Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

***Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura* - a.a. 2020/21**

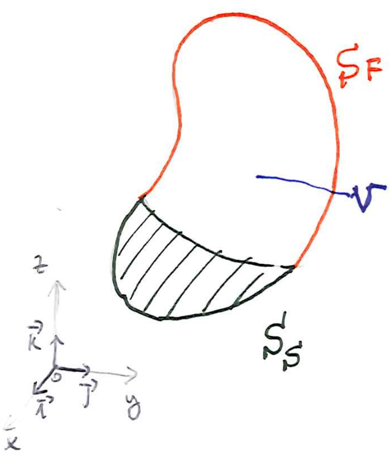
Statica e Scienza delle Costruzioni

> Il PLV per il continuo deformabile

Emanuele Reccia

emanuele.reccia@unica.it

Consideriamo un mezzo continuo di volume V delimitato dalla superficie di contorno S soggetto in ogni punto di volume a forze di massa $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ e sulla frontiera S a forze di superficie $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$



Sia $\boxed{S_F}$ la parte del contorno libero e $\boxed{S_S}$ la parte del contorno vincolata

Su S_F sono assegnate (ovvero sono note) le forze di superficie $\vec{p}$ e sono incognite gli spostamenti $\vec{s}$

Su S_F devono valere le relazioni di Cauchy

$$\left\{\boxed{\begin{array}{l} \sigma_x d_x + \tau_{yx} d_y + \tau_{zx} d_z = p_x \\ \tau_{xy} d_x + \sigma_y d_y + \tau_{zy} d_z = p_y \\ \tau_{xz} d_x + \tau_{yz} d_y + \sigma_z d_z = p_z \end{array}}\right.$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AL CONTORNO

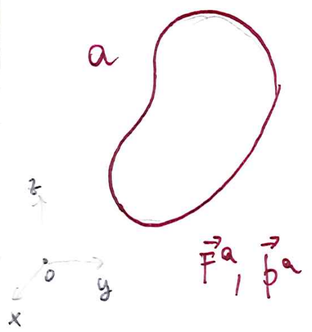
EQUILIBRIO ESTERNO

Su S_S sono assegnati gli spostamenti $\vec{s}$ (noti) e sono incognite le forze di superficie $\vec{p}$

S_S è la parte di contorno vincolata $\rightarrow$ $\boxed{u=0 \quad v=0 \quad w=0}$

* Applichiamo il principio dei lavori virtuali (PLV) su un corpo deformabile:

Consideriamo 1 sistema $\boxed{a}$ in cui forze e sforzi sono in equilibrio e un sistema $\boxed{b}$ in cui gli spostamenti sono compatibili con le deformazioni



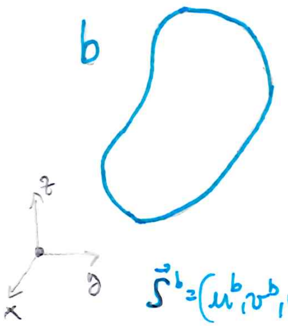
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_x^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}^a}{\partial z} + F_x^a = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}^a}{\partial z} + F_y^a = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z^a}{\partial z} + F_z^a = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_x^a d_x + \tau_{yx}^a d_y + \tau_{zx}^a d_z = p_x^a \\ \tau_{xy}^a d_x + \sigma_y^a d_y + \tau_{zy}^a d_z = p_y^a \\ \tau_{xz}^a d_x + \tau_{yz}^a d_y + \sigma_z^a d_z = p_z^a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \tau_{xy}^a = \tau_{yx}^a \\ \tau_{xz}^a = \tau_{zx}^a \\ \tau_{yz}^a = \tau_{zy}^a \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{SFORZI E FORZE SONO IN EQUILIBRIO}}$

$\underline{\underline{\sigma}}^a$ $\qquad$ $\vec{F}^a, \vec{p}^a$



$\vec{S}^b = (u^b, v^b, w^b)$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^b = \dfrac{\partial u^b}{\partial x} \\ \varepsilon_y^b = \dfrac{\partial v^b}{\partial y} \\ \varepsilon_z^b = \dfrac{\partial w^b}{\partial z} \\ \gamma_{xy}^b = \dfrac{\partial u^b}{\partial y} + \dfrac{\partial v^b}{\partial x} \\ \gamma_{xz}^b = \dfrac{\partial u^b}{\partial z} + \dfrac{\partial w^b}{\partial x} \\ \gamma_{yz}^b = \dfrac{\partial v^b}{\partial z} + \dfrac{\partial w^b}{\partial y} \end{cases}$$

$\boxed{\text{SPOSTAMENTI COMPATIBILI CON LE DEFORMAZIONI}}$

$\vec{S}^b$ $\qquad$ $\underline{\underline{\varepsilon}}^b$

I 2 SISTEMI **a** E **b** SONO COMPLETAMENTE INDIPENDENTI → GLI SFORZI NON PRODUCONO LE DEFORMAZIONI E VICEVERSA

IL SISTEMA **a** È IN EQUILIBRIO, IL SISTEMA **b** È CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE

SUPPONIAMO DI IMPORRE AL CORPO SOGGETTO AL SISTEMA DI FORZE **a** IL SISTEMA DI SPOSTAMENTI **b** E SCRIVIAMO IL LAVORO VIRTUALE ESTERNO – NB LE COMPONENTI DI FORZA COMPIONO LAVORO PER LA RISPETTIVA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO:

$$\mathcal{L}_{VE} = \int_V \vec{F}^a \times \vec{S}^b \, dV + \int_S \vec{p}^a \times \vec{S}^b \, dS = \int_V \underbrace{(F_x^a u^b + F_y^a v^b + F_z^a w^b)\, dV}_{\mathrm{I}} + \int_{S_F} \underbrace{(p_x^a u^b + p_y^a v^b + p_z^a w^b)\, dS}_{\mathrm{II}}$$

N.B. SU TUTTA S

(N.B. IL CONTRIBUTO DI S_S È NULLO POICHÉ $\vec{S}_b = \vec{0}$ SU S_S)

SVILUPPANDO LA RELAZIONE DI CAUCHY (EQ. AL CONTORNO) POSSIAMO RISCRIVERE IL II INTEGRALE DEL LAVORO VIRTUALE ESTERNO:

$$\int_{S_F} \Big[\overbrace{(\sigma_x^a \alpha_x + \tau_{yx}^a \alpha_y + \tau_{zx}^a \alpha_z)}^{p_x} u^b + \overbrace{(\tau_{xy}^a \alpha_x + \sigma_y^a \alpha_y + \tau_{zy}^a \alpha_z)}^{p_y} v^b + \overbrace{(\tau_{xz}^a \alpha_x + \tau_{yz}^a \alpha_y + \sigma_z^a \alpha_z)}^{p_z} w^b \Big] dS$$

RACCOGLIAMO I TERMINI ACCORPANDOLI PER I COSENI DIRETTORI:

$$\int_{S_F} \Big[(\sigma_x^a u^b + \tau_{xy}^a v^b + \tau_{xz}^a w^b)\, \alpha_x + (\tau_{yx}^a u^b + \sigma_y^a v^b + \tau_{yz}^a w^b)\, \alpha_y + (\tau_{zx}^a u^b + \tau_{zy}^a v^b + \sigma_z^a w^b)\, \alpha_z \Big] dS$$

APPLICANDO LA TRASFORMAZIONE DI GAUSS-GREEN POSSIAMO TRASFORMARE IL II INTEGRALE DA INTEGRALE ESTESO A S A INTEGRALE SUL VOLUME V

$\boxed{\text{TEOREMA DELLA DIVERGENZA}}$ $\int_S F_i n_i dS = \int_V \partial F_i / \partial x_i \, dV$

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x^e u^b + \tau_{xy}^e v^b + \tau_{xz}^e w^b\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yx}^e u^b + \sigma_y^e v^b + \tau_{yz}^e w^b\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zx}^e u^b + \tau_{zy}^e v^b + \sigma_z^e w^b\right) \right] dV$$

NB. DERIVATA DI 1 PRODOTTO DI 2 FUNZIONI È PARI ALLA DERIVATA DEL 1° TERMINE PER IL 2° PIÙ LA DERIVATA DEL 2° TERMINE PER IL 1°

$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ALLORA:

$$\int_V \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} u^b + \sigma_x^e \frac{\partial u^b}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} v^b + \tau_{xy}^e \frac{\partial v^b}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} w^b + \tau_{xz}^e \frac{\partial w^b}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} u^b + \tau_{yx}^e \frac{\partial u^b}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} v^b + \sigma_y^e \frac{\partial v^b}{\partial y} + \dots \right.\right.$$

$$\left.\left. \dots + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} w^b + \tau_{yz}^e \frac{\partial w^b}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} u^b + \tau_{zx}^e \frac{\partial u^b}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} v^b + \tau_{zy}^e \frac{\partial v^b}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z} w^b + \sigma_z^e \frac{\partial w^b}{\partial z} \right] \right\} dV$$

ORDINIAMO RAGGRUPPANDO I PRIMI E POI I SECONDI TERMINI:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} u^b + \frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} v^b + \frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} w^b + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} u^b + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} v^b + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} w^b + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} u^b + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} v^b + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z} w^b + \dots \right. \quad \text{PRIMI TERMINI}$$

$$\left. \dots + \sigma_x^e \frac{\partial u^b}{\partial x} + \tau_{xy}^e \frac{\partial v^b}{\partial x} + \tau_{xz}^e \frac{\partial w^b}{\partial x} + \tau_{yx}^e \frac{\partial u^b}{\partial y} + \sigma_y^e \frac{\partial v^b}{\partial y} + \tau_{yz}^e \frac{\partial w^b}{\partial y} + \tau_{zx}^e \frac{\partial u^b}{\partial z} + \tau_{zy}^e \frac{\partial v^b}{\partial z} + \sigma_z^e \frac{\partial w^b}{\partial z} \right\} dV \quad \text{SECONDI TERMINI}$$

RACCOGLIAMO ANCORA I TERMINI: PRIMA I TERMINI IN CUI LE DERIVATE SONO MOLTIPLICATE PER GLI SPOSTAMENTI u^b, v^b, w^b

$$\int_V \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} \right) u^b + \left(\frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} \right) v^b + \left(\frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z} \right) w^b + \dots \right.$$

POI I TERMINI IN CUI LE DERIVATE SONO MOLTIPLICATE PER LE COMPONENTI DI SFORZO $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ E NB. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ETC

$$\left. \dots + \sigma_x^e \frac{\partial u^b}{\partial x} + \tau_{xy}^e \left(\frac{\partial v^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial y} \right) + \tau_{xz}^e \left(\frac{\partial w^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial z} \right) + \sigma_y^e \frac{\partial v^b}{\partial y} + \tau_{yz}^e \left(\frac{\partial v^b}{\partial z} + \frac{\partial w^b}{\partial y} \right) + \sigma_z^e \frac{\partial w^b}{\partial z} \right\} dV$$

CI ACCORGIAMO CHE $\frac{\partial u^b}{\partial x} = \varepsilon_x^b$, $\frac{\partial v^b}{\partial y} = \varepsilon_y^b$, $\frac{\partial w^b}{\partial z} = \varepsilon_z^b$, $\left(\frac{\partial v^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial y} \right) = \gamma_{xy}^b$, $\left(\frac{\partial w^b}{\partial x} + \frac{\partial u^b}{\partial z} \right) = \gamma_{xz}^b$, $\left(\frac{\partial w^b}{\partial y} + \frac{\partial v^b}{\partial z} \right) = \gamma_{yz}^b$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE IL LAVORO VIRTUALE ESTERNO COME: (INTEGRALE I + INTEGRALE II TRASFORMATO IN INTEGRALE DI VOLUME)

$$\mathcal{L}_{VE} = \int_V \Big\{ \overbrace{F_x^e u^b + F_y^e v^b + F_z^e w^b}^{I} + \overbrace{\left[\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z}\right] u^b + \left[\frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z}\right] v^b}^{II} + \left[\frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z}\right] w^b + \dots$$

$$\dots + \overbrace{\sigma_x^e \varepsilon_x^b + \sigma_y^e \varepsilon_y^b + \sigma_z^e \varepsilon_z^b + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^e \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}^b}^{II} \Big\} dV$$

POSSIAMO ANCORA ACCORPARE I TERMINI CHE CONTENGONO GLI SPOSTAMENTI u^b, v^b, w^b (CONSIDERANDO ANCHE L'INTEGRALE I)

$$\mathcal{L}_{VE} = \int_V \Big\{ \left[\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^e}{\partial z} + F_x^a\right] u^b + \left[\frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^e}{\partial z} + F_y^a\right] v^b + \left[\frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^a}{\partial z} + F_z^a\right] w^b + \dots$$

$$\dots + \sigma_x^e \varepsilon_x^b + \sigma_y^e \varepsilon_y^b + \sigma_z^e \varepsilon_z^b + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^e \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}^b \Big\} dV$$

OSSERVIAMO CHE LE FORZE (ESTERNE) SONO IN EQUILIBRIO CON GLI SFORZI (INTERNI)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}^a}{\partial z} + F_x^a = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{xy}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}^a}{\partial z} + F_y^a = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{xz}^a}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}^a}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z^a}{\partial z} + F_z^a = 0 \end{cases} \qquad \text{EQUILIBRIO}$$

ALLORA:

$$\boxed{\mathcal{L}_{VE} = \int_V \left(\sigma_x^e \varepsilon_x^b + \sigma_y^e \varepsilon_y^b + \sigma_z^e \varepsilon_z^b + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^e \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}^b \right) dV} \rightarrow \boxed{= \mathcal{L}_{VI}} \;*$$

MA È = AL LAVORO VIRTUALE INTERNO CHE GLI SFORZI COMPIONO PER LE DEFORMAZIONI $\rightarrow \mathcal{L}_{VI} = \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}$ $\quad i,j = x,y,z$

N.B. OGNI COMPONENTE DI SFORZO COMPIE LAVORO PER UNA SOLA COMPONENTE DI DEFORMAZIONE: $\sigma_x \rightarrow \varepsilon_x, \dots, \tau_{zy} \rightarrow \gamma_{zy}$

> IN UN SOLIDO DEFORMABILE IN CUI FORZE ESTERNE E SFORZI INTERNI SONO IN EQUILIBRIO E SPOSTAMENTI E DEFORMAZIONI SONO COMPATIBILI, IL LAVORO VIRTUALE INTERNO È PARI AL LAVORO COMPIUTO DAGLI SFORZI PER LE CORRISPONDENTI DEFORMAZIONI

[N.B. IN UN CORPO RIGIDO $\mathcal{L}_{VI} = 0$ $\Downarrow$ $\mathcal{L}_{VE} = 0$]

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PLV $\quad \boxed{\mathcal{L}_{VE} = \mathcal{L}_{VI}}$