Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura
***Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura* - a.a. 2020/21**

Statica e Scienza delle Costruzioni

> 2. Lo stato di deformazione

Emanuele Reccia

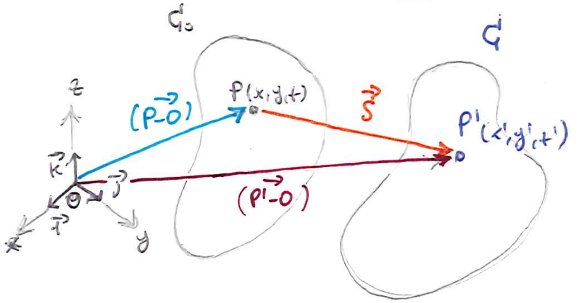
emanuele.reccia@unica.it

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

Ⓘ

SI CONSIDERI UN MEZZO CONTINUO I CUI PUNTI NELLA CONFIGURAZIONE INIZIALE C_0 SIANO RIFERITI ALLA TERNA CARTESIANA x, y, t
IL CORPO PASSA DALLA CONFIGURAZIONE DI RIFERIMENTO C_0 ALLA CONFIGURAZIONE CORRENTE C



I PUNTI MATERIALI SONO GLI STESSI MA SI SONO SPOSTATI $P(x,y,t) \rightarrow P'(x',y',t')$

NON SAPPIAMO COSA SIA SUCCESSO TRA C_0 E C*, IL PUNTO P HA SUBITO UNO SPOSTAMENTO

$\vec{S} = (\vec{P'-O}) - (\vec{P-O})$ LE CUI COMPONENTI SONO: $\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$

POSSIAMO INTRODURRE UNA NOTAZIONE PIÙ COMPATTA: $\boxed{\vec{S} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}}$

$\vec{S}$ È FUNZIONE DEL PUNTO P $\Rightarrow \vec{S} = \vec{S}(P)$ E QUINDI $\vec{S} = \vec{S}(x,y,z)$

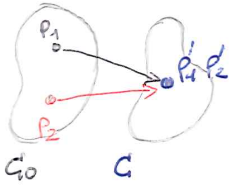
SE LO SPOSTAMENTO È FUNZIONE DELLA POSIZIONE LO SONO ANCHE LE SUE COMPONENTI

$$\begin{cases} u = u(x,y,t) \\ v = v(x,y,t) \\ w = w(x,y,t) \end{cases}$$

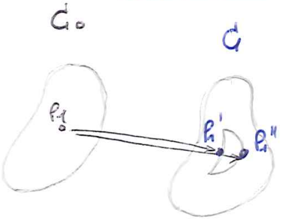
DOBBIAMO AMMETTERE CHE QUESTE FUNZIONI GODANO DI CERTE REGOLARITÀ:

- 2 PUNTI DISTINTI POSSONO AVVICINARSI O ALLONTANARSI MA NON POSSONO ANNICHILIRSI → NON COMPENETRAZIONE
- NON POSSONO AVVENIRE LACERAZIONI DEL SOLIDO
  [N.B. QUESTO PUÒ AVVENIRE NELLA REALTÀ MA NON IN QUESTA TRATTAZIONE DEL CONTINUO]

° COMPENETRAZIONE



°° LACERAZIONE



SE COMPENETRAZIONE E LACERAZIONE SONO ESCLUSE ALLORA LA CORRISPONDENZA TRA P E P' È $\boxed{\text{BIUNIVOCA}}$

ALLORA LE FUNZIONI $\begin{cases} u(x,y,t) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{cases}$ DEVONO ESSERE CONTINUE CON LE LORO DERIVATE

[N.B. u, v, w DEVONO ESSERE CONTINUE CON LE LORO DERIVATE, MA u, v, w SONO FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI, QUINDI DEVONO ESSERE CONTINUE LE LORO DERIVATE PARZIALI E, PER GRADI SUPERIORI, LE LORO DERIVATE MISTE]

1ª IPOTESI – CONTINUITÀ DELLE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO u, v, w

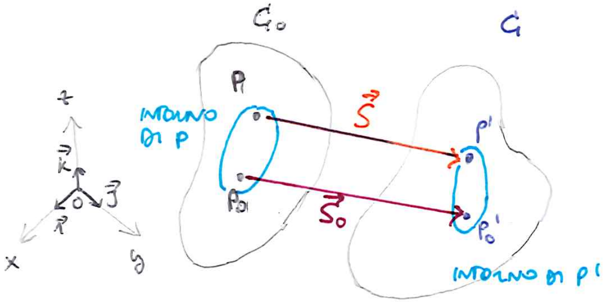
---

* IN QUESTA TRATTAZIONE NON STUDIAMO IL PERCORSO CHE P COMPIE PER ARRIVARE NELLA POSIZIONE P' MA SOLO LO SPOSTAMENTO $\vec{S}$, OVVERO LA DIFFERENZA TRA LA POSIZIONE INIZIALE P E QUELLA FINALE P'

2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

(I)

2^ IPOTESI – PICCOLI SPOSTAMENTI → u, v, w sono da considerare come quantità "infinitesime"



Consideriamo un punto generico P_0 che subisce uno spostamento $\boxed{\vec{S}_0 = u_0\vec{i}+v_0\vec{j}+w_0\vec{k}}$

Se P_0 è sufficientemente vicino a P, allora anche P_0' sarà convenientemente vicino a P', ovvero l'intorno di P è lo stesso di P' (cambia forma ma contiene gli stessi punti)

* Si vuole approssimare la funzione spostamento $\vec{S} = u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$ del generico punto P che appartiene all'intorno di P_0 conoscendo la funzione spostamento $\vec{S}_0$ del punto P_0, di coordinate $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$f(x) \rightarrow g(x)$ col requisito che $g(x)$ assuma nel punto $x = x_0$ valori eguali di quelli di $f(x)$ con tutte le sue derivate: $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^n(x_0)$

Con lo sviluppo di TAYLOR possiamo costruire una funzione: $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^n(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \underbrace{o[(x-x_0)^n]}$

RESTO DI PEANO

Se calcoliamo

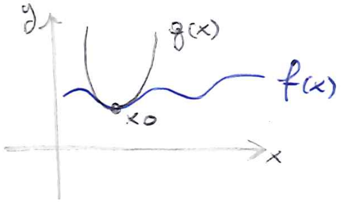
$$g(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0-\cancel{x_0}) + \dots \qquad x - x_0 = 0 \qquad \boxed{g(x_0) = f(x_0)}$$

$$g'(x_0) = 0 + f'(x_0) + f''(x_0)\frac{2(x-\cancel{x_0})}{2!} + \dots \qquad \boxed{g'(x_0) = f'(x_0)}$$

$$g''(x_0) = 0 + f''(x_0) + f'''(x_0)\frac{6(x-\cancel{x_0})}{3!} + \dots \qquad \boxed{g''(x_0) = f''(x_0)}$$

$$g^n(x_0) = 0 + f^n(x_0) + \dots \qquad g^n(x_0) = f^n(x_0)$$

NB: $o[(x-x_0)^n]$ indica una funzione $h(x)$ qualsiasi che nell'intorno di x_0 tende a zero più velocemente di $(x-x_0)^n$.



In x_0 consideriamo la posizione, la derivata, la curvatura, etc.

Possiamo usare $g(x)$, ad esempio una parabola, che a distanza piccola da x_0 sia in grado di approssimare $f(x)$

Applichiamo questo metodo alle funzioni $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$
Poiché esse dipendono da x, y, z allora dovremo considerare le loro derivate parziali rispetto a x, y, z
Più si sale di grado di derivazione più è precisa l'approssimazione. Il minimo è considerare la funzione e le sue derivate prime
[N.B. l'errore è pari allora alla derivata seconda, ma poiché x e x_0 sono sufficientemente vicini lo scarto è molto piccolo)

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

(III)

$$u(x,y,z) = u_0 + \boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}}(x-x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)$$

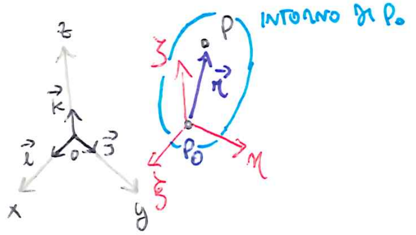
DERIVATA PARZIALE DI u_0 RISPETTO A x NEL PUNTO P_0 $\quad \dfrac{\partial u(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}$ [N.B. È UN NUMERO]

$$v(x,y,z) = v_0 + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)$$

$$w(x,y,z) = w_0 + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)$$

POSSIAMO RENDERE LA NOTAZIONE PIÙ COMPATTA NOTANDO CHE:

1. QUESTE FUNZIONI HANNO LE STESSE CARATTERISTICHE DI $f(x)$ PER IL CASO UNIVARIATO
2. $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ RAPPRESENTANO LE COORDINATE DEL PUNTO P RISPETTO A $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$



POSSIAMO DEFINIRE UN NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO $\boxed{(\xi, \eta, \zeta)}$ CON ORIGINE IN P_0 E PARALLELO A (x,y,z): $P(x,y,z)$ RIFERIMENTO GLOBALE E $P(\xi,\eta,\zeta)$ RIFERIMENTO CENTRATO IN P_0

ALLORA: $\xi = x - x_0 \qquad \eta = y - y_0 \qquad \zeta = z - z_0$ E $\vec{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ È IL VETTORE POSIZIONE DI P RISPETTO A P_0

E QUINDI:

$$u(x,y,z) = u_0 + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\xi + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\eta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\zeta$$

$$v(x,y,z) = v_0 + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0}\xi + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0}\eta + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0}\zeta$$

$$w(x,y,z) = w_0 + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0}\xi + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0}\eta + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0}\zeta$$

RACCOGLIENDO I TERMINI MOLTIPLICATI PER $\vec{r}$ E RICORDANDO COME SONO FATTI $\vec{S}$ E $\vec{S}_0$ POSSIAMO SCRIVERE IN FORMA COMPATTA IL CAMPO DI SPOSTAMENTO

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI – ⓸

$$\begin{array}{ccccccc}
\vec{S} & & \vec{S}_0 & & \underline{\underline{e}} & \vec{r} & \\
\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} & = & \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} & \begin{matrix} \partial u \\ \partial v \\ \partial w \end{matrix} \\
 & & & & \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \quad \frac{\partial}{\partial y} & \quad \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} & &
\end{array}$$

CAMPO DI SPOSTAMENTO:

$$\boxed{\boxed{\vec{S}} = \boxed{\vec{S}_0} + \boxed{\underline{\underline{e}}}\,\vec{r}}$$

$\boxed{\underline{\underline{e}} = \text{GRADIENTE DI SPOSTAMENTO}}$

[N.B. TENSORE DEL 2° ORDINE]

QUINDI: $\vec{S} - \vec{S}_0 = \underline{\underline{e}}\,\vec{r}$ IL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO $\underline{\underline{e}}$ PER IL VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$ FORNISCE LA DIFFERENZA DI SPOSTAMENTO PERTANTO CONTIENE TUTTE LE INFORMAZIONI: SPOSTAMENTO, ROTAZIONE E DEFORMAZIONE

ESEMPIO APPLICATIVO

ABBIAMO UN CAMPO DI SPOSTAMENTO:

$$\begin{cases} u = kx^2y \\ v = kxy^2 \\ w = k(x+y)z \end{cases}$$

CON K = COSTANTE, CON UN VALORE MOLTO PICCOLO AD ESEMPIO 10^{-4}

IL PUNTO P_0 HA COORDINATE $P_0 = (1,1,0)$

ALLORA:

$$u_0 = u(P_0) = k(1^2 \cdot 1) = k$$

$$v_0 = v(P_0) = k(1 \cdot 1^2) = k$$

$$w_0 = w(P_0) = k(1+1)0 = 0$$

VOGLIAMO CALCOLARE $\boxed{\underline{\underline{e}}}$, PER PRIMA COSA CALCOLIAMO LE DERIVATE:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(kx^2y)}{\partial x} = ky(2x) = 2kxy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(kx^2y)}{\partial y} = kx^2(1) = kx^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(kx^2y)}{\partial z} = 0$$

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2.A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

(V)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (kxy^2)}{\partial x} = ky^2(1) = ky^2 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial [k(x+y)z]}{\partial x} = kz(1) = kz$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (kxy^2)}{\partial y} = kx(2y) = 2kxy \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial [k(x+y)z]}{\partial y} = kz(1) = kz$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial (kxy^2)}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial [k(x+y)z]}{\partial z} = kx(1) + ky(1) = kx + ky = k(x+y)$$

CALCOLIAMO IL VALORE DELLE DERIVATE NEL PUNTO P_0 E RICAVIAMO $\boxed{\underline{\underline{e}}}$ N.B. $P = \overset{x\;y\;z}{(1,1,0)}$

$$\boxed{\underline{\underline{e}}} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2kxy & kx^2 & 0 \\ ky^2 & 2kxy & 0 \\ kz & kz & k(x+y) \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

NOTO $\boxed{\underline{\underline{e}}}$ POSSIAMO RICAVARE IL CAMPO DI SPOSTAMENTO $\vec{s}$ IN OGNI PUNTO

ESERCIZIO

CALCOLARE $\vec{s}$ DEL PUNTO $P_1 = (1,1,2)$

N.B. NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO (ξ,η,ζ) CON ORIGINE IN P_0 ALLORA $P_1 = \overset{\xi\;\eta\;\zeta}{(0,0,2)}$

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r} \qquad \vec{s} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad \vec{s}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 = k \\ v_0 = k \\ w_0 = k \end{Bmatrix} \qquad \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

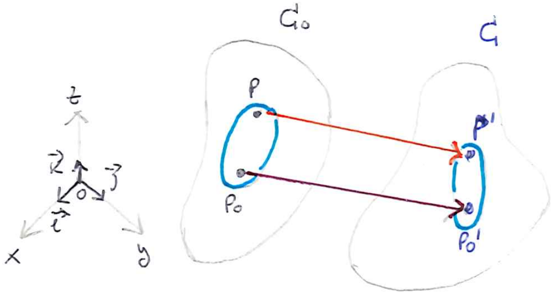
$P_0 = (1,1,0)$

$P_1 = \overset{x\;y\;z}{(1,1,2)} = \overset{\xi\;\eta\;\zeta}{(0,0,2)}$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k & 0 \\ k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ k \\ 4k \end{Bmatrix}$$

$$\vec{s} = \{k, k, 4k\}$$

2A - IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI -



$P = \{x, y, z\}$ $\quad \vec{S} = \{u, v, w\}$

$P_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ $\quad \vec{S}_0 = \{u_0, v_0, w_0\}$

$$\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

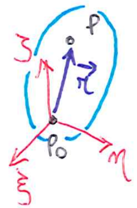
COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO $\vec{S}$, FUNZIONI CONTINUE CON LE DERIVATE

→ NO COMPENETRAZIONE

→ NO LACERAZIONI

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA P E P'

INTORNO DI P₀



$$\vec{r} = P - P_0 = \{\underbrace{\xi}_{(x-x_0)}, \underbrace{\eta}_{(y-y_0)}, \underbrace{\zeta}_{(z-z_0)}\}$$

$\boxed{\text{CAMPO DI SPOSTAMENTO}}$ $\quad \vec{S} = \vec{S}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r}$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix}$$

[N.B. è 1 TABELLA DI NUMERI]

$\underline{\underline{e}}$ = GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

TENSORE DEL 2° ORDINE CON COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI DI u, v, w RISPETTO A x, y, z NEL PUNTO P₀

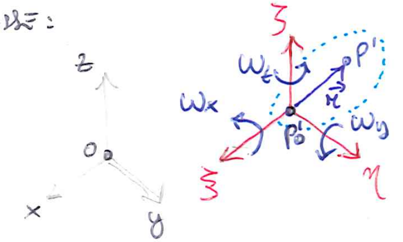
- LA TRASFORMAZIONE CHE L'INTORNO DI P₀ SUBISCE NEL PASSAGGIO DA C₀ A C PUÒ SEMPRE PENSARSI COME SOVRAPPOSIZIONE DI UN MOTO RIGIDO E DI UN MOTO DI DEFORMAZIONE PURA, RESPONSABILE DELLE VARIAZIONI DI GEOMETRIA DELL'INTORNO STESSO. AI FINI DELL'ANALISI DELLA DEFORMAZIONE IL MOTO RIGIDO È ININFLUENTE: LO STUDIO È RIVOLTO ALL'EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE, GLI EFFETTI DEL MOTO RIGIDO VANNO EPURATI.

$\boxed{\boxed{\vec{S}} = \boxed{\vec{S}'} + \boxed{\vec{S}''}}$ $\quad \boxed{\vec{S}'}$ = EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE ; $\boxed{\vec{S}''}$ = EFFETTO DEL MOTO RIGIDO $\Rightarrow$ $\begin{cases} u = u' + u'' \\ v = v' + v'' \\ w = w' + w'' \end{cases}$

A NOI INTERESSA $\boxed{\vec{S}'}$: $\begin{cases} u' = u - u'' \\ v' = v - v'' \\ w' = w - w'' \end{cases}$

VEDIAMO COM'È FATTO $\boxed{\vec{S}''} \Rightarrow \boxed{\vec{S}''} = \boxed{\vec{S}_0} + \boxed{\vec{S}'''}$ $\quad \vec{S}_0$ = TRASLAZIONE $\quad \vec{S}'''$ = ROTAZIONE RIGIDA

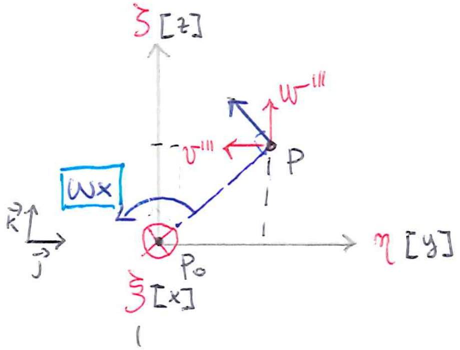
MOTO RIGIDO: PRIMA AVVIENE LA TRASLAZIONE - PASSAGGIO DA P₀ A P₀' - POI AVVIENE LA ROTAZIONE, ATTORNO AL PUNTO P₀, QUINDI ATTORNO AGLI ASSI ξ, η, ζ → 3 ROTAZIONI, UNA PER OGNI ASSE:



2A – IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI –

VEDIAMO LE 3 ROTAZIONI INTORNO A ξ, η, ζ :

[N.B. ⊗ INDICA UN VETTORE PERPENDICOLARE E USCENTE DAL FOGLIO, ⊙ UN VETTORE PERPENDICOLARE E' ENTRANTE NEL FOGLIO]



P SI SPOSTA IN DIREZIONE PERPENDICOLARE* ALLA CONGIUNGENTE TRA P E P_0, PUNTO ATTORNO A CUI RUOTA P

* IPOTESI PICCOLI SPOSTAMENTI: PER SPOSTAMENTI INFINITESIMI SI PUO' CONFONDERE L'ARCO DI CIRCONFERENZA CON LA TANGENTE

LE COMPONENTI RISPETTO A η E ζ SONO:

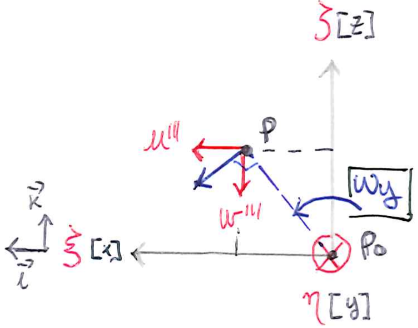
$$\begin{cases} u''' = 0 \\ v''' = -\omega_x \zeta \\ w''' = +\omega_x \eta \end{cases}$$

($u'''=0$: ROTAZIONE INTORNO A $\xi[x]$ → SPOSTAMENTO NULLO IN DIREZIONE x)

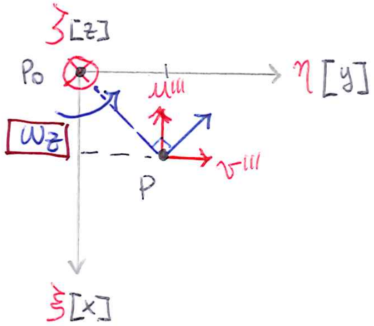
(v''', w''': ROTAZIONE ω_x PER LA DISTANZA TRA P E L'ASSE η, (OVVERO ζ) E L'ASSE ζ (OVVERO η))

N.B. [ ] PER RICORDARCI CHE ξ, η, ζ SONO PARALLELI A x, y, z RISPETTIVAMENTE

[N.B. USIAMO TERNE DESTRE → SEGNI OPPOSTI RISPETTO AL TESTO DI RIFERIMENTO DI CAPURSO]



$$\begin{cases} u''' = \omega_y \zeta \\ v''' = 0 \\ w''' = -\omega_y \xi \end{cases}$$



$$\begin{cases} u''' = -\omega_z \eta \\ v''' = \omega_z \xi \\ w''' = 0 \end{cases}$$

POSSIAMO SCRIVERE:

$$\begin{array}{l|c|c|c} & \xi & \eta & \zeta \\ u''' = & 0 & -\omega_z \eta & +\omega_y \zeta \\ v''' = & \omega_z \xi & +\,0 & -\omega_x \zeta \\ w''' = & -\omega_y \xi & +\omega_x \eta & +\,0 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{W}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}}_{\vec{r}}$$

$\underline{\underline{W}}$ = TENSORE DELLA ROTAZIONE INFINITESIMA

N.B. MATRICE CON DIAGONALE PRINCIPALE NULLA E ELEMENTI FUORI DALLA DIAGONALE OPPOSTI: MATRICE EMISIMMETRICA

$\underline{\underline{A}} = [a_{ij}]$ $i = j \rightarrow 0$ $\boxed{a_{ij} = -a_{ji}}$

$i \neq j$ → ELEMENTI DI SEGNO OPPOSTO

QUINDI: $\boxed{\vec{s}''' = \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}}$ ROTAZIONE RIGIDA

N.B. TENSORE EMISIMMETRICO PER LA TEORIA DELLE MATRICI, OGNI MATRICE $\underline{\underline{a}}$ PUÓ ESSERE SCOMPOSTA IN UN UNICO MODO NELLA SOMMA DI UNA MATRICE SIMMETRICA $\underline{\underline{b}}$ E DI UNA MATRICE EMISIMMETRICA $\underline{\underline{c}}$ (NEL CASO DI MATRICI QUADRATE)

$$\underline{\underline{b}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}}^T) \quad E \quad \underline{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}}^T) \Rightarrow \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}} + \cancel{\tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}}^T} + \tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}} - \cancel{\tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}}^T} = \underline{\underline{a}}$$

ALLORA, ESSENDO $\underline{\underline{\omega}}$ EMISIMMETRICO, RICORDANDO CHE $\vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r}$, TENENDO CONTO DELLA PROPRIETÀ DELLE MATRICI, POSSIAMO SCOMPORRE IL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO $\underline{\underline{e}}$ IN UNA PARTE SIMMETRICA, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, E UNA EMISIMMETRICA $\underline{\underline{\omega}}$ =

$$\boxed{\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}} \quad \text{CON} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T) \quad E \quad \underline{\underline{\omega}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T)$$

ALLORA. $\vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r} = \vec{s}_0 + (\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}})\vec{r} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r} + \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}$ → $\vec{s}_0$ = TRASLAZIONE

$\vec{s}''' = \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}$ = ROTAZIONE RIGIDA

$\Big\}\ \boxed{\vec{s}'' = \vec{s}_0 + \vec{s}'''}$ MOTO RIGIDO

E QUINDI $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}}$ RAPPRESENTA GLI EFFETTI DELLA DEFORMAZIONE, E $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ È IL TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA

COME POSSIAMO OTTENERE $\underline{\underline{\varepsilon}}$?

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix} \quad E \quad \underline{\underline{e}}^T = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix}$$

QUINDI: $\boxed{\vec{s}''' = \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}}$ ROTAZIONE RIGIDA

N.B. TENSORE EMISIMMETRICO PER LA TEORIA DELLE MATRICI, OGNI MATRICE $\underline{\underline{a}}$ PUO' ESSERE SCOMPOSTA IN UN UNICO MODO NELLA SOMMA DI UNA MATRICE SIMMETRICA $\underline{\underline{b}}$ E DI UNA MATRICE EMISIMMETRICA $\underline{\underline{c}}$ (NEL CASO DI MATRICI QUADRATE)

$$\underline{\underline{b}} = \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}}^T\right) \quad E \quad \underline{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}}^T\right) \Rightarrow \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}} + \cancel{\tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}}^T} + \tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}} - \cancel{\tfrac{1}{2}\underline{\underline{a}}^T} = \underline{\underline{a}}$$

ALLORA, ESSENDO $\underline{\underline{\omega}}$ EMISIMMETRICO, RICORDANDO CHE $\vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r}$, TENENDO CONTO DELLA PROPRIETÀ DELLE MATRICI, POSSIAMO SCOMPORRE IL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO $\underline{\underline{e}}$ IN UNA PARTE SIMMETRICA, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, E UNA EMISIMMETRICA $\underline{\underline{\omega}}$ =

$$\boxed{\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}} \quad CON \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T\right) \quad E \quad \underline{\underline{\omega}} = \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T\right)$$

ALLORA. $\vec{s} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{e}}\,\vec{r} = \vec{s}_0 + (\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}})\vec{r} = \vec{s}_0 + \underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r} + \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}$ → $\vec{s}_0$ = TRASLAZIONE

$\vec{s}''' = \underline{\underline{\omega}}\,\vec{r}$ = ROTAZIONE RIGIDA } $\boxed{\vec{s}'' = \vec{s}_0 + \vec{s}'''}$ MOTO RIGIDO

E QUINDI $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}}$ RAPPRESENTA GLI EFFETTI DELLA DEFORMAZIONE, E $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ È IL $\boxed{\text{TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA}}$

COME POSSIAMO OTTENERE $\underline{\underline{\varepsilon}}$?

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix} \quad E \quad \underline{\underline{e}}^T = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix}$$

2A - IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI -

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} & 2\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{P_0} & 2\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{P_0} \end{bmatrix} =$$

PORTANDO ALL'INTERNO IL TERMINE (1/2)

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ 1/2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & 1/2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 1/2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

I TERMINI FUORI DIAGONALE SONO UGUALI A 2 A 2,

INFATTI $\underline{\underline{\varepsilon}}$ È SIMMETRICO

[N.B. LE DERIVATE PARZIALI SONO SEMPRE CALCOLATE NEL PUNTO P_0]

ASSEGNIAMO DEI NOMI SPECIALI:

SULLA DIAGONALE ε → $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

ε → DILATAZIONI

FUORI DIAGONALE γ →

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

γ → SCORRIMENTI ANGOLARI

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 1/2\,\gamma_{xz} \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 1/2\,\gamma_{yz} \\ 1/2\,\gamma_{xz} & 1/2\,\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA

NB: LE COMPONENTI FUORI DALLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO LA METÀ DEGLI SCORRIMENTI ANGOLARI.

ESEMPIO APPLICATIVO

ASSEGNATO IL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO $\underline{\underline{e}} = k \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ CON $k = 10^{-5}$ RICAVARE $\underline{\underline{\varepsilon}}$ E $\underline{\underline{\omega}}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}}^T\right) \qquad \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^T\right) \qquad \underline{\underline{e}}^T = k \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}k \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2}k \begin{bmatrix} 1+1 & 3-3 & -2-8 \\ -3+3 & 2+2 & -1-1 \\ -8-2 & -1-1 & 3+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}k \begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 0 & 4 & -2 \\ -10 & -2 & 6 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ SIMMETRICO

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}k \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2}k \begin{bmatrix} 1-1 & 3+3 & -2+8 \\ -3-3 & 2-2 & -1+1 \\ -8+2 & -1+1 & 3-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}k \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\omega}}$ EMISIMMETRICO

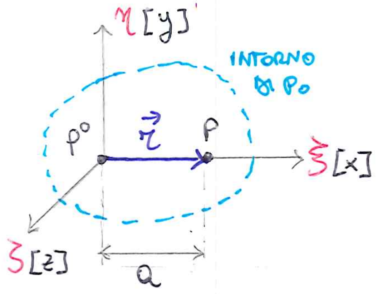
VERIFICA: $\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}} = k \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = k \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{e}}$

E INFATTI $\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{e}}$

2B - INTERPRETAZIONE FISICA DELLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE -

· LE 6 COMPONENTI DI DEFORMAZIONE - $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ - HANNO UN PRECISO SIGNIFICATO FISICO: CONSIDERIAMO UN GENERICO PUNTO P DELL'INTORNO INFINITESIMO DI P_0 CHE GIACE SULL'ASSE ξ A UNA DISTANZA a DA QUEST'ULTIMO

[N.B. TERNA DESTRA]



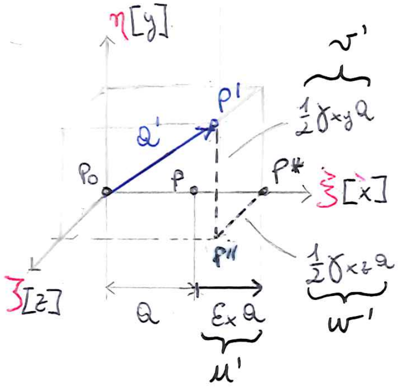
LE COORDINATE DI P SONO : $P = (a, 0, 0)$

OVVERO: $\xi = a,\ \eta = \zeta = 0$ E QUINDI $\vec{r} = \{a, 0, 0\}^T$

LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO DI P ASSOCIATE ALLA DEFORMAZIONE PURA DELL'INTORNO DI P_0 u', v', w' SONO :

$$\vec{s}' = \underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}$$

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u' = \varepsilon_x a = \overline{PP^*} \\ v' = \frac{1}{2}\gamma_{xy} a = \overline{P'P''} \\ w' = \frac{1}{2}\gamma_{xz} a = \overline{P^*P''} \end{cases}$$



P SI È SPOSTATO IN P' DI $\varepsilon_x a$ IN DIREZIONE ξ, DI $\frac{1}{2}\gamma_{xy} a$ IN DIREZIONE η E DI $\frac{1}{2}\gamma_{xz} a$ IN DIREZIONE ζ

IL SEGMENTO $\overline{P_0P} = a$ DIVENTA $\overline{P_0P'}$ DI LUNGHEZZA a'

PER IL TEOREMA DI PITAGORA

$$\boxed{\overline{P_0P'} = a'} = \sqrt{(a + \varepsilon_x a)^2 + (1/2\,\gamma_{xy} a)^2 + (1/2\,\gamma_{xz} a)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2(1+\varepsilon_x)^2 + a^2(1/2\,\gamma_{xy})^2 + a^2(1/2\,\gamma_{xz})^2} =$$

$$= \sqrt{a^2\left[(1+\varepsilon_x)^2 + (1/2\,\gamma_{xy})^2 + (1/2\,\gamma_{xz})^2\right.} =$$

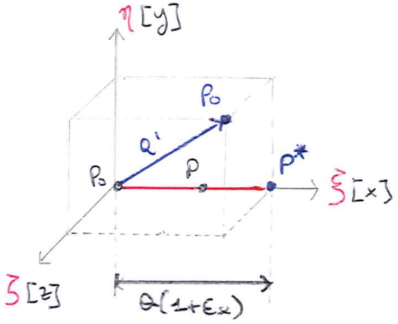
$$= a\sqrt{(1+\varepsilon_x)^2 + (1/2\,\gamma_{xy})^2 + (1/2\,\gamma_{xz})^2} =$$

$$= a\sqrt{1 + 2\varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_x^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xz}^2}} \cong \underline{a\sqrt{1+2\varepsilon_x}}$$

INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE, TRASCURABILI (IN QUANTO ε E γ SONO MOLTO PICCOLE: $\varepsilon_x^2, \gamma_{xy}^2, \gamma_{xz}^2 \ll \varepsilon_x$)

2B - INTERPRETAZIONE FISICA DELLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE -

Ⅱ



$$\overline{P_0P'} = \ell' \cong \ell\sqrt{1+2\varepsilon_x}$$

FACENDO UNO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR $\sqrt{1+x} \cong 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\dots$ TRONCATO AL PRIMO ORDINE

ALLORA: $\ell' \cong \ell\left[1+\frac{1}{2}(2\varepsilon_x)\right] = \ell(1+\varepsilon_x)$

OVVERO LA NUOVA LUNGHEZZA $\boxed{\overline{P_0P'}}$ DEL SEGMENTO $\overline{P_0P}$, TRATTANDOSI DI SPOSTAMENTI INFINITESIMI PUÒ ESSERE CONFUSA CON LA PROIEZIONE $\boxed{\overline{PP^*}}$ DI $\overline{P_0P'}$ SULL'ASSE ξ

ESSENDO $\ell' = \ell+\ell\varepsilon_x \rightsquigarrow \ell'-\ell = \ell\varepsilon_x \rightsquigarrow \frac{\ell'-\ell}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}\varepsilon_x}{\cancel{\ell}}$ PERTANTO $\boxed{\varepsilon_x = \frac{\ell'-\ell}{\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell}}$

DOVE $\Delta\ell$ È LA VARIAZIONE DI LUNGHEZZA E $\ell=\ell$ È LA LUNGHEZZA INIZIALE DI $\overline{P_0P}$, SEGMENTO INIZIALMENTE DIRETTO LUNGO L'ASSE x

ALLORA ε_x = VARIAZIONE DI LUNGHEZZA RIFERITA ALLA LUNGHEZZA INIZIALE DI UN SEGMENTO ORIGINARIAMENTE IN DIREZIONE x

ANALOGA INTERPRETAZIONE PUÒ DARSI ALLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE ε_y E ε_z, RIFERITE ALLE DIREZIONI y E z RISPETTIVAMENTE

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right]$$

$\boxed{\text{DILATAZIONI}}$ = VARIAZIONE DI LUNGHEZZA DI UNA FIBRA DEL SOLIDO INIZIALMENTE ALLINEATA CON L'ASSE x, y o z RISPETTIVAMENTE RIFERITA ALLA LUNGHEZZA INIZIALE

$$\boxed{\varepsilon_i = \frac{\Delta\ell}{\ell}}$$ COMPONENTI DI DILATAZIONE

$$\varepsilon_i = \frac{\ell'-\ell}{\ell} = \frac{\ell'}{\ell} - 1$$

$\ell' > \ell \to \Delta\ell > 0 \to \varepsilon_i > 0$

$\ell' < \ell \to \Delta\ell < 0 \to \varepsilon_i < 0$

$\ell' = \ell \to \Delta\ell = 0 \to \varepsilon_i = 0$

NB: DIMENSIONALMENTE: $[\varepsilon_x] = \frac{[L]}{[L]} = [-]$ È UNA QUANTITÀ PRIVA DI DIMENSIONI (NUMERO PURO!)

2B - INTERPRETAZIONE FISICA DELLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE -

PER LE ULTERIORI TRE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE γ_{xy}, γ_{xz} E γ_{yz} DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI $\underline{\underline{\varepsilon}}$ CONSIDERIAMO 2 PUNTI P E Q DISPOSTI RISPETTIVAMENTE SUGLI ASSI ξ E η A DISTANZA a E b DA P_0 RISPETTIVAMENTE

$$P=(a,0,0) \qquad \vec{r}_P=(a,0,0)^T \qquad \vec{s}\,'_P=\underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}_P$$

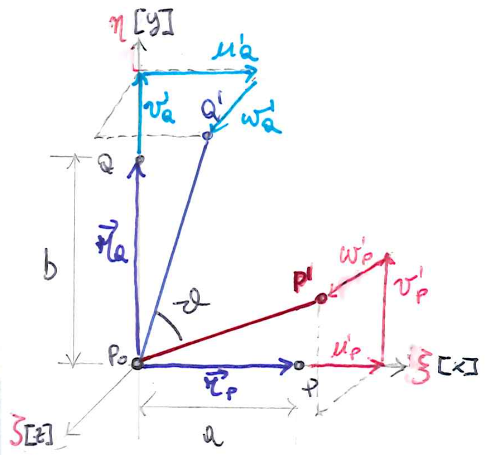
$$Q=(0,b,0) \qquad \vec{r}_Q=(0,b,0)^T \qquad \vec{s}\,'_Q=\underline{\underline{\varepsilon}}\,\vec{r}_Q$$

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \begin{matrix} \cdot(x-x_0) \\ (y-y_0) \\ (z-z_0) \end{matrix}$$

A SEGUITO DELLA DEFORMAZIONE DELL'INTORNO DI P_0 I PUNTI P E Q SI SPOSTANO IN P' E Q':

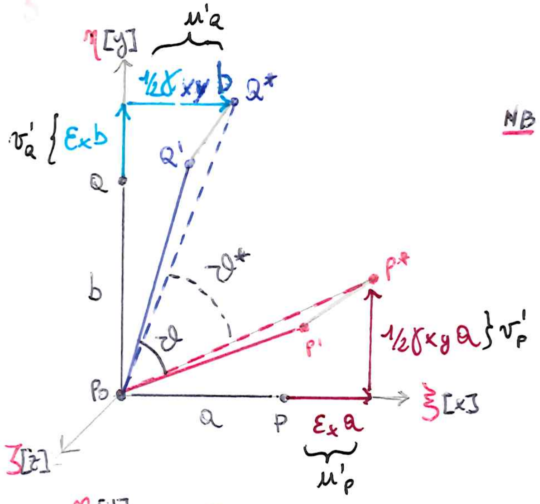
$$\begin{cases} u'_P=\varepsilon_x a \\ v'_P=\frac{1}{2}\gamma_{xy} a \\ w'_P=\frac{1}{2}\gamma_{xz} a \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_Q=\frac{1}{2}\gamma_{xy} b \\ v'_Q=\varepsilon_y b \\ w'_Q=\frac{1}{2}\gamma_{yz} b \end{cases}$$

VOGLIAMO STUDIARE LA VARIAZIONE DELL'ANGOLO TRA LE FIBRE (RAPPRESENTATE DAI SEGMENTI $\overline{P_0P}$ CHE DIVENTA $\overline{P_0P'}$ E $\overline{P_0Q}$ CHE DIVENTA $\overline{P_0Q'}$)
INIZIALMENTE SI HA UN ANGOLO RETTO ($\pi/2$ IN RADIANTI)
AL TERMINE L'ANGOLO VALE $\vartheta=(\overline{P_0P'}\,\widehat{\ }\,\overline{P_0Q'})$



NB FACCIAMO UN'APPROSSIMAZIONE: L'ANGOLO ϑ GIACE SU UN PIANO CHE PASSA PER I PUNTI P_0, P' E Q'
PER CALCOLARE L'ANGOLO ϑ TRASCURIAMO GLI SPOSTAMENTI w'_P E w'_Q IN DIREZIONE ζ E CALCOLIAMO L'ANGOLO ϑ^* OTTENUTO COME PROIEZIONE SUL PIANO ξ,η: $\vartheta=(\overline{P_0P'}\,\widehat{\ }\,\overline{P_0Q'})\cong\vartheta^*(\overline{P_0P^*}\,\widehat{\ }\,\overline{Q_0Q^*})$

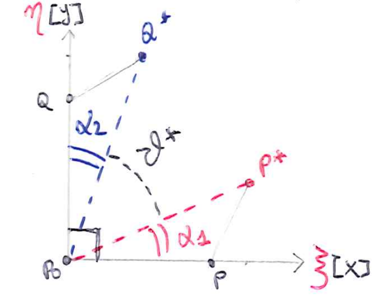
POSSIAMO NOTARE CHE $\frac{\pi}{2}-\vartheta^*=\alpha_1+\alpha_2$, CON α_1 ANGOLO TRA $\overline{P_0P^*}$ E L'ASSE ξ E α_2 ANGOLO TRA $\overline{P_0Q^*}$ E L'ASSE η; E CALCOLARE α_1 E α_2:



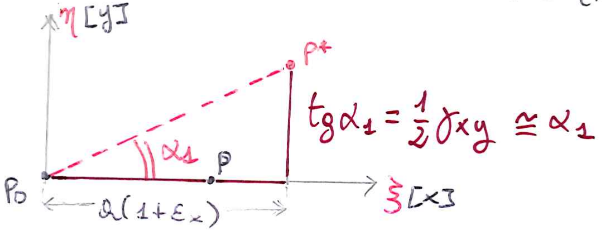
$$\boxed{\alpha_1} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}a}{(1+\varepsilon_x)a}=\frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{1+\varepsilon_x} \qquad \text{ESSENDO } \varepsilon_x \ll 1 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

PER ANGOLI MOLTO PICCOLI POSSIAMO CONFONDERE LA TANGENTE CON L'ANGOLO (IN RADIANTI)

ALLORA $\boxed{\alpha_1 \cong \frac{1}{2}\gamma_{xy}}$

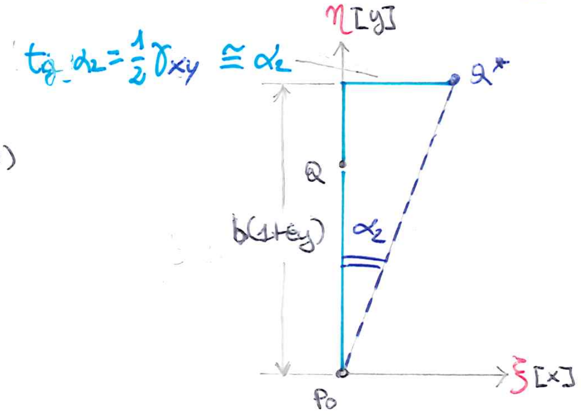


NB: $\operatorname{tan} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$



2B – INTERPRETAZIONE FISICA DELLE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE –

$$\boxed{\alpha_2} \rightarrow tg\,\alpha_2 = \frac{1/2\,\gamma_{xy}\,b}{(1+\varepsilon_y)b} = \frac{1/2\,\gamma_{xy}}{1+\varepsilon_y}$$ ESSENDO $\varepsilon_y \ll 1 \rightarrow tg\,\alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$


$tg\,\alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cong \alpha_2$

PER ANGOLI MOLTO PICCOLI POSSIAMO CONFONDERE LA TANGENTE CON L'ANGOLO (IN RADIANTI)

ALLORA $$\boxed{\alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_{xy}}$$

N.B. $\underline{\underline{\varepsilon}}$ È SIMMETRICO $\rightarrow \frac{\pi}{2} - \vartheta^* = \frac{1}{2}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \gamma_{xy}$

ALLORA γ_{xy} : È LA VARIAZIONE $\overset{}{\wedge}$ DI ANGOLO (TOTALE) (ESPRESSA IN RADIANTI) FRA DUE FIBRE ORIGINARIAMENTE ALLINEATE CON GLI ASSI x E y.

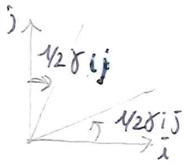
ANALOGAMENTE, γ_{xz} È LA VARIAZIONE DELL'ANGOLO (IN RADIANTI) FRA DUE FIBRE ORIGINARIAMENTE ALLINEATE CON GLI ASSI x E z

E γ_{yz} È LA VARIAZIONE DELL'ANGOLO (IN RADIANTI) FRA DUE FIBRE ORIGINARIAMENTE ALLINEATE CON GLI ASSI y E z

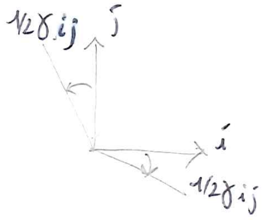
N.B, LE COMPONENTI NEL TENSORE SONO $1/2\,\gamma_{ij}$, MENTRE γ_{ij} RAPPRESENTA LA VARIAZIONE TOTALE DELL'ANGOLO

LE γ SONO ESPRESSE IN RADIANTI, SONO QUINDI UN NUMERO PURO (COME LE ε) E SI DEFINISCONO **SCORRIMENTI ANGOLARI**

SE $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij} > 0$ ALLORA L'ANGOLO, INIZIALMENTE RETTO, TRA LE FIBRE ALLINEATE CON GLI ASSI i E j DIVENTA ACUTO → SI CHIUDE



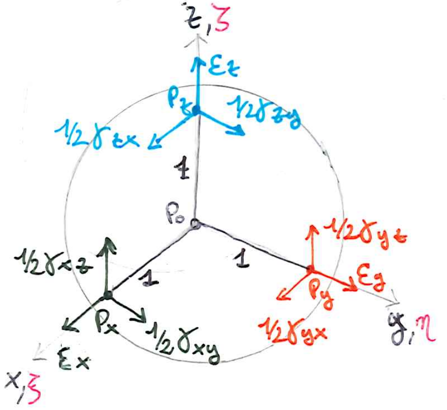
SE $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij} < 0$ ALLORA L'ANGOLO DIVENTA OTTUSO → SI APRE



2C – COMPONENTI DI DEFORMAZIONE RISPETTO A UNA TERNA QUALUNQUE –

LA DEFORMAZIONE PURA DELL'INTORNO INFINITESIMO DI P_0 È COMPLETAMENTE DEFINITA NOTE DILATAZIONI E SCORRIMENTI RELATIVI ALLA TERNA DI ASSI ORTOGONALI ξ, η, ζ PARALLELI AGLI ASSI COORDINATI x, y, z E CON ORIGINE IN P_0

CONSIDERIAMO UNA SFERA DI RAGGIO UNITARIO E CENTRO IN P_0 CHE INTERSECA GLI ASSI x, y, z NEI PUNTI P_x, P_y E P_z RISPETTIVAMENTE



$P_x = (1,0,0)$

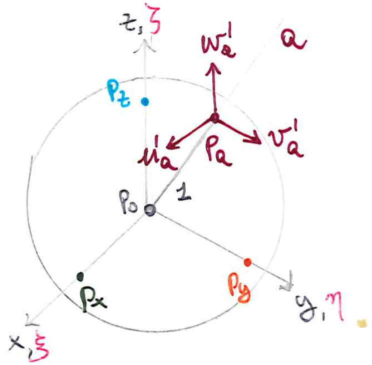
$P_y = (0,1,0)$

$P_z = (0,0,1)$

$$\vec{s}\,'_x \quad \begin{cases} u'_{P_x} = \varepsilon_x \\ v'_{P_x} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ w'_{P_x} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \end{cases} \qquad \vec{s}\,'_y \quad \begin{cases} u'_{P_y} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ v'_{P_y} = \varepsilon_y \\ w'_{P_y} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} \end{cases} \qquad \vec{s}\,'_z \quad \begin{cases} u'_{P_z} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ v'_{P_z} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ w'_{P_z} = \varepsilon_z \end{cases}$$

LE DILATAZIONI ε SONO PERPENDICOLARI ALLA SFERA E IN DIREZIONE DEGLI ASSI x, y, z

GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ SONO TANGENTI ALLA SFERA



CONSIDERIAMO IL PUNTO P_Q, IN CUI LA RETTA Q INCROCIA LA SFERA

LA RETTA Q È INDIVIDUATA DAI COSENI DIRETTORI $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ RISPETTO AGLI ASSI x, y, z

ALLORA $P_Q = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ ESSENDO IL RAGGIO DELLA SFERA UNITARIO

LO SPOSTAMENTO (DOVUTO ALLA DEFORMAZIONE PURA) DI P_Q SARÀ $\vec{s}\,'_Q = (u'_Q, v'_Q, w'_Q)^T$

OVVERO:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{s}\,'_Q \quad \begin{array}{l|l|l|l} & P_x & P_y & P_z \\ u'_Q = & \varepsilon_x \, \alpha_x + & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \, \alpha_y + & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \, \alpha_z \\ v'_Q = & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \, \alpha_x + & \varepsilon_y \, \alpha_y + & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \, \alpha_z \\ w'_Q = & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \, \alpha_x + & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \, \alpha_y + & \varepsilon_z \, \alpha_z \end{array}$$

ALLORA: $\varepsilon_Q = u'_{P_Q}\alpha_x + v'_{P_Q}\alpha_y + w'_{P_Q}\alpha_z = (\varepsilon_x\alpha_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z)\alpha_x + (\frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y\alpha_y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z)\overset{\alpha_y}{\vee} + (\frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z\alpha_z)\alpha_z$

QUINDI: $\boxed{\varepsilon_Q = \varepsilon_x\alpha_x^2 + \varepsilon_y\alpha_y^2 + \varepsilon_z\alpha_z^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \gamma_{xz}\alpha_x\alpha_z + \gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z}$ [*] DILATAZIONE LUNGO UNA GENERICA DIREZIONE Q

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

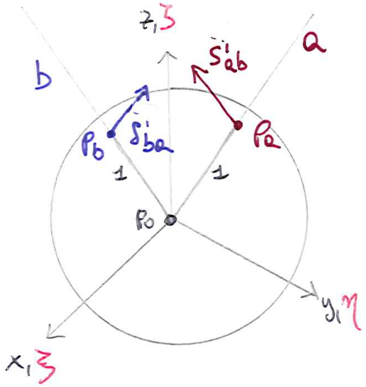
2C- COMPONENTI DI DEFORMAZIONE RISPETTO A UNA TERNA QUALSIASI -

II

LA [*] É LA RELAZIONE FONDAMENTALE CHE CONSENTE DI CALCOLARE LA DILATAZIONE LUNGO UNA GENERICA DIREZIONE a NOTO IL TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA $\underline{\underline{\varepsilon}}$ E LA DIREZIONE a, OVVERO I COSENI DIRETTORI $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

N.B. É DUALE DELLA RELAZIONE DI CAUCHY, CHE CONSENTIVA DI RICAVARE LA TENSIONE NORMALE σ_n SU UNA GIACITURA DI NORMALE $\vec{n}$

CONSIDERIAMO ORA DUE PUNTI: IL PUNTO P_a, IN CUI LA RETTA a INCROCIA LA SFERA, E IL PUNTO P_b, IN CUI LA RETTA b INCROCIA LA SFERA



$$P_a = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$$

$P_b = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ CON $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ COSENI DIRETTORI DELLA RETTA b

$$\underline{\vec{S}'_a = \{u'_a, v'_a, w'_a\}^T} \quad E \quad \underline{\vec{S}'_b = \{u'_b; v'_b; w'_b\}^T}$$

PROIETTANDO $\vec{S}'_a$ LUNGO b: → S'_{ab}

$$S'_{ab} = u'_a \beta_x + v'_a \beta_y + w'_a \beta_z =$$

$$= \left(\varepsilon_x \alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z\right)\beta_x + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z\right)\beta_y + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z\alpha_z\right)\beta_z$$

RACCOGLIENDO DILATAZIONI E SCORRIMENTI: $\underline{S'_{ab}} = \underbrace{\varepsilon_x\alpha_x\beta_x + \varepsilon_y\alpha_y\beta_y + \varepsilon_z\alpha_z\beta_z}_{\text{DILATAZIONI}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x\beta_y}_{\gamma_{xy}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x\beta_z}_{\gamma_{xz}} +$

$$+ \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y\beta_z}_{\gamma_{yz}}$$

PER RICAVARE $\vec{S}'_b$ BISOGNA MOLTIPLICARE $\underline{\underline{\varepsilon}}$ PER $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T$, LE SUE COMPONENTI SARANNO ANALOGHE A QUELLE DI $\vec{S}'_a$:

$$u'_b = \varepsilon_x\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_z ; \quad v'_b = \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_x + \varepsilon_y\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_z ; \quad w'_b = \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_y + \varepsilon_z\beta_z$$

PROIETTANDO $\vec{S}'_b$ LUNGO a: → S'_{ba}

$$S'_{ba} = u'_b\alpha_x + v'_b\alpha_y + w'_b\alpha_z = \left(\varepsilon_x\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_z\right)\alpha_x + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_x + \varepsilon_y\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_z\right)\alpha_y + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\beta_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_y + \varepsilon_z\beta_z\right)\alpha_z$$

RACCOGLIENDO
ε E γ

$$\underline{\vec{S}'_{ba}} = \underbrace{\varepsilon_x\alpha_x\beta_x + \varepsilon_y\alpha_y\beta_y + \varepsilon_z\alpha_z\beta_z}_{\text{DILATAZIONI}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x\beta_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y\beta_x}_{\gamma_{xy}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x\beta_z + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z\beta_x}_{\gamma_{xz}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y\beta_z + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z\beta_y}_{\gamma_{yz}}.$$

2C – COMPONENTI DI DEFORMAZIONE RISPETTO A UNA TERNA QUALSIASI –

2A

ALLORA $\boxed{\delta'_{ab} = \delta'_{ba}}$ ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER GLI SFORZI $t_{nm} = t_{mn}$: PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ

SE CONSIDERIAMO DUE DIREZIONI ORTOGONALI $a \perp b$ ALLORA $\delta'_{ab} = \delta'_{ba} = 1/2\, \gamma_{ab}$, OVVERO METÀ DELLO SCORRIMENTO CHE AVVIENE NELL'ANGOLO ORIGINARIAMENTE RETTO TRA LE RETTE DI DIREZIONE a E b

2B

$$\frac{1}{2}\gamma_{ab} = \varepsilon_x \alpha_x \beta_x + \varepsilon_y \alpha_y \beta_y + \varepsilon_z \alpha_z \beta_z + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \frac{1}{2}\gamma_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \frac{1}{2}\gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$$

E QUINDI

$$\boxed{\gamma_{ab} = 2(\varepsilon_x \alpha_x \beta_x + \varepsilon_y \alpha_y \beta_y + \varepsilon_z \alpha_z \beta_z) + \gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \gamma_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)}$$

2C

N.B. DUALE DELLA RELAZIONE DI CAUCHY, CHE CONSENTE DI CALCOLARE τ_{nm} UNA VOLTA NOTE $\vec{n}$ E $\vec{m}$

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2D - COMPONENTI PRINCIPALI ED INVARIANTI DI DEFORMAZIONE (I)

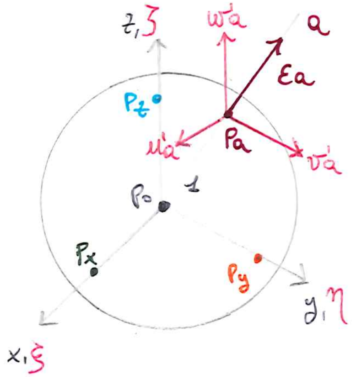
SI È VISTO CHE LO SPOSTAMENTO DI UN GENERICO PUNTO P, APPARTENENTE ALL'INTORNO DEL PUNTO P_o SOGGETTO A DEFORMAZIONE PURA, VARIA AL VARIARE DELLA RETTA a SULLA QUALE GIACE IL PUNTO. È LOGICO PERTANTO CHIEDERSI SE:

- ESISTONO PARTICOLARI DIREZIONI a LUNGO LE QUALI LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO P_a, $\vec{s}'_a$, HA DIREZIONE COINCIDENTE CON a, OVVERO PER LE QUALI SIANO NULLI GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ E SI ABBIANO SOLO DILATAZIONI ε?

SE TALI DIREZIONI ESISTONO, SONO DETTE DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE E LE RELATIVE DEFORMAZIONI COMPONENTI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE

SUPPONIAMO CHE LA RETTA a SIA DIREZIONE PRINCIPALE DI DEFORMAZIONE: ALLORA NEL PUNTO P_a LO SPOSTAMENTO, DOVUTO A DEFORMAZIONE PURA, $\vec{s}'_a$ È DIRETTO ESCLUSIVAMENTE SECONDO LA DIREZIONE a, HA COME MODULO IL VALORE ε_a DELLA CORRISPONDENTE DILATAZIONE PRINCIPALE E GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ_{ab} SONO NULLI: $\varepsilon_a \neq 0$ E $\gamma_{ab} = 0 \ \forall b$

$\vec{s}'_a = \varepsilon_a \vec{a}$ DOVE $\vec{a}$ È IL VERSORE DELLA DIREZIONE a



INDICANDO CON $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ I COSENI DIRETTORI DELLA RETTA a LE COMPONENTI DI $\vec{s}'_a$ SONO:

$$\begin{cases} u'_a = \varepsilon_a \alpha_x \\ v'_a = \varepsilon_a \alpha_y \\ w'_a = \varepsilon_a \alpha_z \end{cases}$$

MA D'ALTRA PARTE:

$$\begin{cases} u'_a = \varepsilon_x \alpha_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z \\ v'_a = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z \\ w'_a = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z \end{cases}$$

ALLORA SE a È UNA DIREZIONE PRINCIPALE DI DEFORMAZIONE DEVONO ESSERE VALIDE ENTRAMBE:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a \alpha_x &= \varepsilon_x \alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z \\ \varepsilon_a \alpha_y &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z \\ \varepsilon_a \alpha_z &= \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} (\varepsilon_x - \varepsilon_a)\alpha_x &+ \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_z = 0 \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_x &+ (\varepsilon_y - \varepsilon_a)\alpha_y + \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_z = 0 \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_x &+ \tfrac{1}{2}\gamma_{yz}\alpha_y + (\varepsilon_z - \varepsilon_a)\alpha_z = 0 \end{aligned}} \quad [*]$$

ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER L'ANALISI DELLA TENSIONE, [*] È UN SISTEMA OMOGENEO NELLE TRE INCOGNITE $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ED È RICONDUCIBILE AD UN PROBLEMA AGLI AUTOVALORI: LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA PUÒ ESSERE SCRITTA COME $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_a \underline{\underline{I}}}$ E IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI NON BANALI ($\alpha_x \neq 0, \alpha_y \neq 0, \alpha_z \neq 0$) QUANDO SI ANNULLA IL SUO DETERMINANTE $\boxed{\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_a \underline{\underline{I}}) = 0}$, RISPETTANDO LA CONDIZIONE $\boxed{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1}$ (a DEVE ESSERE UNA DIREZIONE VALIDA)

$$\det \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_a) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & (\varepsilon_y - \varepsilon_a) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & (\varepsilon_z - \varepsilon_a) \end{bmatrix} = 0 \iff \boxed{\varepsilon_a^3 - J_1 \varepsilon_a^2 - J_2 \varepsilon_a - J_3 = 0}$$

EQUAZIONE CUBICA IN ε_a OTTENUTA SVILUPPANDO IL DETERMINANTE DI $(\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_a \underline{\underline{I}})$: EQUAZIONE CARATTERISTICA CON J_1, J_2, J_3 INVARIANTI DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI INFINITESIME $\underline{\underline{\varepsilon}}$

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2D – COMPONENTI PRINCIPALI ED INVARIANTI DI DEFORMAZIONE –

Ⓘ

2A

$\boxed{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \text{ INVARIANTI DI } \underline{\underline{\varepsilon}}}$

N.B. [FORME ANALOGHE A I_1, I_2, I_3 INVARIANTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$]

INVARIANTE PRIMO O LINEARE $\boxed{\mathcal{J}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$

2B

INVARIANTE SECONDO O QUADRATICO $\boxed{\mathcal{J}_2 = \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) - (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z)}$

NB - $\mathcal{J}_2 = -\left(\det \begin{bmatrix} \varepsilon_y & 1/2\,\gamma_{yz} \\ 1/2\,\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xz} \\ 1/2\,\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \right)$

2C

INVARIANTE TERZO O CUBICO $\boxed{\mathcal{J}_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}\gamma_{xz}\gamma_{yz}) - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{xz}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2)}$

NB. $\mathcal{J}_3 = \det \underline{\underline{\varepsilon}}$

2D

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\boxed{\varepsilon_a^3 - \mathcal{J}_1 \varepsilon_a^2 - \mathcal{J}_2 \varepsilon_a - \mathcal{J}_3 = 0}$ AMMETTE SEMPRE 3 RADICI REALI (PER LA SIMMETRIA DI $\underline{\underline{\varepsilon}}$)

CONSEGUENTEMENTE ESISTONO 3 COMPONENTI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE $\boxed{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ $\boxed{\text{DILATAZIONI PRINCIPALI}}$

E SI POSSONO DETERMINARE UNIVOCAMENTE 3 DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE (AUTOVETTORI DEL PROBLEMA) MUTUALMENTE ORTOGONALI (N.B. SI PUÒ DETERMINARE LA DIREZIONE MA NON IL VERSO)

È POSSIBILE INDIVIDUARE 3 CASI:

$\boxed{\text{N.B. } \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3}$

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ 3 RADICI DISTINTE, LE 3 CORRISPONDENTI DIREZIONI PRINCIPALI SONO ORTOGONALI

$\boxed{2° \text{ CASO}}$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ o $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ 2 RADICI COINCIDENTI E 1 DISTINTA, SI PUÒ DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLA RADICE DISTINTA E TUTTE LE DIREZIONI CONTENUTE NEL PIANO ORTOGONALE A ESSA SONO DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE

$\boxed{3° \text{ CASO}}$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ 3 RADICI COINCIDENTI, TUTTE LE DIREZIONI SONO PRINCIPALI

2D - COMPONENTI PRINCIPALI ED INVARIANTI DI DEFORMAZIONE -

2A

NEI 3 CASI È SEMPRE POSSIBILE INDIVIDUARE (NEL PRIMO CASO UNIVOCAMENTE, NEGLI ALTRI DUE VIA VIA PIÙ ARBITRARIAMENTE) UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE IN CUI IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI INFINITESIME $\underline{\underline{\varepsilon}}$ HA SOLO DILATAZIONI (ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO CON $\underline{\underline{\sigma}}$)

2B

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

$\varepsilon_1 \rightarrow \vec{n1}$

$\varepsilon_2 \rightarrow \vec{n2}$

$\varepsilon_3 \rightarrow \vec{n3}$

[CON $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ TERNA DESTRA]

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{n1} & \vec{n2} & \vec{n3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{E} \quad \boxed{\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \mathcal{Y}_2 &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) \\ \mathcal{Y}_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{aligned}}$$

INVARIANTI DI DEFORMAZIONE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE 1, 2, 3

2C

SE $\boxed{\mathcal{Y}_3 = 0}$ ALLORA ALMENO UNA TRA $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 È NULLA → STATO PIANO DI DEFORMAZIONE

$\sqrt{}$ E $\boxed{\mathcal{D}_3 = 0}$

SE $\boxed{\mathcal{Y}_2 = 0}$ ALLORA ALMENO DUE TRA $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 SONO NULLE → STATO MONO ASSIALE DI DEFORMAZIONE

2D

NB. NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE LE RELAZIONI FONDAMENTALI CHE CONSENTONO DI CALCOLARE DILATAZIONI LUNGO UNA GENERICA DIREZIONE a E GLI SCORRIMENTI ANGOLARI NOTE DUE DIREZIONI ORTOGONALI a E b DIVENTANO:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_1\alpha_1^2 + \varepsilon_2\alpha_2^2 + \varepsilon_3\alpha_3^2$$

$$\gamma_{ab} = 2\varepsilon_1\alpha_1\beta_1 + 2\varepsilon_2\alpha_2\beta_2 + 2\varepsilon_3\alpha_3\beta_3$$

[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ COSENI DIRETTORI DI a
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ COSENI DIRETTORI DI b } RISPETTO AL NUOVO RIFERIMENTO 1, 2, 3

- PER IL $\boxed{\text{PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ}}$, PRESE DUE DILATAZIONI PRINCIPALI ε_i E ε_j E DETTO ϑ_{ij} L'ANGOLO TRA LE CORRISPONDENTI DIREZIONI PRINCIPALI, DEVE RISULTARE CHE: $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ OVVERO $\boxed{\varepsilon_i \cos\vartheta_{ij} = \varepsilon_j \cos\vartheta_{ji}}$

ESSENDO $\vartheta_{ij} = \vartheta_{ij}$ ALLORA $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)\cos\vartheta_{ij} = 0$ SE $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j \rightarrow \cos\vartheta_{ij} = 0 \rightarrow \vartheta_{ij} = \pi/2$

- SE $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ ALLORA $\vartheta_{12} = \vartheta_{13} = \vartheta_{23} = 90°$ E $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 SONO MUTUAMENTE ORTOGONALI

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2D- COMPONENTI PRINCIPALI ED INVARIANTI DI DEFORMAZIONE - IV

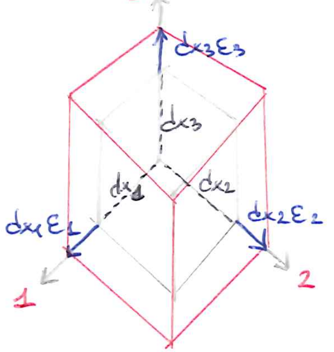
2A

CONSIDERIAMO UN VOLUME INFINITESIMO CON GLI SPIGOLI PARALLELI AGLI ASSI PRINCIPALI 1,2,3 DI LUNGHEZZA dx_1, dx_2, dx_3

IL VOLUME INDEFORMATO VALE $dV = dx_1 dx_2 dx_3$

A DEFORMAZIONE AVVENUTA LA LUNGHEZZA DEI LATI È PARI A $dx_1(1+\varepsilon_1)$, $dx_2(1+\varepsilon_2)$ E $dx_3(1+\varepsilon_3)$ E PERTANTO IL VOLUME DEFORMATO VALE $dV' = dx_1(1+\varepsilon_1)\,dx_2(1+\varepsilon_2)\,dx_3(1+\varepsilon_3)$

2B



RACCOGLIENDO: $dV' = dx_1 dx_2 dx_3 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) =$

$= dV(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) =$

2C

$= dV[1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3] =$

$= dV[1+J_1 - \cancel{J_2} + \cancel{J_3}] =$ ESSENDO $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ E ε_3 INFINITESIMI $J_3 \ll J_2 \ll J_1$

$= dV[1+J_1] = dV[1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3]$

2D

ESTENDENDO IL CONCETTO DI DILATAZIONE AL VOLUME POSSIAMO DEFINIRE LA DILATAZIONE VOLUMETRICA ε_V:

$$\varepsilon_V = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{\cancel{dV} + dV(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - \cancel{dV}}{dV} = \frac{\cancel{dV}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{\cancel{dV}} = \boxed{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} = \boxed{J_1}$$

L'INVARIANTE PRIMO o LINEARE RAPPRESENTA LA VARIAZIONE VOLUMETRICA

ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER IL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$ È POSSIBILE SCOMPORRE IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONE INFINITESIMA:

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}'}$$

DOVE $\boxed{\frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}}}$ È LA DEFORMAZIONE ISOTROPA (PARTE SFERICA DELLA DEFORMAZIONE) E $\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}'}$ IL DEVIATORE DI DEFORMAZIONE

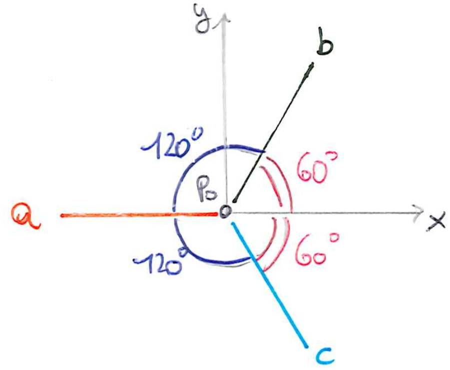
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_V/3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_V/3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_V/3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}}' = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{J_1}{3}\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_V}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_V}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_V}{3} \end{bmatrix}$$

J_1 DEFORMAZIONE ISOTROPA (PARTE SFERICA) $= \varepsilon_V/3 + \varepsilon_V/3 + \varepsilon_V/3 = \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ PARTE DI DEFORMAZIONE CON VARIAZIONE DI VOLUME

J_1' DEVIATORE DI DEFORMAZIONE $= \varepsilon_x - \varepsilon_V/3 + \varepsilon_y - \varepsilon_V/3 + \varepsilon_z - 3V/3 = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z - \varepsilon_V = \varepsilon_V - \varepsilon_V = 0$ PARTE DI DEFORMAZIONE SENZA VARIAZIONE DI VOLUME

ESEMPIO APPLICATIVO

CONSIDERIAMO UNA ROSETTA ESTENSIMETRICA CHE MISURA GLI ALLUNGAMENTI DOVUTI A DEFORMAZIONE LUNGO TRE DIREZIONI a, b, c DISPOSTE CON ANGOLI DI 120°



SUPPONIAMO DI ESSERE IN UNA SITUAZIONE DI STATO PIANO DI DEFORMAZIONE E CHE LA ROSETTA RILEVI (MEDIANTE LA DIFFERENZA DELLE RESISTENZE) QUESTE DEFORMAZIONI:

$$\varepsilon_a = 1 \cdot K$$

$$\varepsilon_b = -0{,}3 \cdot K \qquad \text{CON } K = \text{COSTANTE} = 10^{-4}$$

$$\varepsilon_c = 5 \cdot K$$

* QUANTO VALGONO ε_x, ε_y E γ_{xy}?

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NB. STATO PIANO DI DEFORMAZIONE: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

USIAMO LE RELAZIONI FONDAMENTALI PER CALCOLARE LE DILATAZIONI LUNGO UNA DIREZIONE QUALUNQUE d:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \varepsilon_z \cancel{\alpha_z^2} + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y + \gamma_{xz}\cancel{\alpha_x}\alpha_z + \gamma_{yz}\cancel{\alpha_y}\alpha_z = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y$$

PER DETERMINARLE RISPETTO ALLE DIREZIONI a, b, c BASTA CONOSCERE I COSENI DIRETTORI:

a) a È IN DIREZIONE x $\quad \alpha_x = -1 \; ; \; \alpha_y = 0 \; ; \; \alpha_z = 0$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x(-1)^2 + \varepsilon_y(0)^2 + \gamma_{xy}(-1 \cdot 0) = \varepsilon_x \qquad \varepsilon_a = \varepsilon_x = 1 \cdot K$$

b) b È RUOTATA DI 60° RISPETTO ALL'ASSE x: $\quad \alpha_x = 1/2 \; ; \; \alpha_y = \sqrt{3}/2 \; ; \; \alpha_z = 0$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x\left(1/2\right)^2 + \varepsilon_y\left(\sqrt{3}/2\right)^2 + \gamma_{xy}\left(1/2 \cdot \sqrt{3}/2\right) = 1/4\,\varepsilon_x + 3/4\,\varepsilon_y + \sqrt{3}/4\,\gamma_{xy} = -0{,}3 \cdot K$$

c) c È RUOTATA DI -60° RISPETTO ALL'ASSE x: $\quad \alpha_x = 1/2 \; ; \; \alpha_y = -\sqrt{3}/2 \; ; \; \alpha_z = 0$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x\left(1/2\right)^2 + \varepsilon_y\left(-\sqrt{3}/2\right)^2 + \gamma_{xy}\left(1/2 \cdot \left(-\sqrt{3}/2\right)\right) = 1/4\,\varepsilon_x + 3/4\,\varepsilon_y - \sqrt{3}/4\,\gamma_{xy} = 5 \cdot K$$

SI HA QUINDI:

A

2A

$$\begin{cases} \varepsilon_a \rightarrow \varepsilon_x = 1.k & [1] \\ \varepsilon_b \rightarrow \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = -0.3k & [2] \\ \varepsilon_c \rightarrow \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 5k & [3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 1.k \\ [2]+[3] \quad \frac{3}{2}\varepsilon_y = 4.7k - 0.5k \Rightarrow \frac{3}{2}\varepsilon_y = 4.20k \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \overset{1.40}{\cancel{4.20}}k = 2.80k \\ [2]-[3] \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{xy} = -5.30k \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(-5.30k) \Rightarrow \gamma_{xy} = -6.12k \end{cases}$$

2B

E SI OTTIENE COSÌ: $\varepsilon_x = 1.k$; $\varepsilon_y = 2.80k$; $\gamma_{xy} = -6.12$; PERTANTO IL TENSORE DI DEFORMAZIONE È COSIFFATTO:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = k \begin{bmatrix} 1. & -3.06 & 0 \\ -3.06 & 2.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2C

SI TROVA POI: $J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 3.80k$; $J_2 = \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y = 6.56k^2$; $J_3 = \det(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DIVIENE: $\varepsilon_a^3 - J_1\varepsilon_a^2 - J_2\varepsilon_a - J_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_a^3 - 3.80k\,\varepsilon_a^2 - 6.56k^2\varepsilon_a = 0$

DA QUI SI RICAVANO LE DILATAZIONI PRINCIPALI: $\varepsilon_1 = 5.09k$; $\varepsilon_2 = -1.29k$; $\varepsilon_3 = 0$; INFATTI IN QUESTO CASO $\varepsilon_{1,2}$ SONO ANCHE DETERMINABILI MEDIANTE L'EQUAZIONE:

2D

$$\varepsilon_{1,2} = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}$$

NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE IL TENSORE DI DEFORMAZIONI È COSIFFATTO:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = k \begin{bmatrix} 5.09 & 0 & 0 \\ 0 & -1.29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ED È AGEVOLE VERIFICARE CHE $J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 3.80k$; $J_2 = -(5.09)(-1.29) = 6.56k^2$ $J_3 = (5.09)(-1.29)\cdot 0 = 0$

PER TROVARE LE DIREZIONI PRINCIPALI SI DEVE RISOLVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} (1-\varepsilon_a)\alpha_x + (-3.06)\alpha_y + 0\,\alpha_z = 0 & [4] \\ -3.06\,\alpha_1 + (2.80-\varepsilon_a)\alpha_y + 0\,\alpha_z = 0 & [5] \\ 0\,\alpha_1 + 0\cdot\alpha_y - \varepsilon_a\alpha_z = 0 & [6] \end{cases}$$

IN CORRISPONDENZA DI $\varepsilon_a = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

2A

PER CIASCUNO DI QUESTI CASI IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI SI ANNULLA E OCCORRE SCARTARE UNA DELLE EQUAZIONI, AGGIUNGENDO LA CONDIZIONE $\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2=1$.

DIREZIONE PRINCIPALE "1". SI FA USO DELLE EQ. [4] E [6].

2B

SI HA:

$$\begin{cases}(1-5.09)\alpha_{1x} - 3.06\,\alpha_{1y} = 0 \\ -5.09\,\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2+\alpha_{1y}^2+\alpha_{1z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4.09\,\alpha_{1x} - 3.06\,\alpha_{1y} = 0 \\ \alpha_{1z}=0 \\ \alpha_{1x}^2+\alpha_{1y}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{1x} = \dfrac{-3.06}{4.09}\alpha_{1y} \\ \alpha_{1z}=0 \\ \left[\left(-\dfrac{3.06}{4.09}\right)^2+1\right]\alpha_{1y}^2 = 1\end{cases}$$

NE SEGUE: $\alpha_{1x}=-0.60$; $\alpha_{1y}=+0.80$; $\alpha_{1z}=0$ $\Rightarrow \vec{n}_1=\{-0.60;\ +0.80;\ 0.\}$

2C

DIREZIONE PRINCIPALE "2". SI FA ANCORA USO DELLE EQ [4] E [6].

SI HA:

$$\begin{cases}[1-(-1.29)]\alpha_{2x} - 3.06\,\alpha_{2y} = 0 \\ +1.29\,\alpha_{2z}=0 \\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2.29\,\alpha_{2x} - 3.06\,\alpha_{2y} = 0 \\ \alpha_{2z}=0 \\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=\dfrac{3.06}{2.29}\alpha_{2y} \\ \alpha_{2z}=0 \\ \left[\left(\dfrac{3.06}{2.29}\right)^2+1\right]\alpha_{2y}^2=1\end{cases}$$

2D

NE SEGUE: $\alpha_{2x}=0.80$; $\alpha_{2y}=+0.60$; $\alpha_{2z}=0$ $\Rightarrow \vec{n}_2=\{0.80;\ +0.60;\ 0\}$

DIREZIONE PRINCIPALE "3". SI DEVE FARE USO DELLE EQ. [4] E [5] (LA [6] DIVIENE L'IDENTITA' 0 = 0 !)

SI HA:

$$\begin{cases}1\cdot\alpha_{3x} - 3.06\,\alpha_{3y} = 0 \\ -3.06\,\alpha_x + 2.80\,\alpha_{3y} = 0 \\ \alpha_{3x}^2+\alpha_{3y}^2+\alpha_{3z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{3x}=0 \\ \alpha_{3y}=0 \\ \alpha_{3z}^2=1\end{cases}$$

← IL SISTEMA 2x2 HA DET ≠ 0 PER LA MATRICE DEI COEFFICIENTI: AMMETTE SOLO SOLUZIONE NULLA!

$\Rightarrow \alpha_{3z}=\pm 1$

NE SEGUE $\alpha_{3x}=0$; $\alpha_{3y}=0$; $\alpha_{3z}=\pm 1$.

IL SEGNO DI α_{3z} PUÒ ESSERE FISSATO IMPONENDO CHE $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ FORMINO UNA TERNA DESTRA: $\vec{n}_3=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$. NE SEGUE:

$$\vec{n}_3 = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -.6 & +.8 & 0 \\ +.8 & +.6 & 0\end{vmatrix} = \vec{k}\,(-0.36-0.64) = -\vec{k}$$

; PERTANTO $\vec{n}_3=\{0,\ 0,\ -1\}$. SI OSSERVI PERALTRO CHE $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$.

2A

2B

2C

2D

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE → EQUAZIONI DI COMPATIBILITA'

(IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI)

$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_x = \partial u / \partial x \\ \varepsilon_y = \partial v / \partial y \\ \varepsilon_z = \partial w / \partial z \\ \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \dfrac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x = \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = \gamma_{zy} \end{cases}}$$

9 INCOGNITE

6 EQUAZIONI DIFFERENZIALI