

**ESERCITAZIONE N.1****ANALISI MODALE DI UNA MENSOLA**

Calcolare le frequenze proprie e i relativi modi di vibrare di una trave prismatica rettilinea e omogenea realizzata in acciaio. Si supponga che l'asse della trave coincida con l'asse di riferimento  $x$ . I parametri geometrici e del materiale sono:

Parametro	Descrizione	Valore	Unità di misura
$E$	Modulo di Young	$210 \cdot 10^9$	[Pa]
$\nu$	Coeff. di Poisson	0.3	
$\rho$	Densità	7830	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$L$	Lunghezza della trave	1	[m]
$B = H$	Dimensioni della sezione quadrata	0.010	[m]
$\bar{m} = \rho A$	Massa per unità di lunghezza	0.783	[Kg/m]
$\chi$	Fattore di taglio	6/5	

Per un confronto con i risultati teorici, vengono qui riportate le formule che consentono il calcolo delle frequenze naturali e dei relativi modi di vibrare. I calcoli teorici, basati sulla teoria di Eulero-Bernoulli che trascura l'effetto del taglio, **ipotizzano che l'asse della trave sia vincolato a vibrare nel piano x-y.**

Posto per definizione :

$$a^4 = \omega^2 \frac{\bar{m}}{EI}$$

la soluzione dell'equazione trascendente<sup>1</sup>:

$$1 + \cos(aL)\cosh(aL) = 0$$

fornisce i valori di  $aL$  che rappresentano le frequenze naturali di vibrazione flessionale della mensola.

Le prime dieci soluzioni risultano le seguenti:

$$\begin{array}{cccccc} a_1L = 1.875104 & a_2L = 4.694091 & a_3L = 7.854757 & a_4L = 10.995541 & a_5L = 14.137168 \\ a_6L = 17.2787595 & a_7L = 20.420352 & a_8L = 23.561945 & a_9L = 26.7035376 & a_{10}L = 29.84513 \end{array}$$

da cui le prime dieci frequenze naturali risultano:

$$\begin{array}{cccccc} \omega_1 = 3.516 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_2 = 22.0345 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_3 = 61.697 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_4 = 120.902 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_5 = 199.860 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} \\ \omega_6 = 298.556 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_7 = 417 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_8 = 555.17 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_9 = 713.08 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} & \omega_{10} = 890.73 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} \end{array}$$

Calcolato il coefficiente  $a_n$  in funzione della frequenza  $\omega_n$ :

$$a_n = \sqrt[4]{\omega_n^2 \frac{\bar{m}}{EI}}$$

è possibile determinare le forme modali corrispondenti:

<sup>1</sup> Ricordo che:  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  e  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Trovare gli zeri dell'equazione trascendente non è semplice.



$$\phi(x) = \sin(ax) - \sinh(ax) - \frac{\sin(aL) + \sinh(aL)}{\cos(aL) + \cosh(aL)} [\cos(ax) - \cosh(ax)]$$

Le frequenze naturali delle vibrazioni assiali sono date dalla seguente formula:

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Le frequenze naturali delle vibrazioni torsionali nel caso di una trave prismatica a sezione circolare sono date dalla seguente formula:

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Qui di seguito si riportano le prime frequenze della trave espresse in cicli al secondo (Hz):

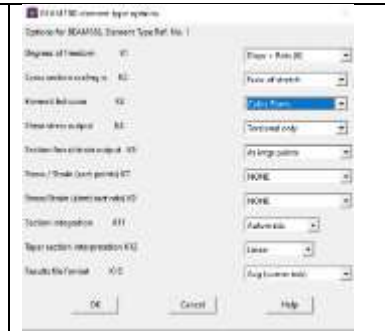
<b>n</b>	<b>f (Hz)</b>	<b>Tipologia del modo</b>
1	8.366	Flessionale
2	52.428	Flessionale
3	146.799	Flessionale
4	287.668	Flessionale
5	475.536	Flessionale
6	710.369	Flessionale
7	802.9	Torsionale
8	992.2	Flessionale
9	1294.7	Assiale
10	1320.9	Flessionale
11	1696.7	Flessionale
12	2119.4	Flessionale
13	2408.8	Torsionale
14	3884.1	Assiale



## Analisi con ANSYS APDL

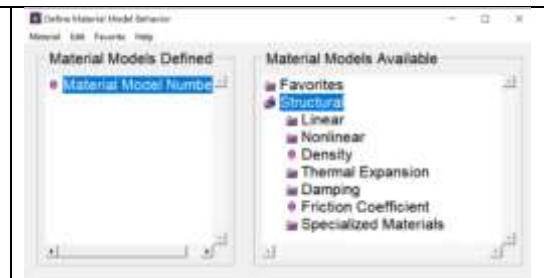
Si utilizzerà l'elemento Beam188 a 2 nodi sviluppato secondo la teoria di Timoshenko che considera l'effetto del taglio.

Il codice inserisce due punti lungo l'asse della trave con i quali costruisce delle funzioni di forma cubiche usando i polinomi di Lagrange. Poiché in ogni nodo si concentrano 6 gradi di libertà (gdl), la matrice di rigidezza elementare conterrebbe in questo modo  $6 \times 4$  gdl: senonché, prima dell'assemblaggio, la matrice subisce una "condensazione statica" che porta i gdl complessivi a 12, cioè 6 per i due nodi di estremità. Per utilizzare questo tipo di elemento è necessario selezionare l'opzione "cubic", nell'apposita finestra di dialogo.



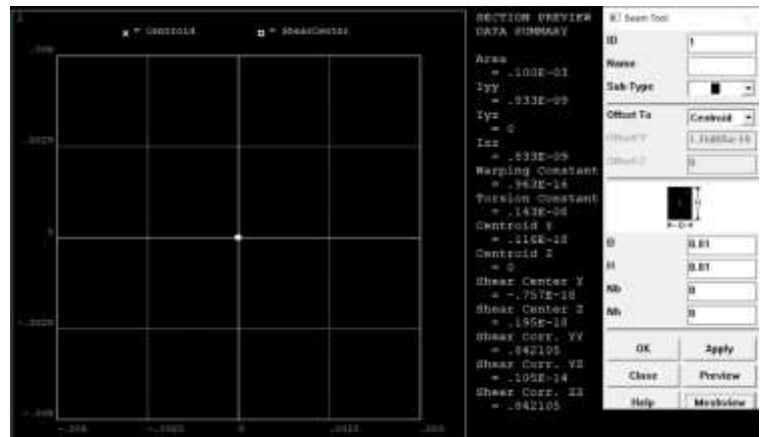
E' poi necessario stabilire il tipo di materiale. Si sceglierà un materiale dal comportamento lineare e isotropo e si assegneranno i dati nelle unità di misura MKS:

Modulo di Young:  $EX = 210E9$ ,  
 Coeff.di Poisson:  $PRXY = 0.3$ ,  
 Densità:  $DENS = 7830 [Kg/mc]$ .



A questo punto è necessario stabilire le dimensioni della sezione trasversale della trave. La sezione verrà divisa in un numero opportuno di elementi per ottenere i valori corretti dell'area trasversale e dei momenti d'inerzia. Il coefficiente *Shear Corr. ZZ* corrisponde all'inverso del fattore di taglio  $\chi$  che in questo caso risulta:

$$\chi = \frac{1}{\text{Shear Corr. ZZ}} = 1.188 \cong \frac{6}{5}$$

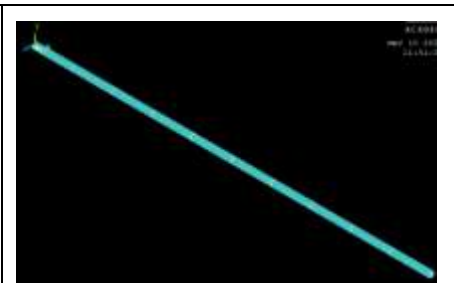


Si procede quindi con la creazione del modello solido inserendo due keypoint, rispettivamente in posizione (0,0,0) e (1,0,0). Dopo di che, si crea una linea che li unisce.

Utilizzando il meshiatore, si procede con la divisione della linea in elementi.

In questa fase si è deciso di modellare la trave con 10 elementi, per un totale di 11 nodi e 66 gradi di libertà (gdl). Poiché verranno vincolati 6 gdl, il sistema conterrà 60 gdl.

Come è evidente, la struttura è molto snella ( $\lambda = 346.4$ ) quindi le frequenze flessionali saranno molto più basse di quelle assiali.

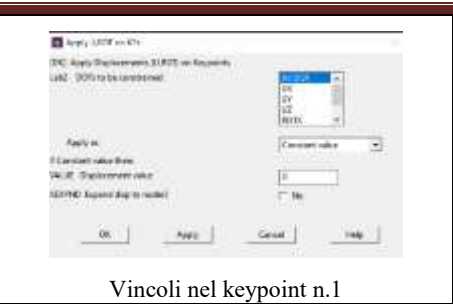


Divisa la struttura in elementi, è necessario inserire le condizioni al contorno. Si osserva che questo passo non è strettamente indispensabile in quanto il problema agli autovalori può essere risolto anche nel caso di strutture labili. Quando ciò dovesse capitare, gli autovalori più piccoli saranno nulli e i corrispondenti autovettori indicheranno i possibili movimenti di corpo rigido. Si ricorda che il valore degli autovalori è proporzionale all'energia elastica accumulata nel corpo: è quindi chiaro che ai movimenti rigidi debbano corrispondere degli autovalori nulli.



Poiché la trave è una mensola, nel keypoint n.1 sarà necessario vincolare tutti i gradi di libertà.

A questo punto è possibile procedere con la soluzione del problema agli autovalori. Prima però è consigliabile salvare i dati nel database: **SAVE\_DB**.



Vincoli nel keypoint n.1

Per il calcolo è necessario uscire dal **Preprocessor** ed entrare nel **Solution**; quindi si seleziona:

**Solution > Analysis Type > New Analysis**



E' quindi necessario selezionare alcune opzioni.



**MODOPT**: consente di scegliere l'algorithmo per la soluzione del problema agli autovalori. Gli ultimi tre metodi in elenco sono utili nel caso in cui le matrici costitutive non siano simmetriche.

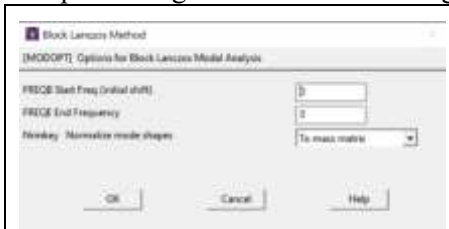
**No.of modes to extract**: indica il numero di autovalori da calcolare. E' necessario che questo numero non sia troppo alto, perché la mole di calcoli potrebbe essere eccessiva.

**MXPAND: Expand mode shapes**: consente di salvare le forme modali

**NMODE No.of modes to expand**: numero di soluzioni da salvare.

**LUMPMP Use lumped mass approx?** Calcolo delle matrici di massa diagonali. ANSYS consiglia l'uso delle matrici "consistenti".

Compare la seguente finestra di dialogo:



Consente di scegliere il campo di frequenze all'interno del quale ANSYS cercherà la soluzione del problema. E' utile quando si cercano soluzioni ad alta frequenza.

**FREQB e FREQE** indicano gli estremi della zona di ricerca.

**Nmkey**: Consente di scegliere il tipo di normalizzazione.

A questo punto è possibile eseguire i calcoli premendo il tasto: **SOLVE**.

Compare la seguente finestra riassuntiva:



e se tutto è andato a buon fine compare la finestra:



Terminati i calcoli è possibile visualizzare i risultati uscendo dal **Solution** ed entrando nel **General Postproc**.



Eseguendo il comando: **General Postproc > Read Results > By Pick** compare la seguente finestra che mostra le prime 10 frequenze espresse in cicli/s cioè in Hz. Si osserva subito che le frequenze sono doppie: ciò è dovuto al fatto che la rigidità flessionale è identica nei piani  $x - y$  e  $x - z$  e che i vincoli sono identici nelle due direzioni.

Set	Frequency
1	8.3652
2	8.3652
3	52.399
4	52.399
5	146.61
6	146.61
7	286.98
8	286.98
9	473.75
10	473.75

Per il confronto con le soluzioni teoriche, è necessario sapere quali forme modali associare alle frequenze calcolate. Per questo motivo si utilizza il comando **Result viewer** e/o si stampano le forme modali.

Prima di osservare le forme di vibrare, è necessario disattivare l'opzione:

**PlotCtrls > Stile > Size and Shape > [/ESHAPE] display of element OFF**

Le forme modali sono le seguenti:

$f_1 = f_2 = 8.365 \text{ [Hz]}$ nei piani $x - y$ e $x - z$	$f_3 = f_4 = 52.399 \text{ [Hz]}$ nei piani $x - y$ e $x - z$	$f_5 = f_6 = 146.61 \text{ [Hz]}$ nei piani $x - y$ e $x - z$

$f_7 = f_8 = 286.98 \text{ [Hz]}$ nei piani $x - y$ e $x - z$	$f_9 = f_{10} = 473.75 \text{ [Hz]}$ nei piani $x - y$ e $x - z$

Osservando la forma modale corrispondente alla 10° frequenza, si intuisce che il modello con soli 10 elementi non è in grado di calcolare con precisione le frequenze più alte. Se queste frequenze fossero necessarie, bisognerebbe procedere alla creazione di un modello contenente un numero maggiore di gradi di libertà.

Come si può osservare, le prime 10 frequenze sono state calcolate con grande precisione. Le frequenze calcolate utilizzando le matrici di massa di tipo “consistente” dovrebbero essere più alte di quelle teoriche perché ottenute a partire da un campo di spostamenti imposto. In questo caso risultano appena più basse. Ciò è dovuto al fatto che i risultati teorici di riferimento sono stati ottenuti utilizzando la teoria semplificata di Eulero-Bernoulli che trascura l'effetto del taglio, mentre gli elementi utilizzati (il BEAM188) sono stati formulati con la teoria di Timoshenko.

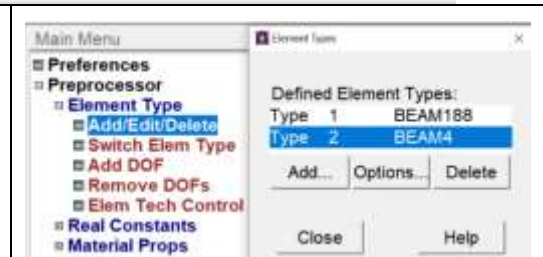


n	$f_{teoria}$	$f_{ANSYS}$ con 180 gdl	Tipo	ERR %
1	8.366	8.3652	Flessionale	-0.009
3	52.428	52.399	Flessionale	-0.055
5	146.799	146.61	Flessionale	-0.804
7	287.668	286.98	Flessionale	-0.24
9	475.536	473.75	Flessionale	-0.376

Può essere interessante mettere a confronto i risultati ottenuti con l'elemento di Timoshenko con quelli ottenuti con l'elemento BEAM4 sviluppato secondo la teoria di Eulero-Bernoulli. **Questo elemento non è accessibile** attraverso l'interfaccia grafica di ANSYS APDL, perché non è più consigliato, quindi è necessario agire sulla linea di comando.



Dopo di che, se necessario, è possibile modificare i valori assegnati per difetto ad alcuni parametri.



Per abbinare all'elemento le caratteristiche geometriche della sua sezione trasversale è necessario inserire le costanti reali:



Per poter utilizzare questo elemento è prima necessario cancellare la vecchia mesh e crearne una nuova assegnando agli elementi i nuovi attributi:



Creata la nuova mesh, non è necessario imporre le condizioni al contorno che erano state associate al keypoint n.1 e non ai nodi della vecchia mesh.

Entrati nel processore **Solution** è possibile ripetere l'analisi precedente.



I nuovi risultati ottenuti con l'elemento BEAM4 sono i seguenti:

Set	Frequency
1	8.3653
2	8.3653
3	52.407
4	52.407
5	146.69
6	146.69
7	287.43
8	287.43
9	475.43
10	475.43

10 elementi BEAM4

Set	Frequency
1	8.3652
2	8.3652
3	52.399
4	52.399
5	146.61
6	146.61
7	286.98
8	286.98
9	473.75
10	473.75

10 elementi BEAM188

Come si può osservare le frequenze calcolate con l'elemento di tipo BEAM4 sono leggermente più grandi di quelle calcolate con l'elemento BEAM188.

Le differenze sono molto piccole perché la snellezza della trave in esame è molto grande, superiore a 200.

**Ma osserviamo cosa capita a frequenze più alte.**

Prima però è consigliabile infittire la mesh: la trave viene quindi divisa in 30 elementi usando il comando

Con una nuova analisi modale si calcolano le prime 40 soluzioni. Il risultato è il seguente:

Set	Frequency	Set	Frequency	Set	Frequency	Set	Frequency
1	8.3653	11	707.38	21	2096.0	31	4026.2
2	8.3653	12	707.38	22	2096.0	32	4198.6
3	52.405	13	803.03	23	2411.3	33	4198.6
4	52.405	14	986.52	24	2555.5	34	4834.2
5	146.65	15	986.52	25	2555.5	35	4834.2
6	146.65	16	1294.8	26	3059.2	36	5513.7
7	287.13	17	1311.2	27	3059.2	37	5513.7
8	287.13	18	1311.2	28	3606.9	38	5652.1
9	474.14	19	1681.2	29	3606.9	39	6237.2
10	474.14	20	1681.2	30	3888.1	40	6237.2

Risultati ottenuti usando 30 elementi del tipo BEAM4 per un totale di 180 gdl

Osserviamo che le frequenze  $f_{13} = 803.03 \text{ Hz}$ ,  $f_{16} = 1294.8 \text{ Hz}$ ,  $f_{23} = 2411.3 \text{ Hz}$ ,  $f_{30} = 3888.1 \text{ Hz}$ ,  $f_{31} = 4026.2 \text{ Hz}$ ,  $f_{38} = 5652.1 \text{ Hz}$  non sono doppie. Le forme modali associate a tali frequenze non sono flessionali: come osservato nell'analisi teorica esposta all'inizio del documento, alcuni di questi modi saranno assiali ed altri torsionali.

Si ripete il calcolo con gli elementi di tipo BEAM188. I risultati sono i seguenti:

Set	Frequency	Set	Frequency	Set	Frequency	Set	Frequency
1	8.3652	11	706.38	21	2086.1	31	3884.1
2	8.3652	12	706.38	22	2086.1	32	4150.5
3	52.399	13	742.78	23	2228.3	33	4150.5
4	52.399	14	984.54	24	2539.9	34	4767.3
5	146.61	15	984.54	25	2539.9	35	4767.3
6	146.61	16	1294.7	26	3035.9	36	5199.5
7	286.97	17	1307.6	27	3035.9	37	5422.7
8	286.97	18	1307.6	28	3573.0	38	5422.7
9	473.70	19	1675.0	29	3573.0	39	6115.5
10	473.70	20	1675.0	30	3713.9	40	6115.5

Risultati ottenuti usando 30 elementi del tipo BEAM188 per un totale di 180 gdl

I risultati sono stati messi a confronto con quelli dell'analisi teorica:

n	$f_{teoria}$		$f_{ANSYS}$ (BEAM4)	ERR %	$f_{ANSYS}$ (BEAM188)	ERR %
1,2	8.366	1° Fless	8.3653	1° Fless	8.3652	1° Fless
3,4	52.428	2° Fless	52.405	2° Fless	52.399	2° Fless
5,6	146.799	3° Fless	146.65	3° Fless	146.61	3° Fless
7,8	287.668	4° Fless	287.13	4° Fless	286.97	4° Fless
9,10	475.536	5° Fless	474.14	5° Fless	473.70	5° Fless
11,12	710.368	6° Fless	707.38	6° Fless	706.38	6° Fless
13	802.9	1° Tors	803.03	1° Tors	742.78	1° Tors
14,15	992.167	7° Fless	986.52	7° Fless	984.54	7° Fless
16	1294.7	1° Ass	1294.8	1° Ass	1294.7	1° Ass
17,18	1320.932	8° Fless	1311.2	8° Fless	1307.6	8° Fless
19,20	1696.664	9° Fless	1681.2	9° Fless	1675.0	9° Fless
21,22	2119.362	10° Fless	2096.0	10° Fless	2086.1	10° Fless
23	2408.8	2° Tors	2411.3	2° Tors	2228.3	2° Tors
24,25	2589.027	11° Fless	2555.5	11° Fless	2539.9	11° Fless
26,27	3105.659	12° Fless	3059.2	12° Fless	3035.9	12° Fless



28,29	3669.256	13° Fless	3606.9	13° Fless		3573.0	13° Fless	
<b>30</b>	3884.1	2° Ass	3888.1	2° Ass	0.1	3884.1	2° Ass	
<b>31</b>	4014.7	3° Tors	4026.2	3° Tors	0.29	<b>3713.9</b>	3° Tors	
32,33	4279.821	14° Fless	4198.6	14° Fless	-1.9	4150.5	14° Fless	
34,35	4937.351	15° Fless	4834.2	15° Fless	-2.09	4767.3	15° Fless	
<b>36</b>	5641.848	16° Fless	5513.7	16° Fless	-2.27	5199.5	4° Tors	
37			5513.7	16° Fless		5422.7	16° Fless	
<b>38</b>	5620.6	4° Tors	5652.1	4° Tors	0.56	5422.7	16° Fless	
39,40	6393.312	17° Fless	6237.2	17° Fless	-2.44	6115.5	17° Fless	

Si può osservare che i risultati sono molto vicini a quelli teorici, in particolare a bassa frequenza. Inoltre le frequenze calcolate con l'elemento BEAM188 sono sempre più basse di quelle ottenute con l'elemento BEAM4 e con il modello continuo teorico sviluppato senza tenere conto della rigidità a taglio.

E' importante osservare che l'abbinamento delle forme modali alle frequenze non è un'operazione scontata. Per questo motivo nel file **Jobname.out** ANSYS stampa i **fattori di partecipazione** nelle diverse direzioni che qui vengono sintetizzati:

Fattori di partecipazione in direzione *x*

MODE	FREQUENCY	PERIOD	PARTIC. FACTOR	RATIO	EFFECTIVE MASS	CUMULATIVE MASS FRACTION	RATIO EFF.MASS TO TOTAL MASS
1	8.36517	0.11954	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
...	...	...	...	...	...	...	...
16	1294.70	0.77238E-03	0.79667	1.000000	0.634676	0.900000	0.810569
...	...	...	...	...	...	...	...
31	3884.10	0.25746E-03	0.26556	0.333333	0.705195E-01	1.00000	0.900633E-01
...	...	...	...	...	...	...	...

La tabella conferma che le frequenze naturali  $f_{16}$  e  $f_{31}$  sono associate a modi assiali.

Fattori di partecipazione in direzione *Rot\_x* (Torsione)

MODE	FREQUENCY	PERIOD	PARTIC. FACTOR	RATIO	EFFECTIVE MASS	CUMULATIVE MASS FRACTION	RATIO EFF.MASS TO TOTAL MASS
13	742.780			1.000000			
23	2228.34			0.333333			
30	3713.90			0.200000			
36	5199.46			0.142857			

La tabella conferma che le frequenze naturali  $f_{13}$ ,  $f_{23}$ ,  $f_{30}$  e  $f_{36}$  sono associate ai modi torsionali.

L'analisi degli altri fattori di partecipazione conferma che i restanti modi sono flessionali, nel piano  $x - y$  oppure nel piano  $x - z$ .

Una ulteriore tabella stampata nel file **JOBNAME.out** conferma gli abbinamenti. Nella prima colonna della seguente tabella è indicato se il modo è flessionale ( $FL_{xy}$  nel piano  $xy$  e  $FL_{xz}$  nel piano  $xz$ ), torsionale o assiale.

MODO	FREQUENZA	MASSA MODALE	Energia cinetica	MASSA EFFETTIVA					
				X-DIR	RATIO%	Y-DIR	RATIO%	Z-DIR	RATIO%
1 $FL_{xz}$	8.365	0.1033	142.7	0.000	0.00	0.3272E-13	0.00	0.4800	61.31
2 $FL_{xy}$	8.365	0.1033	142.7	0.000	0.00	0.4800	61.31	0.3272E-13	0.00
3 $FL_{xz}$	52.40	0.8575E-02	464.7	0.000	0.00	0.2124E-09	0.00	0.1475	18.83
4 $FL_{xy}$	52.40	0.8575E-02	464.7	0.000	0.00	0.1475	18.83	0.2124E-09	0.00
5 $FL_{xz}$	146.6	0.3188E-02	1352.	0.000	0.00	0.6757E-06	0.00	0.5071E-01	6.48
6 $FL_{xy}$	146.6	0.3188E-02	1352.	0.000	0.00	0.5071E-01	6.48	0.6757E-06	0.00
7 $FL_{xy}$	287.0	0.1703E-02	2769.	0.000	0.00	0.2480E-01	3.17	0.1139E-02	0.15
8 $FL_{xz}$	287.0	0.1703E-02	2769.	0.000	0.00	0.1139E-02	0.15	0.2480E-01	3.17
9 $FL_{xz}$	473.7	0.1005E-02	4449.	0.000	0.00	0.2464E-03	0.03	0.1545E-01	1.97
10 $FL_{xy}$	473.7	0.1005E-02	4449.	0.000	0.00	0.1545E-01	1.97	0.2464E-03	0.03
11 $FL_{xz}$	706.4	0.1093E-02	0.1077E+05	0.000	0.00	0.4123E-02	0.53	0.6394E-02	0.82
12 $FL_{xy}$	706.4	0.1093E-02	0.1077E+05	0.000	0.00	0.6394E-02	0.82	0.4123E-02	0.53
<b>13 Tors</b>	<b>742.8</b>	<b>0.6525E-05</b>	<b>71.06</b>	<b>0.000</b>	<b>0.00</b>	<b>0.000</b>	<b>0.00</b>	<b>0.000</b>	<b>0.00</b>



14 $FL_{xz}$	984.5	0.4887E-03	9351.	0.000	0.00	0.1592E-03	0.02	0.7379E-02	0.94
15 $FL_{xy}$	984.5	0.4887E-03	9351.	0.000	0.00	0.7379E-02	0.94	0.1592E-03	0.02
16 Ass	1295.	0.3915	0.1295E+08	0.6347	81.06	0.000	0.00	0.000	0.00
17 $FL_{xz}$	1308.	0.4845E-03	0.1635E+05	0.000	0.00	0.1439E-02	0.18	0.4229E-02	0.54
18 $FL_{xy}$	1308.	0.4845E-03	0.1635E+05	0.000	0.00	0.4229E-02	0.54	0.1439E-02	0.18
19 $FL_{xy}$	1675.	0.3833E-03	0.2123E+05	0.000	0.00	0.3266E-02	0.42	0.1153E-02	0.15
20 $FL_{xz}$	1675.	0.3833E-03	0.2123E+05	0.000	0.00	0.1153E-02	0.15	0.3266E-02	0.42
21 $FL_{xz}$	2086.	0.2926E-03	0.2513E+05	0.000	0.00	0.7763E-03	0.10	0.2766E-02	0.35
22 $FL_{xy}$	2086.	0.2926E-03	0.2513E+05	0.000	0.00	0.2766E-02	0.35	0.7763E-03	0.10
23 Tors	2228.	0.6525E-05	639.5	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00
24 $FL_{xz}$	2540.	0.3105E-03	0.3954E+05	0.000	0.00	0.1141E-02	0.15	0.1764E-02	0.23
25 $FL_{xy}$	2540.	0.3105E-03	0.3954E+05	0.000	0.00	0.1764E-02	0.23	0.1141E-02	0.15
26 $FL_{xz}$	3036.	0.1730E-03	0.3148E+05	0.000	0.00	0.2025E-03	0.03	0.2223E-02	0.28
27 $FL_{xy}$	3036.	0.1730E-03	0.3148E+05	0.000	0.00	0.2223E-02	0.28	0.2025E-03	0.03
28 $FL_{xy}$	3573.	0.1447E-03	0.3646E+05	0.000	0.00	0.1927E-02	0.25	0.1306E-03	0.02
29 $FL_{xz}$	3573.	0.1447E-03	0.3646E+05	0.000	0.00	0.1306E-03	0.02	0.1927E-02	0.25
30 Tors	3714.	0.6525E-05	1777.	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00
31 Ass	3884.	0.3915	0.1166E+09	0.7052E-01	9.01	0.000	0.00	0.000	0.00
32 $FL_{xz}$	4150.	0.1173E-03	0.3989E+05	0.000	0.00	0.5896E-07	0.00	0.1767E-02	0.23
33 $FL_{xy}$	4150.	0.1173E-03	0.3989E+05	0.000	0.00	0.1767E-02	0.23	0.5896E-07	0.00
34 $FL_{xy}$	4767.	0.1189E-03	0.5335E+05	0.000	0.00	0.1327E-02	0.17	0.2087E-03	0.03
35 $FL_{xz}$	4767.	0.1189E-03	0.5335E+05	0.000	0.00	0.2087E-03	0.03	0.1327E-02	0.17
36 Tors	5199.	0.6525E-05	3482.	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00
37 $FL_{xz}$	5423.	0.1051E-03	0.6101E+05	0.000	0.00	0.1819E-03	0.02	0.1165E-02	0.15
38 $FL_{xy}$	5423.	0.1051E-03	0.6101E+05	0.000	0.00	0.1165E-02	0.15	0.1819E-03	0.02
39 $FL_{xy}$	6115.	0.8332E-04	0.6151E+05	0.000	0.00	0.1160E-02	0.15	0.3107E-04	0.00
40 $FL_{xz}$	6115.	0.8332E-04	0.6151E+05	0.000	0.00	0.3107E-04	0.00	0.1160E-02	0.15

E' interessante osservare che nel file "JOBNAME.DSP" salvato da ANSYS al termine dei calcoli, si riporta che la soluzione del problema ha comportato la scrittura di **540 equazioni**. Come detto nell'introduzione, quando si utilizzano gli elementi BEAM188 con l'opzione "cubic", il programma crea due nodi interni ad ogni elemento per sviluppare delle funzioni di forma cubiche. Come è facile verificare, i nodi totali del modello sono stati quindi  $3 * 30 + 1 = 91$ . Poiché in ogni nodo si concentrano 6 gdl, il numero totale di gradi di libertà (e quindi di equazioni) è stato:  $91 * 6 = 546$ . Ma poiché 6 gradi di libertà sono stati vincolati, il numero finale di equazioni risulta pari a 540. Ma la dimensione delle matrici del problema agli autovalori è pari al numero di nodi per 6 gdl, perché prima dell'assemblaggio, le matrici di tipo "cubic" vengono condensate:  $NGL = (31 - 1) * 6 = 180$ .

### I calcoli verranno ora ripetuti utilizzando le matrici di massa di tipo diagonale.

Una volta calcolata la matrice di massa elementare di tipo "consistente", ANSYS prevede tre metodi di diagonalizzazione:

- diretta, in base al quale i coefficienti fuori dalla diagonale vengono eliminati;
- oltre ad eliminare tutti i coefficienti fuori dalla diagonale, si eliminano tutte le masse legate ai gradi di libertà di rotazione.
- data la matrice di massa elementare di tipo consistente  $[M_e^c]$ 
  - Si calcola la somma  $S$  di tutti i coefficienti della matrice  $[M_e^c]$  e la somma  $D$  dei suoi termini sulla diagonale:

$$S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_e^c(i, j)$$





Se, calcolate le prime 10 soluzioni, si desiderasse conoscere le successive 5, è necessario eseguire i seguenti comandi:

Dopo l'esecuzione del comando **solve** si ottiene:

Dal confronto con i risultati teorici si ottiene:

n	$f_{teoria}$	$f_{ANSYS}$ con 180 gdl	Tipo	ERR %
1	710.369	706.61	Flessionale	-0.53
3	802.9	742.78	Torsionale	-7.49
5	992.2	985.40	Flessionale	-0.69

Il file \*.log per l'esecuzione dei calcoli è il seguente:

```

/BATCH ! Per l'esecuzione in background
/PREP7 ! Entra nel pre-processore
ET,1,BEAM188 ! Scegli l'elemento di tipo BEAM188 a 2 nodi
KEYOPT,1,3,3 ! Formulazione "cubic"

MP,EX,1,210E9 ! Selezione il tipo di materiale
MP,PRXY,1,0.3 ! Modulo di Young: Ex=210 [GPa]
MP,DENS,1,7830 ! Coeff. di Poisson: PRXY = 0.3
! Densità: DENS = 7830 [Kg/m^3]

SECTYPE, 1, BEAM, RECT ! Selezione il tipo di sezione: Rettangolare
SECDATA,0.01,0.01 ! B = H = 0.010 [m]

K, ,,, ! Crea il keypoint n.1 (0,0,0)
K, ,1 ! Crea il keypoint n.2 (1,0,0)
LSTR, 1, 2 ! Crea la line ache unisce i keypoint 1 e 2
LESIZE,ALL, , ,10, ,1, , ,1, ! Dividi tutte le line in 10 parti
LMESH, 1 ! Esegui la mesh

DK,1, ,0, ,0,ALL, , , , , ! Imponi le condizioni al contorno nel keypoint n.1
FINISH ! Esci dal preprocessore
SAVE ! Salva i dati nel DataBase

/SOL ! Entra nel solutore
ANTYPE,2 ! Selezione l'analisi modale
MODOPT,LANB,10 ! Con l'Algoritmo di Lanczos calcola 10 soluzioni
MXPAND,10 ! Salva 10 soluzioni
LUMPM,0 ! Matrice di massa consistente
SOLVE ! Risolvi
FINISH ! Esci dal solutore
SAVE ! Salva sul DataBase
!
! A questo punto si possono esaminare i risultati con il post-processore
    
```