2}{2L} z_2$$

$$0 \leq z_1 \leq H \qquad 0 \leq z_2 \leq L$$

PER QUANTO RIGUARDA L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA, SI HA:

$$\left.\begin{aligned}
v_1''(z_1) &= \frac{q_0 z_1^2}{2EJ_x} - \frac{q_0 H z_1}{EJ_x}\\
v_1'(z_1) &= \frac{q_0 z_1^3}{6EJ_x} - \frac{q_0 H z_1^2}{2EJ_x} + A_1\\
v_1(z_1) &= \frac{q_0 z_1^4}{24EJ_x} - \frac{q_0 H z_1^3}{6EJ_x} + A_1 z_1 + A_2
\end{aligned}\right\} \quad 0 \le z_1 \le H$$

$$\left.\begin{aligned}
v_2''(z_2) &= \frac{q_0 H^2 z_2}{2LEJ_x} - \frac{q_0 H^2}{2EJ_x}\\
v_2'(z_2) &= \frac{q_0 H^2 z_2^2}{4LEJ_x} - \frac{q_0 H^2 z_2}{2EJ_x} + B_1\\
v_2(z_2) &= \frac{q_0 H^2 z_2^3}{12LEJ_x} - \frac{q_0 H^2 z_2^2}{4EJ_x} + B_1 z_2 + B_2
\end{aligned}\right\} \quad 0 \le z_2 \le L$$

LE C.C. IMPONGONO, PER I VINCOLI ESTERNI IN A E C

$$\begin{cases} v_1(z_1 = 0) = 0 \\ v_2(z_2 = L) = 0 \end{cases}$$

IL VINCOLO INTERNO IN B IMPONE INVECE:

$$\begin{cases} v_1'(z_1 = H) = v_2'(z_2 = 0) \\ v_2(z_2 = 0) = 0 \qquad [*] \end{cases}$$

IN QUANTO NEL NODO B LE DUE PARTI DELLA STRUTTURA (PILASTRO E TRAVE) DEVONO MANTENERSI PERPENDICOLARI. LA SECONDA CONDIZIONE IMPONE, SE LE TRAVI SONO INESTENSIBILI (CIOÈ INDEFORMABILI ASSIALMENTE) CHE IL PUNTO B NON POSSA SUBIRE SPOSTAMENTI VERTICALI.

SI HA DUNQUE:

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ \dfrac{q_0 H^2 L^2}{12EJ_x} - \dfrac{q_0 H^2 L^2}{4EJ_x} + B_1 L + \cancel{B_2} = 0 \\ \dfrac{q_0 H_1^3}{6EJ_x} - \dfrac{q_0 H_1^3}{2EJ_x} + A_1 = B_1 \\ B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ B_2 = 0 \\ B_1 \cancel{L} = \dfrac{q_0 H^2 L^{\cancel{2}}}{6EJ_x} \\ A_1 = \dfrac{q_0 H^2 L}{6EJ_x} + \dfrac{q_0 H_1^3}{3EJ_x} \end{cases}$$

SI HA COSÌ L'EQUAZIONE COMPLETA DELLA LINEA ELASTICA:

$$v_1(z_1) = \frac{q_0 z_1^4}{24EJ_x} - \frac{q_0 H z_1^3}{6EJ_x} + \left(\frac{q_0 H^2 L}{6EJ_x} + \frac{q_0 H_1^3}{3EJ_x}\right) z_1 ; \qquad v_1'(z_1) = \frac{q_0 z_1^3}{6EJ_x} - \frac{q_0 H z_1^2}{2EJ_x} + \frac{q_0 H^2 L}{6EJ_x} + \frac{q_0 H_1^3}{3EJ_x}$$

$0 \le z_1 \le H$

$$v_2(z_2) = \frac{q_0 H^2 z_2^3}{12LEJ_x} - \frac{q_0 H^2 z_2^2}{4EJ_x} + \frac{q_0 H^2 L}{6EJ_x} z_2 ; \qquad v_2'(z_2) = \frac{q_0 H^2 z_2^2}{4LEJ_x} - \frac{q_0 H^2 z_2}{2EJ_x} + \frac{q_0 H^2 L}{6EJ_x}$$

$0 \le z_2 \le L$

LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DEL PUNTO (B), COINCIDENTE, NELL'IPOTESI DI INESTENSIBILITÀ, CON QUELLO DEL PUNTO (C) VALE:

$$u_B = v_1(z_1=L) = \frac{q_0H^4}{24EJ_x} - \frac{q_0H^4}{6EJ_x} + \frac{q_0H^3L}{6EJ_x} + \frac{q_0H^4}{3EJ_x} = \frac{(1-4+8)q_0H^4}{24EJ_x} + \frac{q_0H^3L}{6EJ_x}$$

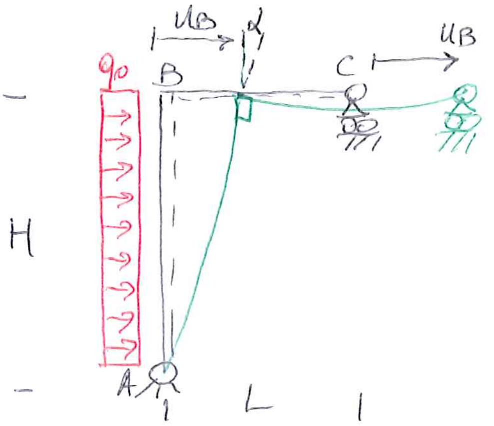
SICCHÉ

$$u_B = v_1(z_1=L) = \frac{5}{24}\frac{q_0H^4}{EJ_x} + \frac{q_0H^3L}{6EJ_x} = \frac{(5H+4L)q_0H^3}{24EJ_x}$$

LA ROTAZIONE DEL "NODO" (B) VALE INVECE:

$$\alpha = v_1'(z_1=L) = v_2'(z_2=0) = \frac{q_0H^2L}{6EJ_x}$$

GRAFICAMENTE LA LINEA ELASTICA È LA SEGUENTE, FORMATA DA UN RAMO DI QUARTICA NELLA TRAVE VERTICALE E DA UN RAMO DI CUBICA NELLA TRAVE ORIZZONTALE:



SI NOTI CHE IL NODO (B) RUOTA (OLTRE A SPOSTARSI IN DIREZIONE ORIZZONTALE) MA IN MODO TALE DA MANTENERE RETTO L'ANGOLO FRA LA TRAVE VERTICALE (PILASTRO) E QUELLA ORIZZONTALE

NOTA 5. SE SI TENESSE CONTO DELLA ESTENSIBILITÀ (DEFORMABILITÀ ASSIALE) DELLE TRAVI, LA C.C. $v_2(z_2=0)=0$ DEVE ESSERE SOSTITUITA DA UNA CONDIZIONE CHE LEGA LO SPOSTAMENTO TRASVERSALE w(B) DELLA TRAVE BC ALLA DEFORMAZIONE ASSIALE DELLA TRAVE AB.
LA COSA È SEMPLICE PER TRAVI ASSIALMENTE ISOSTATICHE, COME IN QUESTO CASO.

SI HA INFATTI CHE LA TRAVE AB È SOGGETTA A UN'AZIONE ASSIALE $N = +\frac{q_0H^2}{2L}$ (POSITIVA, CIOÈ DI TRAZIONE).
LA TRAVE È ALLORA SOGGETTA A UNO SFORZO NORMALE CENTRATO $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{q_0H^2}{2LA}$, E SUBIREBBE UNA DEFORMAZIONE $\varepsilon_z = \frac{N}{EA} = \frac{q_0H^2}{2LEA}$, COSTANTE PER TUTTA LA TRAVE
CIÒ PRODURREBBE UN ALLUNGAMENTO $\Delta L = \frac{NH}{EA} = \frac{q_0H^3}{2LEA}$.

A FRONTE DI QUESTO ALLUNGAMENTO, IL PUNTO B SUBIREBBE UNO SPOSTAMENTO VERSO L'ALTO (SE $\Delta L>0$, CIOÈ SE $N>0$) PARI A ΔL.

LA CONDIZIONE AL CONTORNO [*] SAREBBE QUINDI SOSTITUITA DA:

$$v_2(z_2=0) = -\Delta L = -\frac{q_0\frac{H^3}{2L}}{EA} \implies B_2 = \frac{-q_0\frac{H^3}{2L}}{EA}.$$

SI OSSERVI PERÒ CHE GENERALMENTE LA DEFORMABILITÀ ASSIALE È MOLTO PIÙ PICCOLA DI QUELLA FLESSIONALE E QUINDI PUÒ ESSERE TRASCURATA

D) TRAVI IPERSTATICHE.

L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA PUÒ ESSERE IMPIEGATA PER RISOLVERE STRUTTURE IPERSTATICHE PER EFFETTO DI VINCOLI SOVRABBONDANTI CHE INTRODUCONO COPPIE E/O FORZE TRASVERSALI CHE NON SONO DETERMINABILI CON SOLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO.

NON PUÒ INVECE ESSERE IMPIEGATO IN PRESENZA DI TRAVI O STRUTTURE <u>ASSIALMENTE</u> IPERSTATICHE, COME IN QUESTO ESEMPIO

IN QUANTO È RICHIESTO CHE LA STRUTTURA SIA SOLLECITATA A FLESSIONE.

PER RISOLVERE CON IL METODO DELLA LINEA ELASTICA UNA TRAVE UNA VOLTA IPERSTATICA SI SEGUE QUESTO PROCEDIMENTO:

1) SI ELIMINA LA CONDIZIONE DI IPERSTATICITA' DEGRADANDO OPPORTUNAMENTE UN VINCOLO (OPPURE INTRODUCENDO UNO "SVINCOLO" INTERNO) E METTENDO IN EVIDENZA, COME UNA FORZA/COPPIA INCOGNITA L'AZIONE ORIGINARIAMENTE ESERCITATA DAL VINCOLO SOVRABBONDANTE. NEL CASO DI "SVINCOLAMENTO" OCCORRE RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE INTRODUCENDO L'INCOGNITA SU ENTRAMBI I LEMBI DEL PUNTO DOVE È STATO DEGRADATO IL VINCOLO INTERNO.
È <u>ESSENZIALE</u> CHE LA STRUTTURA COSÌ OTTENUTA SIA <u>ISOSTATICA E NON LABILE</u>.

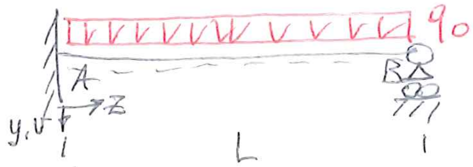
2). SI DETERMINA L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE DELLA STRUTTURA ISOSTATICA OTTENUTA AL PUNTO 1.). IL MOMENTO FLETTENTE DIPENDERÀ IN GENERALE DAI CARICHI ESTERNI E DALL'AZIONE INCOGNITA INTRODOTTA.

3.) SI INTEGRA L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA (EVENTUALMENTE PER TRATTI SEPARATI SE SONO PRESENTI VINCOLI INTERNI E/O SE L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE NON È UNICA PER L'INTERA TRAVE) E SI INTRODUCONO LE C.C. RELATIVE ALLA STRUTTURA RESA ISOSTATICA: IN QUESTO MODO SI GIUNGE A DETERMINARE UNIVOCAMENTE TUTTE LE COSTANTI DI INTEGRAZIONE, MA L'ESPRESSIONE DELLA LINEA ELASTICA DIPENDERÀ DALL'AZIONE INCOGNITA INTRODOTTA NEL PUNTO 1.

4.) SI INTRODUCE A QUESTO PUNTO LA CONDIZIONE CINEMATICA (CONDIZIONE DI CONGRUENZA) DEL VINCOLO SOVRABBONDANTE CHE, SE RISULTA SODDISFATTA, FA SÌ CHE LA STRUTTURA RESA ISOSTATICA SI COMPORTI COME LA STRUTTURA (IPERSTATICA) ASSEGNATA: SI OTTIENE UNA EQUAZIONE, NELL'INCOGNITA IPERSTATICA, CHE RISOLTA NE DEFINISCE IL VALORE. SI PUÒ QUINDI AFFERMARE CHE FRA TUTTI I POSSIBILI VALORI DELL'AZIONE INCOGNITA, CHE SEMPRE SODDISFANO L'EQUILIBRIO, QUELLO COSÌ DETERMINATO SODDISFA ANCHE IL VINCOLO SOVRABBONDANTE.

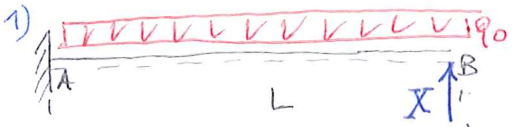
NEL CASO DI STRUTTURE PIÙ VOLTE IPERSTATICHE (P.ES. N VOLTE IPERSTATICHE) SI SEGUE IL PROCEDIMENTO SOPRA DELINEATO EVIDENZIANDO <u>TUTTE</u> LE **N** AZIONI IPERSTATICHE E OTTENENDO UNA STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE.
DETERMINANDO L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE, E INTEGRANDO CON LE C.C. CORRISPONDENTI ALLA STRUTTURA ISOSTATICA L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA, SI OTTIENE UN'ESPRESSIONE CHE DIPENDE DALLE N AZIONI IPERSTATICHE.
SE ORA SI INTRODUCONO LE N CORRISPONDENTI <u>CONDIZIONI DI CONGRUENZA</u> SI OTTIENE UN SISTEMA DI N EQUAZIONI IN N INCOGNITE CHE, RISOLTO, FORNISCE LA SOLUZIONE LINEARE CERCATA. DA QUI SI POSSONO DETERMINARE LE AZIONI INTERNE IN TUTTI I PUNTI.

1. TRAVE INCASTRO – APPOGGIO SOGGETTA A CARICO DISTRIBUITO.

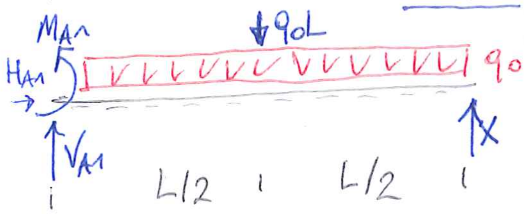


LA STRUTTURA È UNA VOLTA IPERSTATICA: SI PRESENTANO IN PARALLELO IL PROCEDIMENTO RISOLUTIVO PER TRE DIVERSE SCELTE (TUTTE LECITE POICHÉ DANNO LUOGO A STRUTTURE ISOSTATICHE NON LABILI) DELL'AZIONE IPERSTATICA

1)

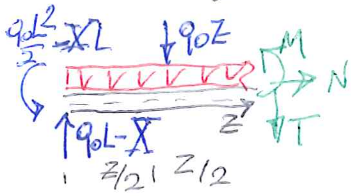


CONDIZIONE DI CONGRUENZA: $v(B)=0$



$$\begin{cases} \rightarrow R_z=0 & H_{A1}=0 \\ \uparrow R_y=0 & V_{A1}+X-q_0L=0 \\ M_{x(A)}=0 & M_{A1}-\dfrac{q_0L^2}{2}+XL=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{A1}=0 \\ V_{A1}=q_0L-X \\ M_{A1}=\dfrac{q_0L^2}{2}-XL \end{cases}$$



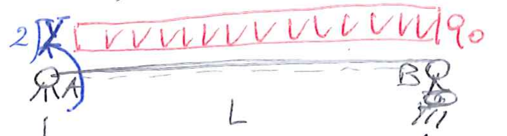
$$N(z)=0$$
$$T(z)=q_0L-q_0z-X$$
$$M(z)=-\frac{q_0L^2}{2}+q_0Lz-q_0\frac{z^2}{2}-Xz+XL$$
$$v''(z)=\frac{q_0L^2}{2EJ_x}-\frac{q_0Lz}{EJ_x}+\frac{q_0z^2}{2EJ_x}+\frac{Xz}{EJ_x}-\frac{XL}{EJ_x}$$
$$v'(z)=\frac{q_0L^2z}{2EJ_x}-\frac{q_0Lz^2}{2EJ_x}+\frac{q_0z^3}{6EJ_x}+\frac{Xz^2}{2EJ_x}-\frac{XLz}{EJ_x}+A_1$$
$$v(z)=\frac{q_0L^2z^2}{4EJ_x}-\frac{q_0Lz^3}{6EJ_x}+\frac{q_0z^4}{24EJ_x}+\frac{Xz^3}{6EJ_x}-\frac{XLz^2}{2EJ_x}+A_1z+A_2$$

C.C.

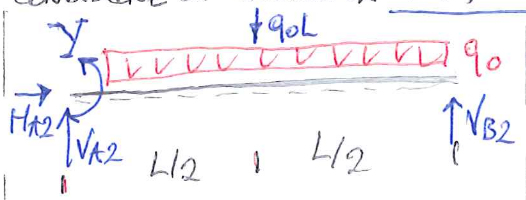
$$\begin{cases} v(z=0)=0 & A_2=0 \\ v'(z=0)=0 & A_1=0 \end{cases}$$

$A_1=0;\ A_2=0$

2)

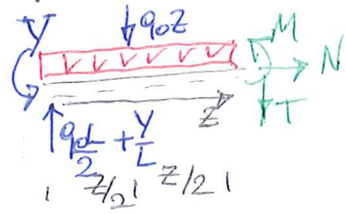


CONDIZIONE DI CONGRUENZA: $v'(A)=0$



$$\begin{cases} \rightarrow R_z=0 & H_{A2}=0 \\ \uparrow R_y=0 & V_{A2}-q_0L+V_{B2}=0 \\ M_{x(A)}=0 & Y-\dfrac{q_0L^2}{2}+V_{B2}L=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{A2}=0 \\ V_{A2}=\dfrac{q_0L}{2}+\dfrac{Y}{L} \\ V_{B2}=\dfrac{q_0L}{2}-\dfrac{Y}{L} \end{cases}$$



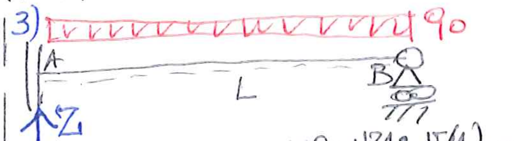
$$N(z)=0$$
$$T(z)=\frac{q_0L}{2}-q_0z+\frac{Y}{L}$$
$$M(z)=\frac{q_0L}{2}z-q_0\frac{z^2}{2}+\frac{Y}{L}z-Y$$
$$v''(z)=-\frac{q_0Lz}{2EJ_x}+\frac{q_0z^2}{2EJ_x}-\frac{Yz}{LEJ_x}+\frac{Y}{EJ_x}$$
$$v'(z)=-\frac{q_0Lz^2}{4EJ_x}+\frac{q_0z^3}{6EJ_x}-\frac{Yz^2}{2LEJ_x}+\frac{Yz}{EJ_x}+B_1$$
$$v(z)=-\frac{q_0Lz^3}{12EJ_x}+\frac{q_0z^4}{24EJ_x}-\frac{Yz^3}{6LEJ_x}+\frac{Yz^2}{2EJ_x}+B_1z+B_2$$

C.C.

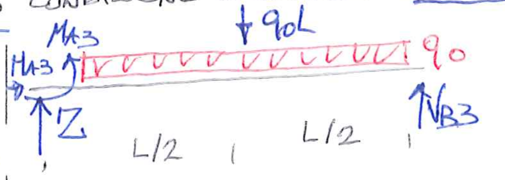
$$\begin{cases} v(z=0)=0 & B_2=0 \\ v(z=L)=0 & -\dfrac{q_0L^4}{12EJ_x}+\dfrac{q_0L^4}{24EJ_x}-\dfrac{YL^2}{6EJ_x}+\dfrac{YL^2}{2EJ_x}+B_1L=0 \end{cases}$$

$B_2=0;\ B_1=\dfrac{q_0L^3}{24EJ_x}-\dfrac{YL}{3EJ_x}$

3)

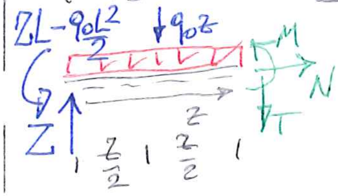


CONDIZIONE DI CONGRUENZA: $v(A)=0$



$$\begin{cases} \rightarrow R_z=0 & H_{A3}=0 \\ \uparrow R_y=0 & Z-q_0L+V_{B3}=0 \\ M_{x(A)}=0 & M_{A3}-\dfrac{q_0L^2}{2}+V_{B3}L=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{A3}=0 \\ V_{B3}=q_0L-Z \\ M_{A3}=ZL-\dfrac{q_0L^2}{2} \end{cases}$$



$$N(z)=0$$
$$T(z)=Z-q_0z$$
$$M(z)=\frac{q_0L^2}{2}-\frac{q_0z^2}{2}+Zz-ZL$$
$$v''(z)=-\frac{q_0L^2}{2EJ_x}+\frac{q_0z^2}{2EJ_x}-\frac{Zz}{EJ_x}+\frac{ZL}{EJ_x}$$
$$v'(z)=-\frac{q_0L^2z}{2EJ_x}+\frac{q_0z^3}{6EJ_x}-\frac{Zz^2}{2EJ_x}+\frac{ZLz}{EJ_x}+C_1$$
$$v(z)=-\frac{q_0L^2z^2}{4EJ_x}+\frac{q_0z^4}{24EJ_x}-\frac{Zz^3}{6EJ_x}+\frac{ZLz^2}{2EJ_x}+C_1z+C_2$$

C.C.

$$\begin{cases} v'(z=0)=0 & C_1=0 \\ v(z=L)=0 & -\dfrac{q_0L^4}{4EJ_x}+\dfrac{q_0L^4}{24EJ_x}-\dfrac{ZL^3}{6EJ_x}+\dfrac{ZL^3}{2EJ_x}+C_2=0 \end{cases}$$

$C_1=0;\ C_2=\dfrac{5}{24}\dfrac{q_0L^4}{EJ_x}-\dfrac{ZL^3}{3EJ_x}$

SI PASSA A IMPORRE, PER CIASCUNO DEI CASI LA CONDIZIONE DI CONGRUENZA.
SI OTTIENE:

1) $v(z=L)=0$

$$\underbrace{\frac{q_0L^4}{4EI_x}-\frac{q_0L^4}{6EI_x}+\frac{q_0L^4}{24EI_x}}_{\frac{1}{8}\cancel{\frac{3}{24}}\frac{q_0L^4}{EI_x}}+\underbrace{\frac{XL^3}{6EI_x}-\frac{XL^3}{2EI_x}}_{-\frac{XL^3}{3EI_x}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\frac{q_0L^{\cancel{4}}}{\cancel{EI_x}}-\frac{X\cancel{L^3}}{3\cancel{EI_x}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{3}{8}q_0L}$$

$H_{A1}=0$

$V_{A1}=q_0L-\frac{3}{8}q_0L=\frac{5}{8}q_0L=Z$

$M_{A1}=\frac{q_0L^2}{2}-\frac{3}{8}q_0L^2=\frac{q_0L^2}{8}=Y$

2) $v'(z=0)=0$

$$B_1=0 \Rightarrow \frac{q_0L^{\cancel{3}\,2}}{24\cancel{EI_x}}-\frac{Y\cancel{L}}{3\cancel{EI_x}}=0$$

$$\frac{q_0L^2}{\cancel{24}\,8}-\frac{Y}{\cancel{3}\,1}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{Y=\frac{q_0L^2}{8}}$$

$H_{A2}=0$

$V_{A2}=\frac{q_0L}{2}+\frac{q_0L}{8}=\frac{5}{8}q_0L$

$V_{B2}=\frac{q_0L}{2}-\frac{q_0L}{8}=\frac{3}{8}q_0L=X$

3) $v(z=0)=0$

$$C_2=0 \Rightarrow \frac{5}{24}\frac{q_0L^{\cancel{4}}}{\cancel{EI_x}}-\frac{Z\cancel{L^3}}{3\cancel{EI_x}}=0$$

$$\frac{5}{\cancel{24}\,8}q_0L-\frac{Z}{\cancel{3}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{Z=\frac{5}{8}q_0L}$$

$H_{A3}=0$

$V_{B3}=q_0L-\frac{5}{8}q_0L=\frac{3}{8}q_0L=X$

$M_{A3}=-\frac{q_0L^2}{2}+\frac{5}{8}q_0L^2=\frac{q_0L^2}{8}=Y$

SI VEDE QUINDI CHE I VALORI DELLE REAZIONI VINCOLARI NON DIPENDONO DALLA SCELTA DELL'INCOGNITA IPERSTATICA.

I VALORI DELLE AZIONI INTERNE SONO ALLORA (SI FA RIFERIMENTO AL CASO 1), MA GLI STESSI RISULTATI SI OTTENGONO NEI CASI 2) E 3); LA VERIFICA E' LASCIATA AL LETTORE.

$$N(z)=0$$

$$T(z)=q_0L-q_0z-\frac{3}{8}q_0L \Rightarrow T(z)=\frac{5}{8}q_0L-q_0z$$

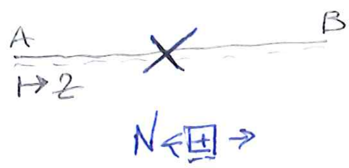
$$M(z)=-\frac{q_0L^2}{2}+q_0Lz-\frac{q_0z^2}{2}+\frac{3}{8}q_0L^2-\frac{3}{8}q_0Lz \Rightarrow M(z)=-\frac{q_0L^2}{8}+\frac{5}{8}q_0Lz-\frac{q_0z^2}{2}$$

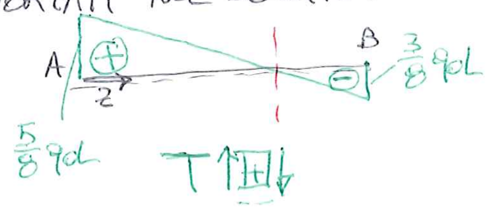
SI OSSERVI CHE, COME DEVE RISULTARE PER LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO IN SEDE INDEFINITA SI HA:

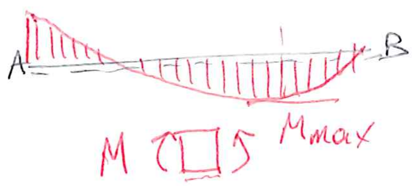
$$\frac{dT(z)}{dz}=-q_0=-q(z)$$

$$\frac{dM}{dz}=\frac{5}{8}q_0L-q_0z=T(z)$$

I DIAGRAMMI SONO RIPORTATI NEL SEGUITO:





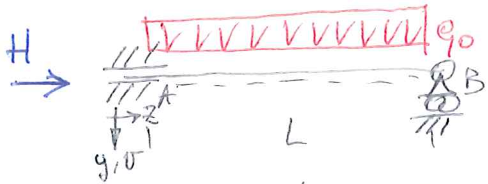


LA DEFORMATA ELASTICA E' INVECE:

$$v(z)=\frac{q_0z^4}{24EI_x}-\frac{5q_0Lz^3}{48EI_x}+\frac{q_0L^2z^2}{16EI_x} \qquad v'(z)=\frac{q_0z^3}{6EI_x}-\frac{5q_0Lz^2}{16EI_x}+\frac{q_0L^2z}{8EI_x}$$

NOTA 6. SI OSSERVI CHE ACCANTO A INFINITE SCELTE CORRETTE DELL'INCOGNITA IPERSTATICA VE NE SONO ANCHE DI ERRATE: TUTTE QUELLE CHE PRODUCONO, COME RISULTATO UNA STRUTTURA "DI SERVIZIO" CHE NON SIA ISOSTATICA O CHE SIA LABILE.

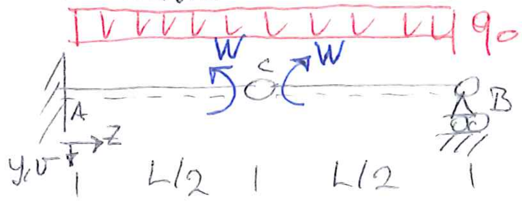
UN ESEMPIO BANALE PER ILLUSTRARE QUESTO CONCETTO È IL SEGUENTE:



H NON È UN'INCOGNITA VALIDA PERCHÉ PUÒ ESSERE DETERMINATA CON CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E PERCHÉ LA STRUTTURA COSÌ OTTENUTA È LABILE

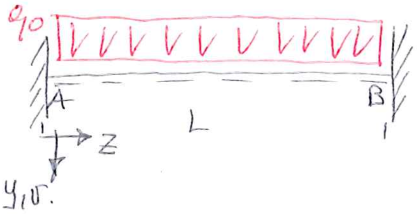
$\widehat{R_Z} = 0$ IMPONE $H = 0$!

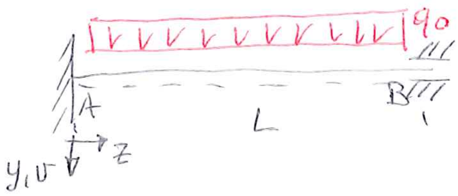
SAREBBE INVECE LECITO SCEGLIERE COME INCOGNITA IPERSTATICA IL MOMENTO FLETTENTE IN UNA SEZIONE INTERMEDIA, PER ESEMPIO QUELLA IN MEZZERIA:



IN QUESTO CASO LA CONDIZIONE DI CONGRUENZA È: $v'(c^-) = v'(c^+)$ OVVERO $\Delta v'(c) = 0$. $\square$

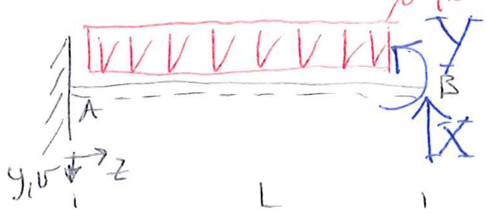
2. TRAVE DOPPIAMENTE INCASTRATA SOGGETTA A CARICO UNIFORME:

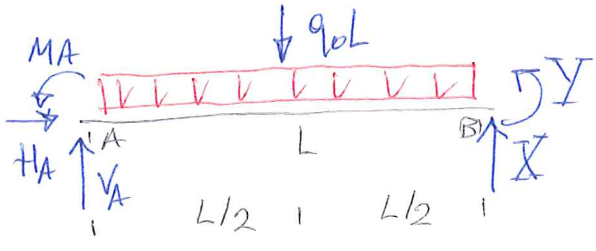




IN ASSENZA DI CARICO ASSIALE È EQUIVALENTE ALLA STRUTTURA SOPRA INDICATA (TRAVE INCASTRO-MANICOTTO) CHE È 2 VOLTE IPERSTATICA E PUÒ ESSERE RISOLTA CON L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA.

UNA VALIDA SCELTA DELLA STRUTTURA AUSILIARIA (TRAVE ISOSTATICA NON LABILE) È LA SEGUENTE:



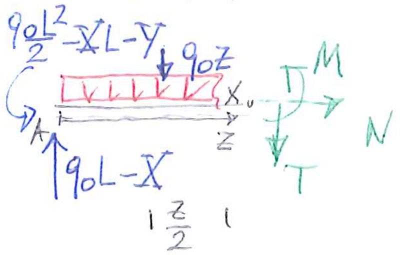


LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA (UNA PER OGNI IPERSTATICA) SONO: $\begin{cases} v(z=L) = 0 \\ v'(z=L) = 0 \end{cases}$

LE REAZIONI VINCOLARI SONO:

$$\begin{cases} \rightarrow R_z = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0 L + X = 0 \\ \circlearrowleft M_{x(A)} = 0 & M_A - q_0 \frac{L^2}{2} + XL + Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = q_0 L - X \\ M_A = \frac{q_0 L^2}{2} - XL - Y \end{cases}$$

SEGUE POI:



$$\left.\begin{aligned} N(z) &= 0 \\ T(z) &= q_0L - q_0z - X \\ M(z) &= -\frac{q_0L^2}{2} + q_0Lz - \frac{q_0z^2}{2} + XL - Xz + Y \end{aligned}\right\} \quad 0 \le z \le L$$

L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA DIVIENE:

$$v''(z) = \frac{q_0L^2}{2EJ_x} - \frac{q_0Lz}{EJ_x} + \frac{q_0z^2}{2EJ_x} - \frac{XL}{EJ_x} + \frac{Xz}{EJ_x} - \frac{Y}{EJ_x} \qquad 0 \le z \le L$$

$$v'(z) = \frac{q_0L^2z}{2EJ_x} - \frac{q_0Lz^2}{2EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} - \frac{XLz}{EJ_x} + \frac{Xz^2}{2EJ_x} - \frac{Yz}{EJ_x} + \cancel{C_1}$$

$$v(z) = \frac{q_0L^2z^2}{4EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{6EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} - \frac{XLz^2}{2EJ_x} + \frac{Xz^3}{6EJ_x} - \frac{Yz^2}{2EJ_x} + \cancel{C_1}z + \cancel{C_2}$$

⇐ EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA DELLA STRUTTURA ISOSTATICA "DI SERVIZIO".

LE C.C. DELLA STRUTTURA ISOSTATICA SONO, PER IL VINCOLO IN A:

$$\begin{cases} v(z=0) = 0 \\ v'(z=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

RESTANO DA IMPORRE LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA, CORRISPONDENTI AI VINCOLI SOVRABBONDANTI, ORIGINARIAMENTE PRESENTI IN B:

$$\begin{cases} v'(z=L) = 0 & \cancel{\frac{q_0L^3}{2EJ_x}} - \cancel{\frac{q_0L^3}{2EJ_x}} + \frac{q_0L^3}{6EJ_x} - \frac{XL^2}{EJ_x} + \frac{XL^2}{2EJ_x} - \frac{YL}{EJ_x} = 0 \\ v(z=L) = 0 & \frac{q_0L^4}{4EJ_x} - \frac{q_0L^4}{6EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} - \frac{XL^3}{2EJ_x} + \frac{XL^3}{6EJ_x} - \frac{YL^2}{2EJ_x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{q_0L^{\cancel{3}\,2}}{6\cancel{EJ_x}} - \frac{XL^{\cancel{2}}}{2\cancel{EJ_x}} - \frac{Y\cancel{L}}{\cancel{EJ_x}} = 0 \\ \frac{q_0L^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{24EJ_x}\,8}\underbrace{(6-4+1)}_{\cancel{3}} - \frac{XL^{\cancel{3}}}{3\cancel{6EJ_x}}\underbrace{(3-1)}_{\cancel{2}} - \frac{YL^{\cancel{2}}}{2\cancel{EJ_x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{XL}{2} + Y = \frac{q_0L^2}{6} \\ \frac{XL}{3} + \frac{Y}{2} = \frac{q_0L^2}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{XL}{2} + Y = \frac{q_0L^2}{6} & [*] \\ 2\frac{XL}{3} + Y = \frac{q_0L^2}{4} & [**] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [**]-[*] & 2\frac{XL}{3} - \frac{XL}{2} = \frac{q_0L^2}{4} - \frac{q_0L^2}{6} \\ [*] & Y = \frac{q_0L^2}{6} - \frac{XL}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{X\cancel{L}}{\cancel{6}} = \frac{3-2}{\cancel{12}\,2}q_0L^{\cancel{2}} \\ Y = \frac{q_0L^2}{6} - \frac{XL}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = +\frac{q_0L}{2} \\ Y = \frac{q_0L^2}{6} - \frac{q_0L^2}{4} = \frac{2-3}{12}q_0L^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{X = \frac{q_0L}{2}} \\ \boxed{Y = -\frac{q_0L^2}{12}} \end{cases}$$

SI OTTIENE COSÌ PER LA LINEA ELASTICA:

$$v'(z) = \cancel{\frac{q_0L^2z}{2EJ_x}} - \frac{q_0Lz^2}{2EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x} - \cancel{\frac{q_0L^2z}{2EJ_x}} + \frac{q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0L^2z}{12EJ_x} = \frac{q_0L^2z}{12EJ_x} - \frac{q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0z^3}{6EJ_x}$$

$$v(z) = \cancel{\frac{q_0L^2z^2}{4EJ_x}} - \frac{q_0Lz^3}{6EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x} - \cancel{\frac{q_0L^2z^2}{4EJ_x}} + \frac{q_0Lz^3}{12EJ_x} + \frac{q_0L^2z^2}{24EJ_x} = \frac{q_0L^2z^2}{24EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{12EJ_x} + \frac{q_0z^4}{24EJ_x}$$

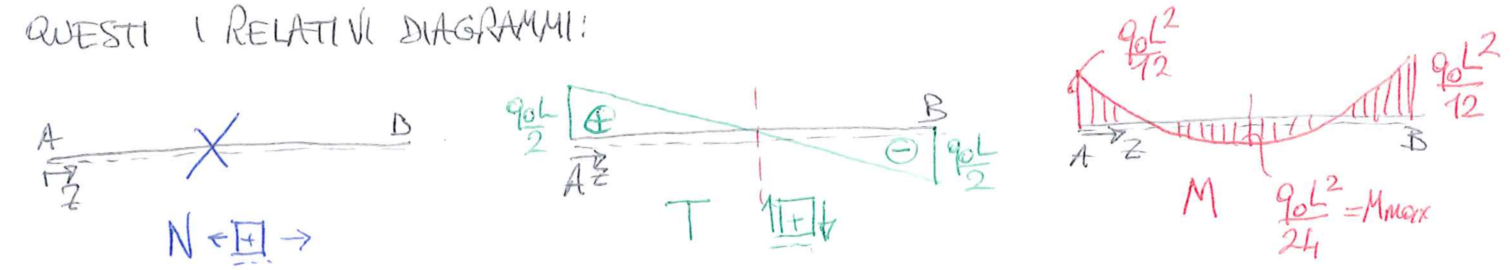
E PER LE AZIONI INTERNE:

$$N(z) = 0$$

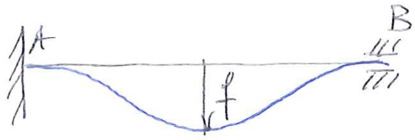
$$T(z) = q_0L - q_0z - \frac{q_0L}{2} = \frac{q_0L}{2} - q_0z$$

$$M(z) = -\cancel{\frac{q_0L}{2}} + q_0Lz - \frac{q_0z^2}{2} + \cancel{\frac{q_0L}{2}} - \frac{q_0Lz}{2} - \frac{q_0L^2}{12} = -\frac{q_0L^2}{12} + \frac{q_0Lz}{2} - \frac{q_0z^2}{2}.$$

QUESTI I RELATIVI DIAGRAMMI:



LA DEFORMATA ELASTICA È UNA QUARTICA, SIMMETRICA RISPETTO ALLA MEZZERIA:

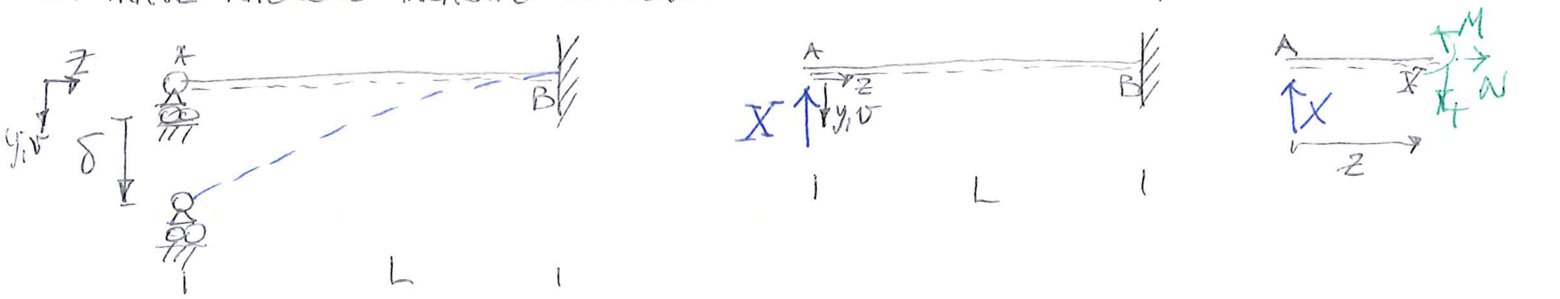


SI TROVA FACILMENTE

$$f = v\left(z = \frac{L}{2}\right) = \cancel{\frac{q_0L^4}{96EJ_x}} - \cancel{\frac{q_0L^4}{96EJ_x}} + \frac{q_0L^4}{384EJ_x} = \frac{1}{384}\frac{q_0L^4}{EJ_x}$$

CIOÈ $\frac{1}{5}$ DELLA FRECCIA DI UNA TRAVE APPOGGIATA DI PARI LUCE E SOGGETTA AL MEDESIMO CARICO.

3. TRAVE APPOGGIO INCASTRO SOGGETTA A UN CEDIMENTO IMPRESSO, DI ENTITÀ δ ALL'APPOGGIO



LA STRUTTURA AUSILIARIA (ISOSTATICA NON LABILE) È INDICATA IN FIGURA.
LA CONDIZIONE DI CONGRUENZA È:

$$v(z=0) = +\delta \quad [\cdot] \text{ (CEDIMENTO IMPRESSO VERSO IL BASSO)}$$

LE AZIONI INTERNE SI DETERMINANO DIRETTAMENTE, E RISULTANO:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = +X$$

$$M(z) = Xz$$

L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA DIVIENE:

$$v''(z) = -\frac{X z}{EJ_x}$$

$$v'(z) = -\frac{X z^2}{2EJ_x} + C_1 \qquad 0 \le z \le L$$

$$v(z) = -\frac{X z^3}{6EJ_x} + C_1 z + C_2$$

LE C.C. IMPOSTE DAL VINCOLO (B) NELLA STRUTTURA ISOSTATICA SONO:

$$\begin{cases} v(z=L) = 0 \\ v'(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{X L^3}{6EJ_x} + C_1 L + C_2 = 0 \\ -\frac{X L^2}{2EJ_x} + C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{X L^2}{2EJ_x} \\ C_2 = \frac{X L^3}{6EJ_x} - \frac{X L^3}{2EJ_x} = -\frac{X L^3}{3EJ_x} \end{cases}$$

SI HA DUNQUE:

$$v(z) = -\frac{X z^3}{6EJ_x} + \frac{X L^2}{2EJ_x} z - \frac{X L^3}{3EJ_x} \quad ; \quad v'(z) = -\frac{X z^2}{2EJ_x} + \frac{X L^2}{2EJ_x}$$

LA CONDIZIONE DI CONGRUENZA [•] COMPORTA

$$v(z=0) = +\delta \Rightarrow -\frac{X L^3}{3EJ_x} = \delta \Rightarrow \boxed{X = -\frac{3EJ_x \delta}{L^3}}$$

LA LINEA ELASTICA RISULTA QUINDI:

$$v(z) = \delta\left(\frac{z^3}{2L^3} - \frac{3}{2}\frac{z}{L} + 1\right) \qquad v'(z) = \frac{\delta}{L}\left(\frac{3z^2}{2L^2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{3\delta}{2L}\left(\frac{z^2}{L^2} - 1\right)$$

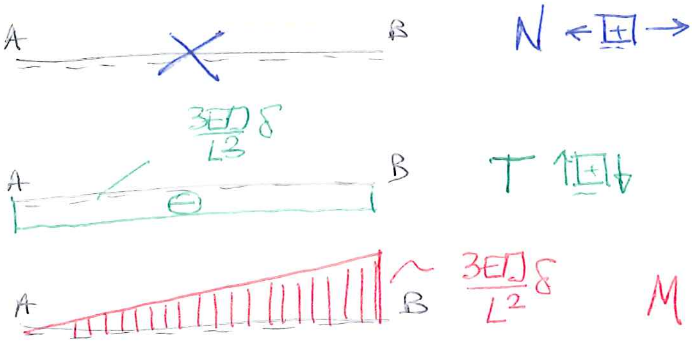
SI VEDE QUINDI CHE IN UNA STRUTTURA IPERSTATICA I CEDIMENTI DEI VINCOLI PRODUCONO UNO STATO DI SOLLECITAZIONE, A DIFFERENZA DI QUANTO AVVIENE IN UNA STRUTTURA ISOSTATICA. LA DEFORMATA ELASTICA E' UN RAMO DI CUBICA.

LE AZIONI INTERNE VALGONO:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = -\frac{3EJ_x}{L^3}\delta$$

$$M(z) = -\frac{3EJ}{L^3} z \delta$$

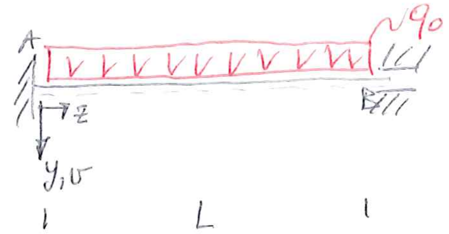


COME QUELLE DEGLI ULTIMI 2 ESEMPI

<u>NOTA 7.</u> PER IL CALCOLO DI STRUTTURE IPERSTATICHE PUO' ESSERE UTILE RICORRERE ALL'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA SCRITTA COME EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 4° ORDINE, IN QUANTO QUESTA NON RICHIEDE IL CALCOLO DELL'ESPRESSIONE DEL MOMENTO FLETTENTE NÉ L'ESIGENZA DI METTERE IN EVIDENZA LE INCOGNITE IPERSTATICHE.

NEL PRIMO CASO SI HA SEMPLICEMENTE

$$v^{IV}(z) = \frac{q_0}{EJ_x}$$



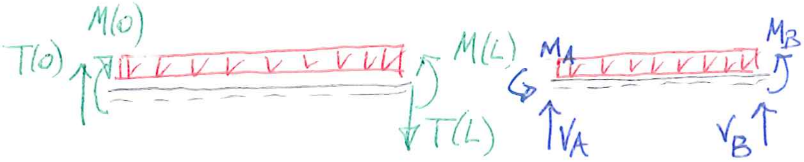
DA CUI SEGUE:

$$v'''(z) = \frac{q_0 z}{EJ_x} + A_1$$

$$v''(z) = \frac{q_0 z^2}{2EJ_x} + A_1 z + A_2$$

$$v'(z) = \frac{q_0 z^3}{6EJ_x} + A_1\frac{z^2}{2} + A_2 z + A_3$$

$$v(z) = \frac{q_0 z^4}{24EJ_x} + A_1\frac{z^3}{6} + A_2\frac{z^2}{2} + A_3 z + A_4$$



$V_A = T(0)$ $\quad V_B = -T(L)$

$M_A = -M(0)$ $\quad M_B = M(L)$

LE C.C. SONO DI INCASTRO IN A E IN B, DUNQUE:

$$\begin{cases} v(z=0) = 0 \\ v'(z=0) = 0 \\ v(z=L) = 0 \\ v'(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_4 = 0 \\ A_3 = 0 \\ \frac{q_0 L^{\cancel{4}2}}{24EJ_x} + A_1\frac{L^{\cancel{3}}}{6} + A_2\frac{\cancel{L^2}}{2} = 0 \\ \frac{q_0 L^{\cancel{3}2}}{6EJ_x} + A_1\frac{L^{\cancel{2}}}{2} + A_2\cancel{L} = 0 \end{cases}$$

DALLE ULTIME 2 EQUAZIONI SEGUE, CON QUALCHE SEMPLIFICAZIONE:

$$\begin{cases} A_1\frac{L}{6} + \frac{A_2}{2} = -\frac{q_0L^2}{24EJ_x} \\ A_1\frac{L}{2} + A_2 = -\frac{q_0L^2}{6EJ_x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1\frac{L}{3} + A_2 = -\frac{q_0L^2}{12EJ_x} & [+] \\ A_1\frac{L}{2} + A_2 = -\frac{q_0L^2}{6EJ_x} & [++] \end{cases}$$

$$[++]-[+] \Rightarrow A_1\underbrace{\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{3}\right)}_{\frac{L}{6}} = \underbrace{-\frac{q_0L^2}{6EJ_x}+\frac{q_0L^2}{12EJ_x}}_{-\frac{q_0L^2}{12EJ_x}} \Rightarrow A_1 = \frac{6}{\cancel{L}}\left(-\frac{q_0L^{\cancel{2}}}{\cancel{12}_{2}EJ_x}\right) \Rightarrow \boxed{A_1 = -\frac{q_0L}{2EJ_x}}$$

$$A_2 = -\frac{q_0L^2}{6EJ_x} - A_1\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{q_0L^2}{6EJ_x} + \frac{q_0L^2}{4EJ_x} \Rightarrow A_2 = \frac{q_0L^2}{EJ_x}\left(\frac{-2+3}{12}\right) \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{q_0L^2}{12EJ_x}}$$

PERTANTO

$$v(z) = \frac{q_0z^4}{24EJ_x} - \frac{q_0Lz^3}{12EJ_x} + \frac{q_0L^2z^2}{24EJ_x}$$

$$v'(z) = \frac{q_0z^3}{6EJ_x} - \frac{q_0Lz^2}{4EJ_x} + \frac{q_0L^2z}{12EJ_x}$$

$$v''(z) = \frac{q_0z^2}{2EJ_x} - \frac{q_0Lz}{2EJ_x} + \frac{q_0L^2}{12EJ_x} \Rightarrow M(z) = -EJ_x v''(z) = -\frac{q_0z^2}{2} + \frac{q_0Lz}{2} - \frac{q_0L^2}{12}$$

$$v'''(z) = \frac{q_0z}{EJ_x} - \frac{q_0L}{2EJ_x} \Rightarrow T(z) = -EJ_x v'''(z) = -q_0z + \frac{q_0L}{2}$$

SI RICONOSCE DALLO SCHEMA DELLA PAGINA PRECEDENTE CHE

$$V_A = T(z=0) = \frac{q_0 L}{2} \qquad M_A = -M(z=0) = \frac{q_0 L^2}{12}$$

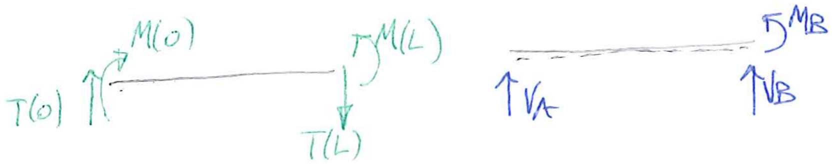
$$V_B = -T(z=L) = +\frac{q_0 L}{2} \qquad M_B = +M(z=L) = -\frac{q_0 L^2}{12}$$

DA QUI SI POSSONO AGEVOLMENTE INDIVIDUARE TUTTE LE COMPONENTI DELLA REAZIONE VINCOLARE.

SIMILMENTE, PER IL SECONDO ESEMPIO SI HA:

$$v^{IV}(z) = 0$$

SEGUE DI QUI:



$$v'''(z) = B_1$$

$$v''(z) = B_1 z + B_2$$

$$v'(z) = \frac{B_1 z^2}{2} + B_2 z + B_3$$

$$v(z) = \frac{B_1 z^3}{6} + B_2 \frac{z^2}{2} + B_3 z + B_4$$

LE C.C. IN B SONO QUELLE DI INCASTRO: $\begin{cases} v(z=L) = 0 \\ v'(z=L) = 0 \end{cases}$; IN A C'È UN APPOGGIO CEDEVOLE.

NE SEGUE: $\begin{cases} v(z=0) = +\delta \\ M(z=0) = 0 \Rightarrow -EJ_x v''(z=0) = 0 \end{cases}$ ← CONDIZIONE NON OMOGENEA: IL VINCOLO NON È PERFETTO

SI HA COSÌ:

$$\begin{cases} v(z=L) = 0 \Rightarrow B_1 \frac{L^3}{6} + B_2 \frac{L^2}{2} + B_3 L + B_4 = 0 \\ v'(z=L) = 0 \Rightarrow B_1 \frac{L^2}{2} + B_2 L + B_3 = 0 \\ v(z=0) = \delta \Rightarrow B_4 = \delta \\ -EJ_x v''(z=0) = 0 \Rightarrow \cancel{-EJ_x} B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_4 = \delta \\ B_2 = 0 \\ B_1 \frac{L^2}{2} + B_3 = 0 \\ B_1 \frac{L^3}{6} + B_3 L = -\delta \end{cases}$$

LE ULTIME 2 EQUAZIONI DIVENGONO $\begin{cases} B_1 \frac{L^3}{2} + B_3 L = 0 & [\circ] \\ B_1 \frac{L^3}{6} + B_3 L = -\delta & [\circ\circ] \end{cases}$ DA CUI SEGUE:

$$[\circ] - [\circ\circ] \Rightarrow B_1 L^3 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{3}} = \delta \qquad \boxed{B_1 = \frac{3\delta}{L^3}} \; ; \; B_3 = -B_1 \frac{L^2}{2} \Rightarrow \boxed{B_3 = -\frac{3}{2}\frac{\delta}{L}}$$

LA LINEA ELASTICA RISULTA DUNQUE

$$v(z) = \frac{1}{2}\frac{z^3}{L^3}\delta - \frac{3}{2}\frac{z}{L}\delta + \delta$$

$$v'(z) = \frac{3}{2}\frac{z^2}{L^3}\delta - \frac{3}{2}\frac{1}{L}\delta$$

$$v''(z) = 3\frac{z}{L^3}\delta \; ; \; v'''(z) = \frac{3\delta}{L^3}$$

E DALLO SCHEMA SOPRA INDICATO SI POSSONO OTTENERE TUTTE LE REAZIONI VINCOLARI:

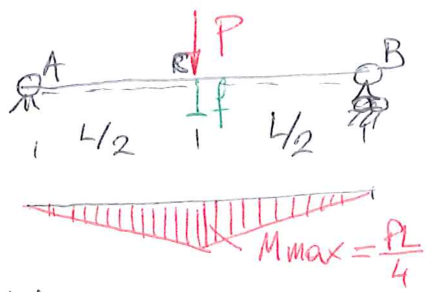
$$V_A = T(z=0) = -EJ_x v'''(z=0) = -EJ_x \cdot \frac{3\delta}{L^3} = -\frac{3EJ_x\delta}{L^3}$$

$$V_B = -T(z=L) = +EJ_x v'''(z=L) = +EJ_x \cdot \frac{3\delta}{L^3} = +\frac{3EJ_x\delta}{L^3}$$

$$M_B = +M(z=L) = -EJ_x v''(z=L) = -EJ_x \cdot \frac{3L}{L^2}\delta = -\frac{3EJ_x\delta}{L^2}.$$

L'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA FORNISCE UN METODO PER CALCOLARE SPOSTAMENTI DI STRUTTURE INFLESSE.
COSTITUISCE QUINDI UN UTILE STRUMENTO PER LA VERIFICA DI DEFORMABILITA' DI TRAVI SOGGETTE A FLESSIONE.

SI CONSIDERI COME ESEMPIO UNA TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA A UNA FORZA CONCENTRATA IN MEZZERIA: NOTE LA LUCE L DELLA TRAVE E IL CARICO P SI TRATTA DI PROGETTARE E VERIFICARE (SIA NEI CONFRONTI DELLA RESISTENZA CHE DELLA DEFORMABILITA') UNA TRAVE METALLICA IN GRADO DI SOSTENERE IN SICUREZZA IL CARICO, MANTENENDO ENTRO LIMITI PREFISSATI LO SPOSTAMENTO MASSIMO.



DATI DEL PROBLEMA:

$L = 4\,m$ (4000 mm); $P = 20\,kN$ (20'000 N); $R' = R'' = 160\,MPa$

$E = 210\,GPa$ (210'000 MPa); $\frac{f}{L} \leq \frac{1}{400}$

SI HA POI:

$$M_{x\,max} = \frac{PL}{4} = M\left(z=\frac{L}{2}\right)$$

$$M_{x\,max} = \frac{20'000 \cdot 4'000}{4} = 20'000'000\ N \cdot mm$$

$$\sigma_{z\,max} = \frac{M_{x\,max}}{W_x}$$

LA VERIFICA DI RESISTENZA RICHIEDE CHE $\sigma_{z\,max} \leq R'$, DUNQUE

$$\frac{M_{x\,max}}{W_x} \leq R' \Rightarrow W_x \geq \frac{M_{x\,max}}{R'} \Rightarrow W_x \geq \frac{20'000'000\ N \cdot mm}{160\ \frac{N}{mm^2}} = 125'000\ mm^3$$

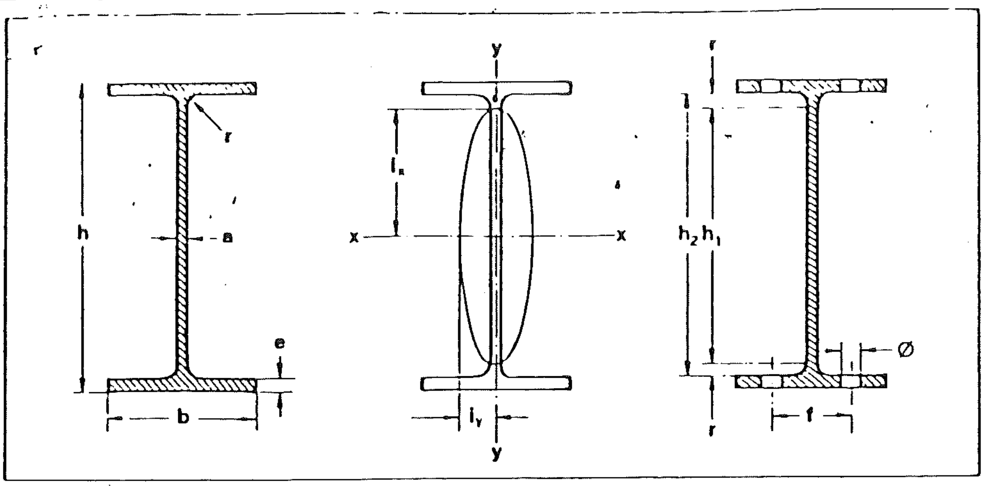
IL MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE MINIMO E' QUINDI PARI A $125'000\ mm^3 = 125\ cm^3$
DAL PROFILARIO IPE SI TROVA CHE LA PRIMA SEZIONE CHE SODDISFA LA VERIFICA DI RESISTENZA E' IPE 180, PER LA QUALE $W_x = 146\ cm^3 = 146'000\ mm^3$ (*) E $J_x = 1317\ cm^4$ OVVERO $J_x = 13'170'000\ mm^4$

PER LA VERIFICA DI DEFORMABILITA' SI HA $f = \frac{PL^3}{48EJ_x} = \frac{20'000 \cdot (4000)^3}{48 \cdot 210'000 \cdot 13'170'000} = 9.642\ mm$

$$\frac{f}{L} = \frac{9.642}{4000} = 0.0024 < \frac{1}{400} = 0.0025 \quad \checkmark$$

LA VERIFICA A DEFORMABILITA' E' DUNQUE SODDISFATTA.

(*) $\sigma_z = \frac{M_{x\,max}}{W_x} = \frac{20'000'000}{146'000} = 136.986\ MPa < R' = 160\ MPa \quad \checkmark$



travi IPE

UNI 5398

profilo	dimensioni							A	P	U	foratura sulle ali			
	h mm	b mm	a mm	e mm	r mm	h_1 mm	h_2 mm	cm^2	kg/m	m^2/m	d mm.	Ø mm	f_{max} mm	f_{min} mm
IPE 80	80	46	3.8	5.2	5	59.6	69.6	7.64	6.00	0.328				
IPE 100	100	55	4.1	5.7	7	74.6	88.6	10.3	8.10	0.400				
IPE 120	120	64	4.4	6.3	7	93.4	107.4	13.2	10.4	0.475				
IPE 140	140	73	4.7	6.9	7	112.2	126.2	16.4	12.9	0.551				
IPE 160	160	82	5.0	7.4	9	127.2	145.2	20.1	15.8	0.623				
IPE 180	180	91	5.3	8.0	9	146.0	164.0	23.9	18.8	0.698	12	13.0	55	48
IPE 200	200	100	5.6	8.5	12	159.0	183.0	28.5	22.4	0.768	14	15.0	58	58
IPE 220	220	110	5.9	9.2	12	177.6	201.6	33.4	26.2	0.848	16	17.0	62	62
IPE 240	240	120	6.2	9.8	15	190.4	220.4	39.1	30.7	0.922	16	17.0	72	69
IPE 270	270	135	6.6	10.2	15	219.6	249.6	45.9	36.1	1.04	18	19.0	81	73
IPE 300	300	150	7.1	10.7	15	248.6	278.6	53.8	42.2	1.16	22	23.5	84	82
IPE 330	330	160	7.5	11.5	18	271.0	307.0	62.6	49.1	1.25	22	23.5	94	88
IPE 360	360	170	8.0	12.7	18	298.6	334.6	72.7	57.1	1.35	24	25.5	98	92
IPE 400	400	180	8.6	13.5	21	331.0	373.0	84.5	66.3	1.47	24	25.5	109	99
IPE 450	450	190	9.4	14.6	21	378.8	420.8	98.8	77.6	1.61	27	28.5	109	106
IPE 500	500	200	10.2	16.0	21	426.0	468.0	116	90.7	1.74	27	28.5	119	107
IPE 550	550	210	11.1	17.2	24	467.6	515.6	134	106	1.88	30	31.5	120	120
IPE 600	600	220	12.0	19.0	24	514.0	562.0	156	122	2.01	30	31.5	130	120

(1) Diametro massimo compatibile con le dimensioni del profilo (v. introduzione)

A = sezione del profilo
p = peso di un metro di barra
U = superficie del contorno per un metro di barra
d = diametro del bullone (1)
S_x = momento statico di mezza sezione
$s_x = \frac{I_x}{S_x}$ = distanza tra i centri di trazione e di compressione
I = momento d'inerzia
W = modulo di resistenza
i = $\sqrt{I/A}$ = raggio d'inerzia

profilo	valori statici relativi agli assi xx-yy							
	S_x cm³	s_x cm	I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm
IPE 80	11.6	6.90	80.1	20.0	3.24	8.49	3.69	1.05
IPE 100	19.7	8.68	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24
IPE 120	30.4	10.5	318	53.0	4.90	27.7	8.65	1.45
IPE 140	44.2	12.3	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65
IPE 160	61.9	14.0	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84
IPE 180	83.2	15.8	1317	146	7.42	101	22.2	2.05
IPE 200	110	17.6	1943	194	8.26	142	28.5	2.24
IPE 220	143	19.4	2772	252	9.11	205	37.3	2.48
IPE 240	183	21.2	3892	324	9.97	284	47.3	2.69
IPE 270	242	23.9	5790	429	11.2	420	62.2	3.02
IPE 300	314	26.6	8356	557	12.5	604	80.5	3.35
IPE 330	402	29.3	11770	713	13.7	788	98.5	3.55
IPE 360	510	31.9	16270	904	15.0	1043	123	3.79
IPE 400	654	35.4	23130	1156	16.5	1318	146	3.95
IPE 450	851	39.7	33740	1500	18.5	1676	176	4.12
IPE 500	1097	43.9	48200	1928	20.4	2142	214	4.31
IPE 550	1394	48.2	67120	2441	22.3	2668	254	4.45
IPE 600	1756	52.4	92080	3069	24.3	3387	308	4.66