NOTA 1. SVILUPPO DEL DETERMINANTE DI $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}})$.

RISULTA:

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix}$$

SE ORA SI SVILUPPA IL DETERMINANTE RISPETTO AGLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA SI HA: $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) =$

$$(\sigma_x - \sigma_n) \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} - \tau_{yx} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} + \tau_{zx} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{vmatrix}$$

SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA E' DISPARI!

NE SEGUE

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = (\sigma_x - \sigma_n)\left[(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{zy}\right] - \tau_{yx}\left[\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{xz}\tau_{zy}\right] + \tau_{zx}\left[\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n)\right]$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = (\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - (\sigma_x - \sigma_n)\tau_{yz}\tau_{zy} - \tau_{xy}\tau_{yx}(\sigma_z - \sigma_n) + \tau_{xz}\tau_{zy}\tau_{yx} + \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{zx}\tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n)$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \left[\sigma_x\sigma_y - \sigma_n(\sigma_y + \sigma_x) + \sigma_n^2\right](\sigma_z - \sigma_n) - \sigma_x\tau_{yz}\tau_{zy} + \sigma_n\tau_{yz}\tau_{zy} - \sigma_z\tau_{xy}\tau_{yx} + \sigma_n\tau_{xy}\tau_{yx} + (\tau_{xz}\tau_{zy}\tau_{yx} + \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz}) - \sigma_y(\tau_{zx}\tau_{xz}) + \sigma_n\tau_{zx}\tau_{xz}$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_n\sigma_x\sigma_y - \sigma_n\sigma_y\sigma_z - \sigma_n\sigma_x\sigma_z + \sigma_n^2(\sigma_y + \sigma_x) + \sigma_n^2\sigma_z - \sigma_n^3 + - \sigma_x\tau_{yz}\tau_{zy} + \sigma_n\tau_{yz}\tau_{zy} - \sigma_z\tau_{xy}\tau_{yx} + \sigma_n\tau_{xy}\tau_{yx} + (\tau_{xz}\tau_{zy}\tau_{yx} + \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz}) + - \sigma_y\tau_{zx}\tau_{xz} + \sigma_n\tau_{zx}\tau_{xz}.$$

RICORDANDO ORA CHE $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ SI PUÒ RISCRIVERE COME:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_n(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \sigma_n^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma_n^3 + - \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_n\tau_{yz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + \sigma_n\tau_{xy}^2 + 2(\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) + - \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_n\tau_{zx}^2$$

SE ORA SI RACCOLGONO I TERMINI IN σ_n E POI SI ORDINA LO SVILUPPO PER POTENZE

DECRESCENTI DI σ_n SI TROVA:

$$\mathrm{DET}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}\right) = -\sigma_n^3 + \sigma_n^2 \underbrace{\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)}_{I_1} + \sigma_n \underbrace{\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z\right)}_{I_2} +$$
$$\underbrace{\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \left(\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2\right)}_{I_3}$$

SI OTTIENE QUINDI IL POLINOMIO CARATTERISTICO.

$$\mathrm{DET}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}\right) = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n + I_3 .$$

NE SEGUE CHE LA CONDIZIONE DI ESISTENZA DI AUTOSOLUZIONI, $\mathrm{DET}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}\right) = 0$ COMPORTA

$$\boxed{\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3 = 0}$$

EQUAZIONE CUBICA A COEFFICIENTI REALI. □

NOTA 2. GLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE REALE SIMMETRICA SONO REALI.

SIA $[A]$ UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE N, SIMMETRICA - CIOÈ TALE CHE $[A] = [A]^T$ - E A COEFFICIENTI REALI.

SE λ È UN AUTOVALORE, ALLORA SODDISFA L'EQUAZIONE

$$[A]\{x\} = \lambda \{x\} \qquad [1]$$

DOVE $\{x\}$ È IL CORRISPONDENTE AUTOVETTORE.

IN GENERALE, L'AUTOVALORE POTREBBE ESSERE COMPLESSO, CIOÈ $\lambda = a + ib$, CON $a, b \in \mathbb{R}$ E i UNITÀ IMMAGINARIA, $i = \sqrt{-1}$ (OVVERO $i^2 = -1$).

SI DENOTA CON $\bar{\lambda} = a - ib$ IL COMPLESSO CONIUGATO DI λ.

ANALOGAMENTE, LE COMPONENTI DEL VETTORE COLONNA $\{x\}$ POSSONO ESSERE NUMERI COMPLESSI:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} y_1 + iz_1 \\ y_2 + iz_2 \\ \vdots \\ y_N + iz_N \end{Bmatrix} \qquad \text{CON } y_1, y_2, \dots, y_N ; z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ALLORA } \{\bar{x}\} = \begin{Bmatrix} y_1 - iz_1 \\ y_2 - iz_2 \\ \vdots \\ y_N - iz_N \end{Bmatrix}$$

D'ALTRA PARTE $\overline{\lambda\{x\}} = \bar{\lambda}\{\bar{x}\}$, MENTRE $[\bar{A}] = [A] = [A]^T$, SICCHÉ $\overline{[A]\{x\}} = [\bar{A}]\{\bar{x}\} = [A]\{\bar{x}\}$

MA ALLORA SE SI CONSIDERA LA CONTROPARTE COMPLESSA CONIUGATA DELLA [1] SI HA:

$$\overline{[A]\{x\}} = \overline{\lambda\{x\}} \Rightarrow [A]\{\bar{x}\} = \bar{\lambda}\{\bar{x}\} \quad [2]$$

SE SI PREMOLTIPLICA LA [1] PER $\{\bar{x}\}^T$ E LA [2] PER $\{x\}^T$ SI OTTIENE:

$$\{\bar{x}\}^T[A]\{x\} = \{\bar{x}\}^T\lambda\{x\} \quad [1']$$

$$\{x\}^T[A]\{\bar{x}\} = \{x\}^T\bar{\lambda}\{\bar{x}\} \quad [2']$$

D'ALTRA PARTE PER LA PROPRIETA' DEL PRODOTTO DI MATRICI TRASPOSTE SI HA, DALLA [2']: (SI NOTI: LA TRASPOSTA DEL PRODOTTO È EGUALE AL PRODOTTO DELLE TRASPOSTE, PRESE IN ORDINE INVERSO):

$$\left(\{x\}^T[A]\{\bar{x}\}\right)^T = \left(\{x\}^T\bar{\lambda}\{\bar{x}\}\right)^T \Rightarrow \{\bar{x}\}^T[A]^T\{x\} = \{\bar{x}\}^T\bar{\lambda}\{x\}$$

E POICHE' $[A]^T = [A]$ SI RICAVA

$$\{\bar{x}\}^T[A]\{x\} = \{\bar{x}\}^T\bar{\lambda}\{x\} \quad [2'']$$

DOVE IL PRIMO MEMBRO COINCIDE CON QUELLO DELLA [1']; NE SEGUE CHE DEVONO COINCIDERE ANCHE I SECONDI MEMBRI:

$$\{\bar{x}\}^T\lambda\{x\} = \{\bar{x}\}^T\bar{\lambda}\{x\} \Rightarrow \lambda\{\bar{x}\}^T\{x\} = \bar{\lambda}\{\bar{x}\}^T\{x\}$$

MA $\{\bar{x}\}^T\{x\} = [(y_1-iz_1)(y_1+iz_1)+(y_2-iz_2)(y_2+iz_2)+\dots(y_N-iz_N)(y_N+iz_N)] =$

$$= [(y_1^2+z_1^2)+(y_2^2+z_2^2)+\dots+(y_N^2+z_N^2)] = k, \in \mathbb{R} > 0.$$

PERTANTO $\lambda k = \bar{\lambda} k \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})k = 0$ E CIO' COMPORTA $\lambda = \bar{\lambda}$, CIOÈ $\lambda \in \mathbb{R}$, IN QUANTO SE $a+ib = a-ib$ SEGUE $b=0$ E IL NUMERO "COMPLESSO" λ HA PARTE IMMAGINARIA NULLA. INOLTRE POICHÉ $\{x\}$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE A COEFFICIENTI REALI $([A]-\lambda[I])\{x\} = \{0\}$ ANCHE $\{x\}$ È REALE □

NOTA 3. RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3 = 0$.

LA FORMULA RISOLVENTE DELLA GENERICA EQUAZIONE CUBICA A COEFFICIENTI REALI:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1,2,3)$$

DATA NEL 1515 DA SCIPIONE DAL FERRO E PUBBLICATA DA GIROLAMO CARDANO RICHIEDE DI DEFINIRE QUESTE QUANTITA':

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \quad ; \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3+R^2}} \quad ; \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3+R^2}}$$

A SECONDA DEL SEGNO DEL DISCRIMINANTE $\Delta = Q^3 + R^2$ SI HANNO QUESTI 3 CASI:

1) $\Delta > 0$: UNA RADICE È REALE, LE ALTRE 2 SONO COMPLESSE CONIUGATE.

2) $\Delta = 0$: TUTTE LE RADICI SONO REALI; ALMENO 2 SONO COINCIDENTI

3) $\Delta < 0$: TUTTE LE RADICI SONO REALI E DISTINTE

LE SOLUZIONI SONO:

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3} a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\,(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\,(S-T)$$

SI OSSERVI CHE ANCHE NEL CASO 3) IN CUI LE RADICI SONO TUTTE REALI LA FORMULA RISOLVENTE RICHIEDE L'USO DI NUMERI COMPLESSI.

NEL CASO IN ESAME È: $a_1 = -72$; $a_2 = 324$; $a_3 = 34992$.

SEGUE POI:

$Q = -468$; $R = -7560$; $\Delta = -45'349'632 < 0 \Rightarrow$ 3 RADICI REALI DISTINTE!

$$S = \sqrt[3]{-7560 + 3888\, i\sqrt{3}}$$

$$T = \sqrt[3]{-7560 - 3888\, i\sqrt{3}}$$

PERTANTO $x_1 = 54 \Rightarrow \sigma_1 = 54$ MPa

$x_2 = 36 \Rightarrow \sigma_2 = 36$ MPa

$x_3 = -18 \Rightarrow \sigma_3 = -18$ MPa $\square$

NOTA 4 CALCOLO DELLE DIREZIONI PRINCIPALI (E DETERMINAZIONE DEGLI ASSI PRINCIPALI DI SFORZO).

PER QUANTO VISTO, QUANDO GLI SFORZI PRINCIPALI SONO DISTINTI, LE DIREZIONI PRINCIPALI SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE E RISULTANO FRA LORO ORTOGONALI; GLI ASSI PRINCIPALI NON SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATI; TUTTAVIA SE SI FISSANO AD ARBITRIO I VERSI DI 2 DIREZIONI PRINCIPALI, INDIVIDUANDO COSÌ 2 ASSI PRINCIPALI, SI HA CHE IL VERSO DEL TERZO ASSE È UNIVOCAMENTE INDIVIDUATO DALLA CONDIZIONE CHE I TRE ASSI FORMINO UNA TERNA DESTRA, COSÌ DA POTERE "COMBACIARE", MEDIANTE UNA ROTAZIONE RIGIDA, CON GLI ASSI x, y, z.
SE INVECE SI FISSA IL VERSO DEL TERZO ASSE COSÌ DA FORMARE UNA TERNA SINISTRA NON È POSSIBILE RIPORTARLI, CON UNA ROTAZIONE RIGIDA,

AL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE DI PARTENZA

SIA $\vec{n}_1 = \{\alpha_{1x}, \alpha_{1y}, \alpha_{1z}\}$ LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLO SFORZO PRINCIPALE σ_1,
SIA $\vec{n}_2 = \{\alpha_{2x}, \alpha_{2y}, \alpha_{2z}\}$ LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLO SFORZO PRINCIPALE σ_2,
SIA $\vec{n}_3 = \{\alpha_{3x}, \alpha_{3y}, \alpha_{3z}\}$ LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLO SFORZO PRINCIPALE σ_3.

GLI SFORZI PRINCIPALI SONO STATI "ETICHETTATI" COSÌ CHE RISULTI $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

PER DETERMINARE $\vec{n}_1$ SI RISOLVE IL SISTEMA DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n)\alpha_{1x} + \tau_{yx}\alpha_{1y} + \tau_{zx}\alpha_{1z} = 0 \\ \tau_{xy}\alpha_{1x} + (\sigma_y - \sigma_n)\alpha_{1y} + \tau_{zy}\alpha_{1z} = 0 \\ \tau_{xz}\alpha_{1x} + \tau_{yz}\alpha_{1y} + (\sigma_z - \sigma_n)\alpha_{1z} = 0 \end{cases} \qquad [3]$$

QUANDO SI SOSTITUISCE $\sigma_n = \sigma_1$.

IN TAL CASO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE DIVENTA SINGOLARE E IL SISTEMA [3] NON PUÒ ESSERE RISOLTO. SI SCARTA ALLORA UNA DELLE EQUAZIONI, PER ESEMPIO LA TERZA, E SI DETERMINANO DUE INCOGNITE IN FUNZIONE DELLA TERZA; AGGIUNGENDO POI LA CONDIZIONE CHE $|\vec{n}_1| = 1 \iff \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1$ SI GIUNGE A DEFINIRE, <u>A MENO DEL SEGNO</u> IL VETTORE $\vec{n}_1$.

L'AMBIGUITA' DI SEGNO È LEGATA AL FATTO CHE UNA DIREZIONE PRINCIPALE NON FORNISCE INDICAZIONI IN MERITO A QUEST'ULTIMO. SE SI FISSA ARBITRARIAMENTE IL SEGNO SI GIUNGE A DEFINIRE L'ASSE PRINCIPALE "1", ORIENTATO COME $\vec{n}_1$.

OPERATIVAMENTE SI HA:

$$\begin{cases} (38-54)\alpha_{1x} + 6\sqrt{2}\,\alpha_{1y} - 14\sqrt{2}\,\alpha_{1z} = 0 \\ 6\sqrt{2}\,\alpha_{1x} + (45-54)\alpha_{1y} - 3\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\overset{8}{\cancel{16}}\,\alpha_{1x} + \overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{2}\,\alpha_{1y} - \overset{7}{\cancel{14}}\sqrt{2}\,\alpha_{1z} = 0 \\ \overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2}\,\alpha_{1x} - \overset{3}{\cancel{9}}\,\alpha_{1y} - \overset{1}{\cancel{3}}\,\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8\alpha_{1x} + 3\sqrt{2}\,\alpha_{1y} - 7\sqrt{2}\,\alpha_{1z} = 0 \\ 2\sqrt{2}\,\alpha_{1x} - 3\alpha_{1y} - \alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{1z} \\ 2\sqrt{2}\left[\frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7}{8}\sqrt{2}\,\alpha_{1z}\right] - 3\alpha_{1y} - \alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7}{8}\sqrt{2}\,\alpha_{1z} \\ \left(\frac{3}{2} - 3\right)\alpha_{1y} - \left(\frac{7}{2} + 1\right)\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{1z} \\ -\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{2}}\alpha_{1y} - \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}}\alpha_{1z} = 0 \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{1y} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{1z} \\ \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x} = \left(\frac{-9\sqrt{2}}{8} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = -\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\cancel{8}}\sqrt{2}\,\alpha_{1z} \\ \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1x} = -2\sqrt{2}\,\alpha_{1z} \\ \alpha_{1y} = -3\alpha_{1z} \\ \alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1 \end{cases}$$

UTILIZZANDO ORA L'ULTIMA EQUAZIONE SI OTTIENE:

$$(-2\sqrt{2}\,\alpha_{1z})^2+(-3\alpha_{1z})^2+\alpha_{1z}^2=1 \Rightarrow 8\alpha_{1z}^2+9\alpha_{1z}^2+\alpha_{1z}^2=1 \Rightarrow 18\alpha_{1z}^2=1$$

SI OTTIENE COSÌ: $\alpha_{1z}^2=\frac{1}{18} \Rightarrow \alpha_{1z}=\pm\frac{1}{\sqrt{18}}=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$

SE SI SCEGLIE LA SOLUZIONE POSITIVA, $\alpha_{1z}=+\sqrt{2}/6$ SI OTTIENE:

$$\alpha_{1x}=-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)=-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}=-\frac{2}{3}\ ;\quad \alpha_{1y}=-\cancel{3}^{1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{6}_{2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

PERTANTO $\vec{n}_1=\left\{-\frac{2}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{6}\right\}$

PER LA SECONDA DIREZIONE PRINCIPALE SI SOSTITUISCONO $\sigma_n=\sigma_2$ E $\alpha_{2x},\alpha_{2y},\alpha_{2z}$ A $\alpha_{1x},\alpha_{1y},\alpha_{1z}$ NELLA [3] E SI PROCEDE IN MODO ANALOGO. SI TROVA:

$$\begin{cases}(38-36)\alpha_{2x}+6\sqrt{2}\alpha_{2y}-14\sqrt{2}\alpha_{2z}=0\\ 6\sqrt{2}\,\alpha_{2x}+(45-36)\alpha_{2y}-3\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cancel{2}^{1}\alpha_{2x}+\cancel{6}^{3}\sqrt{2}\alpha_{2y}-\cancel{14}^{7}\sqrt{2}\alpha_{2z}=0\\ \cancel{6}^{2}\sqrt{2}\alpha_{2x}+\cancel{9}^{3}\alpha_{2y}-\cancel{3}^{1}\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}+3\sqrt{2}\alpha_{2y}-7\sqrt{2}\alpha_{2z}=0\\ 2\sqrt{2}\,\alpha_{2x}+3\alpha_{2y}-\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ 2\sqrt{2}\left(-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\right)+3\alpha_{2y}-\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ (-12+3)\alpha_{2y}+(28-1)\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ -\cancel{9}^{1}\alpha_{2y}+\cancel{27}^{3}\alpha_{2z}=0\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-3\sqrt{2}\alpha_{2y}+7\sqrt{2}\alpha_{2z}\\ \alpha_{2y}=3\alpha_{2z}\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=\left(-9\sqrt{2}+7\sqrt{2}\right)\alpha_{2z}\\ \alpha_{2y}=3\alpha_{2z}\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{2x}=-2\sqrt{2}\,\alpha_{2z}\\ \alpha_{2y}=3\alpha_{2z}\\ \alpha_{2x}^2+\alpha_{2y}^2+\alpha_{2z}^2=1\end{cases}$$

DALL'ULTIMA EQUAZIONE SI RICAVA:

$$(-2\sqrt{2}\,\alpha_{2z})^2+(3\alpha_{2z})^2+\alpha_{2z}^2=1 \Rightarrow 8\alpha_{2z}^2+9\alpha_{2z}^2+\alpha_{2z}^2=1 \Rightarrow 18\alpha_{2z}^2=1$$

OVVERO $\alpha_{2z}^2=\frac{1}{18} \Rightarrow \alpha_{2z}=\pm\frac{1}{\sqrt{18}} \Rightarrow \alpha_{2z}=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$

E SE SI SCEGLIE ANCORA LA DIREZIONE POSITIVA, $\alpha_{2z}=+\frac{\sqrt{2}}{6}$ SI OTTIENE:

$$\alpha_{2x}=-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)=-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}=-\frac{2}{3}\ ;\quad \alpha_{2y}=\frac{\cancel{3}^{1}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{6}_{2}}=+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

PERTANTO $\vec{n}_2 = \left\{-\frac{2}{3}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{6}\right\}$

SI OSSERVI CHE $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) = +\frac{4}{9} - \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}} + \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,18}} =$

$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{8-9+1}{18} = 0$$

PERTANTO $\vec{n}_1$ E $\vec{n}_2$ SONO $\perp$.

PER DETERMINARE $\vec{n}_3$ SI POTREBBE NUOVAMENTE PARTIRE DALLE [3], SOSTITUENDO $\sigma_n = \sigma_3$ E PONENDO $\alpha_{3x}, \alpha_{3y}, \alpha_{3z}$ IN LUOGO DI $\alpha_{1x}, \alpha_{1y}, \alpha_{1z}$.
TUTTAVIA QUESTA VOLTA IL VERSO DI $\vec{n}_3$ NON PUÒ ESSERE SCELTO ARBITRARIAMENTE, SE SI VUOLE CHE $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ FORMINO UNA TERNA DESTRA.

CONVIENE ALLORA PARTIRE DA QUI E DETERMINARE $\vec{n}_3$ CON LA CONDIZIONE:

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 .$$

COSÌ FACENDO SI HA:

$$\vec{n}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix} = +\vec{i}\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

DUNQUE $\vec{n}_3 = \vec{i}\left(-\frac{2}{12} - \frac{2}{12}\right) - \vec{j}\left(\cancel{-\frac{2\sqrt{2}}{18}} + \cancel{\frac{2\sqrt{2}}{18}}\right) + \vec{k}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

PERTANTO $\vec{n}_3 = -\frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,3}}\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k}$

NE SEGUE $\vec{n}_3 = \left\{-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$.

IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI PRODOTTO VETTORIALE $\vec{n}_3$ RISULTA $\perp$ A $\vec{n}_1$ E A $\vec{n}_2$; È INOLTRE DI MODULO UNITARIO IN QUANTO

$$\vec{n}_3 \times \vec{n}_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = \frac{\cancel{9}^{\,1}}{\cancel{9}_{\,1}} = 1$$

SI LASCIA COME ESERCIZIO VERIFICARE CHE LE PRIME 2 EQUAZIONI [3] RISULTANO IDENTICAMENTE SODDISFATTE:

$$\begin{cases} [38 - (-18)]\,\alpha_{3x} + 6\sqrt{2}\,\alpha_{3y} - 14\sqrt{2}\,\alpha_{3z} = 0 \\ 6\sqrt{2}\,\alpha_{3x} + (45 - (-18))\,\alpha_{3y} - 3\alpha_{3z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 56\,\alpha_{3x} + 6\sqrt{2}\,\alpha_{3y} - 14\sqrt{2}\,\alpha_{3z} = 0 \\ 6\sqrt{2}\,\alpha_{3x} + 63\,\alpha_{3y} - 3\alpha_{3z} = 0 \end{cases}$$

□

NOTA 5 SVILUPPO DELLE EQUAZIONI PER LA COSTRUZIONE DEI CERCHI DI MOHR.

LE EQUAZIONI CHE COSTITUISCONO IL SISTEMA DA RISOLVERE RISPETTO ALLE INCOGNITE $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ SONO LE SEGUENTI:

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2 \\ \sigma_n = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = 1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \\ \sigma_n = \sigma_1(1-\alpha_2^2-\alpha_3^2) + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 \\ \sigma_n^2+\tau_n^2 = \sigma_1^2(1-\alpha_2^2-\alpha_3^2) + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = 1-\alpha_2^2-\alpha_3^2 \quad [**] \\ \sigma_n = \sigma_1 + (\sigma_2-\sigma_1)\alpha_2^2 + (\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2 \\ \sigma_n^2+\tau_n^2 = \sigma_1^2 + (\sigma_2^2-\sigma_1^2)\alpha_2^2 + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = 1-\alpha_2^2-\alpha_3^2 \\ (\sigma_n-\sigma_1) = (\sigma_2-\sigma_1)\alpha_2^2 + (\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2 \\ (\sigma_n^2-\sigma_1^2)+\tau_n^2 = (\sigma_2^2-\sigma_1^2)\alpha_2^2 + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ SE $\underline{(\sigma_2-\sigma_1) \neq 0}$ SI TROVA:

$$\alpha_2^2 = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)-(\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2}{(\sigma_2-\sigma_1)} \quad [*]$$

SOSTITUENDO NELL'ULTIMA EQUAZIONE SI TROVA:

$$(\sigma_n^2-\sigma_1^2)+\tau_n^2 = (\sigma_2^2-\sigma_1^2)\frac{(\sigma_n-\sigma_1)-(\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2}{(\sigma_2-\sigma_1)} + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2$$

MA $(\sigma_2^2-\sigma_1^2) = (\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2+\sigma_1)$ PERTANTO:

$$(\sigma_n^2-\sigma_1^2)+\tau_n^2 = \cancel{(\sigma_2-\sigma_1)}(\sigma_2+\sigma_1)\frac{(\sigma_n-\sigma_1)-(\sigma_3-\sigma_1)\alpha_3^2}{\cancel{(\sigma_2-\sigma_1)}} + (\sigma_3^2-\sigma_1^2)\alpha_3^2$$

SIMILMENTE:

$$(\sigma_n^2-\sigma_1^2) = (\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n+\sigma_1)$$

PER CUI:

$$(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n+\sigma_1)+\tau_n^2 = (\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_2+\sigma_1) - (\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2+\sigma_1)\alpha_3^2 + (\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3+\sigma_1)\alpha_3^2$$

$$(\sigma_n-\sigma_1)[(\sigma_n+\cancel{\sigma_1})-(\sigma_2+\cancel{\sigma_1})]+\tau_n^2 = (\sigma_3-\sigma_1)[(\sigma_3+\cancel{\sigma_1})-(\sigma_2+\cancel{\sigma_1})]\alpha_3^2$$

$$(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^2 = (\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)\alpha_3^2$$

SE $\underline{(\sigma_3-\sigma_1)\neq 0}$ E $\underline{(\sigma_3-\sigma_2)\neq 0}$ SI TROVA:

$$\boxed{\alpha_3^2 = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^2}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}} \quad [4]$$

SE SI SOSTITUISCE NELLA [*] SI TROVA:

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_1)} - \frac{(\cancel{\sigma_3-\sigma_1})}{(\sigma_2-\sigma_1)}\,\frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}}{(\cancel{\sigma_3-\sigma_1})(\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{\sigma_n-\sigma_1}{(\sigma_2-\sigma_1)} - \left[\frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}\right]$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2) - \left[(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}\right]}{(\sigma_2-\sigma_1)\ (\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\cancel{\sigma_2})-(\sigma_n-\cancel{\sigma_2})\right]-\tau_n^{\,2}}{(\sigma_2-\sigma_1)\ (\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_2^{\,2} = \frac{-(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)-\tau_n^{\,2}}{(\sigma_2-\sigma_1)\ (\sigma_3-\sigma_2)} = -\frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_1)} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_2)}$$

DUNQUE

$$\boxed{\alpha_2^{\,2} = \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_2)}} \qquad [5]$$

SI SOSTITUISCE INFINE NELLA [**]:

$$\alpha_1^{\,2} = 1 - \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_2)} - \frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)\cdot(\sigma_3-\sigma_1)\right] - (\sigma_3-\sigma_1)\left[(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_1-\sigma_2)\left[(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)+\tau_n^{\,2}\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)\cdot(\sigma_3-\sigma_1)\right]}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1) - \tau_n^{\,2}\left[(\sigma_3-\cancel{\sigma_1})+(\cancel{\sigma_1}-\sigma_2)\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3)+(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_2)\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[\sigma_3\sigma_n - \cancel{\sigma_1\sigma_n} - \sigma_3^{\,2} + \sigma_1\sigma_3 + \cancel{\sigma_1\sigma_n} - \sigma_2\sigma_n - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^{\,2}\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\sigma_2)\sigma_n - (\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3+\sigma_2) + \sigma_1(\sigma_3-\sigma_2)\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^{\,2} = \frac{(\sigma_3-\sigma_2)\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^{\,2}\right] - (\sigma_n-\sigma_1)\left[(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3-\sigma_2+\sigma_1)\right]}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\left[\cancel{(\sigma_3-\sigma_2)}\right]\left[(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)-\tau_n^2-(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_3-\sigma_2+\sigma_1)\right]}{\cancel{(\sigma_3-\sigma_2)}(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\cancel{\sigma_1\sigma_3}-\sigma_2\sigma_3-\cancel{\sigma_1^2}+\cancel{\sigma_1\sigma_2}-\tau_n^2-\sigma_n^2+\cancel{\sigma_1\sigma_n}+\sigma_3\sigma_n-\cancel{\sigma_1\sigma_3}+\sigma_2\sigma_n-\cancel{\sigma_1\sigma_2}-\cancel{\sigma_1\sigma_n}+\cancel{\sigma_1^2}}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{-\sigma_2\sigma_3-\sigma_n^2+\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)-\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{-(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3)-\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$

$$\alpha_1^2 = -\frac{(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}$$ O, ANCHE:

$$\boxed{\alpha_1^2 = \frac{(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3)+\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}} \quad [6]$$

SI OSSERVI ORA CHE:

$$(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3) = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3 . \quad [\circ]$$

D'ALTRA PARTE È ANCHE

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\cancel{\frac{\sigma_2^2}{4}}+\cancel{\frac{\sigma_3^2}{4}}+\frac{\sigma_2\sigma_3}{2}-\cancel{\frac{\sigma_2^2}{4}}-\cancel{\frac{\sigma_3^2}{4}}+\frac{\sigma_2\sigma_3}{2}$$

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \sigma_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3 . \quad [\circ\circ]$$

DALL'EGUAGLIANZA DEI SECONDI MEMBRI DELLE [∘] E [∘∘] SEGUE L'EGUAGLIANZA DEI PRIMI MEMBRI:

$$(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3) = \left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 .$$

IL NUMERATORE DELLA [6] (E SIMILMENTE, CON LE DEBITE SOSTITUZIONI, QUELLI DELLA [5] E DELLA [4] PUÒ ESSERE SCRITTO NELLA FORMA:

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau_n^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 . \quad [+]$$

EGUAGLIATO A ZERO LA [+] RAPPRESENTA UNA CIRCONFERENZA DI CENTRO $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$ E RAGGIO $\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$.

NOTA 6.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CUBICA

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

DOVE $a_1 = -72$; $a_2 = 324$; $a_3 = 34992$

LE SOLUZIONI SONO DATE DA:

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3} a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{2} i \sqrt{3}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{2} i \sqrt{3}(S-T)$$

DOVE $S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$ $\qquad Q = \dfrac{3a_2 - a_1^2}{9}$

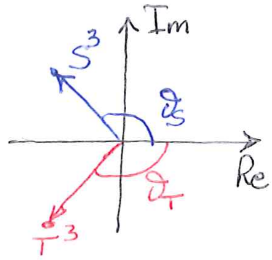
$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$ $\qquad R = \dfrac{9a_1 a_2 - 27 a_3 - 2a_1^3}{54}$

$$\Delta = Q^3 + R^2$$

NEL CASO IN ESAME:

$Q = -468$; $R = -7560$; $\Delta = -45\,349\,632 < 0 \Rightarrow$ 3 RADICI REALI DISTINTE!

$$S^3 = -7560 + i\, 3888\sqrt{3} = \rho_S (\cos\vartheta_S + i \sin\vartheta_S)$$



$$\rho_S = \sqrt{(-7560)^2 + (3888\sqrt{3})^2} = 2808\sqrt{13}$$

$$\vartheta_S = \pi - \arctan\left(\frac{3888\sqrt{3}}{+7560}\right) = 138^\circ.306$$

LA FUNZIONE arctan RESTITUISCE UN VALORE NELL'INTERVALLO $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ CHE VA CORRETTO IN QUANTO, ESSENDO $\sin\vartheta_S > 0$ E $\cos\vartheta_S < 0$ ϑ_S DEVE RISULTARE $\frac{\pi}{2} < \vartheta_S < \pi$.

$$T^3 = -7560 - i\, 3880\sqrt{3} = \rho_T (\cos\vartheta_T + i \sin\vartheta_T)$$

$$\rho_T = \sqrt{(-7560)^2 + (-3880\sqrt{3})^2} = 2808\sqrt{13}$$

$$\vartheta_T = -\pi + \arctan\left(\frac{+3888\sqrt{3}}{+7560}\right) = -138^\circ.306$$

DI NUOVO IL VALORE FORNITO DALLA FUNZIONE arctan NELL'INTERVALLO $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ DEVE ESSERE CORRETTO; ESSENDO $\sin\vartheta_T < 0$, $\cos\vartheta_T < 0$, ϑ_T DEVE RISULTARE $-\pi < \vartheta_T < -\frac{\pi}{2}$

SEGUE POI:

$$S = \rho_S^{1/3} \left(\cos\frac{\vartheta_S}{3} + i \sin\frac{\vartheta_S}{3}\right) = 6\sqrt{13}\,(0{,}693375 + i\, 0{,}720577) = 15 + i\, 15{,}5885$$

$$T = \rho_T^{1/3}\left(\cos\frac{\vartheta_T}{3} + i\sin\frac{\vartheta_T}{3}\right) = 6\sqrt{13}\,(0.693375 - i\,0.720577) = 15 - i\,15.5885$$

PERTANTO:

$$S+T = (15 + i\,\cancel{15.5885}) + (15 - i\,\cancel{15.5885}) = 30$$

$$S-T = (\cancel{15} + i\,15.5885) - (\cancel{15} - i\,15.5885) = i\,31.1769$$

$$i\sqrt{3}(S-T) = i^2\,31.1769\cdot\sqrt{3} = (-1)\cdot 54 = -54$$

$$\frac{1}{3}a_1 = -\frac{72}{3} = -24$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$x_1 = S+T - \frac{1}{3}a_1 = 30 - (-24) = 54$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}(30) - (-24) - \frac{1}{2}(-54) = -15+24+27 = 36$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) = -\frac{1}{2}(30) - (-24) + \frac{1}{2}(-54) = -15+24-27 = -18$$

□