Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura
***Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura* - a.a. 2020/21**

Statica e Scienza delle Costruzioni

PARTE 2

> 1. Lo stato di sforzo

Emanuele Reccia

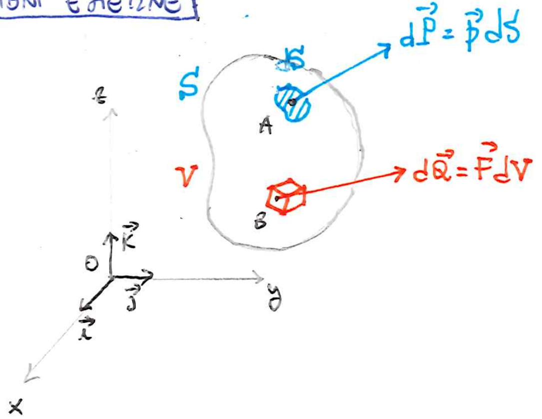
emanuele.reccia@unica.it

ANALISI DELLA TENSIONE o DELLO STATO DI SFORZO

1A.- FORZE E TENSIONI IN UN MEZZO TRIDIMENSIONALE -

Ⓘ

AZIONI ESTERNE



FORZE DI SUPERFICIE

$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} \qquad \vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\} \qquad p = \frac{[F]}{[L]^2} \qquad Pa = N/m^2$$

FORZE DI VOLUME

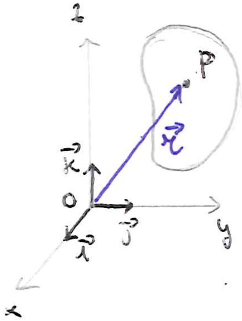
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \qquad \vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} \qquad F = \frac{[F]}{[L]^3}$$

PESO SPECIFICO N/m^3

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0}} \Rightarrow R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} R_x &= \int_S p_x\,dS + \int_V F_x\,dV = 0 \\ R_y &= \int_S p_y\,dS + \int_V F_y\,dV = 0 \\ R_z &= \int_S p_z\,dS + \int_V F_z\,dV = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{M}_{(O)} = \vec{O}} \Rightarrow M_{(O)x}\vec{i} + M_{(O)y}\vec{j} + M_{(O)z}\vec{k} = \vec{O} \Rightarrow \begin{cases} M_{(O)x} = 0 \\ M_{(O)y} = 0 \\ M_{(O)z} = 0 \end{cases}$$



$P = (x, y, z)$

$P - O = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r} = \{x, y, z\}$

$$\vec{M}_{(O)} = \underline{\int_S \vec{r} \wedge d\vec{P}} + \underline{\int_V \vec{r} \wedge d\vec{Q}} = \underline{\int_S \vec{r} \wedge \vec{p}\,dS} + \underline{\int_V \vec{r} \wedge \vec{F}\,dV} = \vec{O}$$

$$\underline{\vec{r} \wedge \vec{p}} = \det.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(p_z y - p_y z) + \vec{j}(p_x z - p_z x) + \vec{k}(p_y x - p_x y)$$

$$\underline{\vec{r} \wedge \vec{F}} = \det.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = \vec{i}(F_z y - F_y z) + \vec{j}(F_x z - F_z x) + \vec{k}(F_y x - F_x y)$$

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

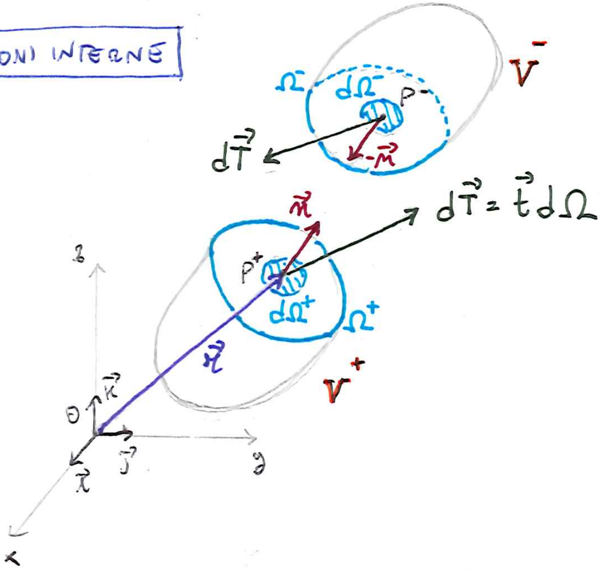
1A. - FORZE E TENSIONI IN UN MEZZO TRIDIMENSIONALE -

$$\vec{M}_{(O)} = \underline{\int_S \left[\vec{i}(p_z y - p_y z) + \vec{j}(p_x z - p_z x) + \vec{k}(p_y x - p_x y)\right] dS} + \underline{\int_V \left[\vec{i}(F_z y - F_y z) + \vec{j}(F_x z - F_z x) + \vec{k}(F_y x - F_x y)\right] dV} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{(O)} = \vec{i}\left[\int_S (p_z y - p_y z) dS + \int_V (F_z y - F_y z) dV\right] + \vec{j}\left[\int_S (p_x z - p_z x) dS + \int_V (F_x z - F_z x) dV\right] + \vec{k}\left[\int_S (p_y x - p_x y) dS + \int_V (F_y x - F_x y) dV\right] = \vec{0}$$

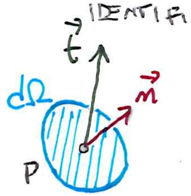
$$\boxed{\vec{M}_{(O)} = \vec{0}} \Rightarrow \begin{cases} M_{(O)x} = 0 & M_{(O)x} = \int_S (p_z y - p_y z) dS + \int_V (F_z y - F_y z) dV = 0 \\ M_{(O)y} = 0 & M_{(O)y} = \int_S (p_x z - p_z x) dS + \int_V (F_x z - F_z x) dV = 0 \\ M_{(O)z} = 0 & M_{(O)z} = \int_S (p_y x - p_x y) dS + \int_V (F_y x - F_x y) dV = 0 \end{cases}$$

AZIONI INTERNE



$\vec{t} = \{t_x, t_y, t_z\}$ VETTORE SFORZO O TENSIONE.

$\vec{t}$ NEL PUNTO P DIPENDE DALLA POSIZIONE, QUINDI DA $\vec{r}$, MA IN UN PUNTO PASSANO INFINITI PIANI, $\vec{t}$ DIPENDE ANCHE DALL'ORIENTAZIONE DEL PIANO Ω, CHE PUÒ ESSERE IDENTIFICATA DALLA NORMALE $\vec{n}$ $\boxed{\vec{t} = \vec{t}(\vec{r}, \vec{n})}$

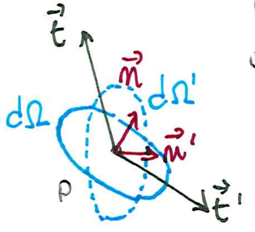


$\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ VERSORE NORMALE $\qquad \vec{n} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$

CON $\alpha_x = \cos\{\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\}$, $\alpha_y = \cos\{\widehat{\vec{n}, \vec{j}}\}$, $\alpha_z = \cos\{\widehat{\vec{n}, \vec{k}}\}$

COSENI DIRETTORI DELLA RETTA ORIENTATA DISTESA LUNGO $\vec{n}$

$\alpha_x = \vec{n} \times \vec{i}$, $\alpha_y = \vec{n} \times \vec{j}$, $\alpha_z = \vec{n} \times \vec{k}$



PER OGNI GIACITURA, IDENTIFICATA DALLA RISPETTIVA NORMALE, SI HA UN VETTORE $\vec{t}$

$$\vec{t} = \vec{t}(\vec{r}, \vec{n}) \neq \vec{t}' = \vec{t}'(\vec{r}, \vec{n}')$$

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1A.- FORZE E TENSIONI IN UN MEZZO TRIDIMENSIONALE - ⅢⅠ

IL VETTORE TENSIONE DEVE GARANTIRE IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ:

$$\underbrace{\vec{t}(\vec{r},\vec{n})\,d\Omega^+}_{+\vec{n}} + \underbrace{\vec{t}(\vec{r},-\vec{n})\,d\Omega^-}_{-\vec{n}} = \vec{0}$$

SONO OPPOSTI, AGISCONO SULLE 2 FACCE Ω^+ E Ω^-, SUL CORPO INTERO NON HANNO ALCUN EFFETTO SULL'EQUILIBRIO GLOBALE

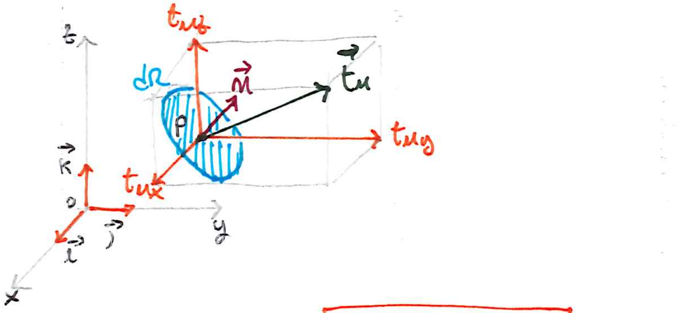
DEVE VALERE SU TUTTA LA FACCIA: $\vec{t}(\vec{r},\vec{n}) + \vec{t}(\vec{r},-\vec{n}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{t}(\vec{r},\vec{n}) = -\vec{t}(\vec{r},-\vec{n})$

FISSATO P RISULTA FISSATO $\vec{r}$, QUINDI $\vec{t}$ (NEL PUNTO P) DIPENDE SOLO DA $\vec{n}$ $\quad \vec{t}(o,\vec{n}) \Rightarrow \boxed{\vec{t}_n}$ VETTORE SFORZO AGENTE IN P SUL PIANO DI GIACITURA $\vec{n}$

ALLORA PER IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ $\boxed{\vec{t}_n = -\vec{t}_{-n}}$ LEMMA FONDAMENTALE DI CAUCHY

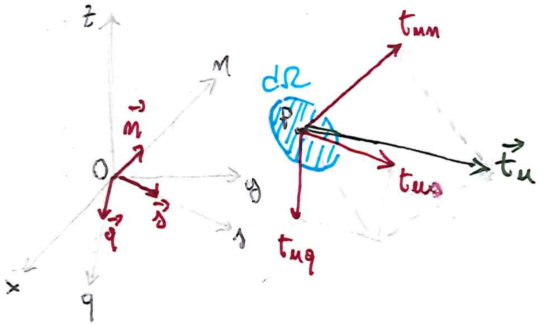
$\vec{t}_n$ PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO PER COMPONENTI IN 2 MODI:

1° MODO - COMPONENTI CARTESIANE



$\vec{t}_n = t_n\vec{i} + t_n\vec{j} + t_n\vec{k}$ o $\boxed{\vec{t}_n = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\}}$

2° MODO - COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE



RIFERITE A UNA TERNA LOCALE:
L'ASSE n CHE HA COME VERSORE LA NORMALE $\vec{n}$
2 ASSI, PERPENDICOLARI TRA LORO, CHE GIACCIONO NEL PIANO DI Ω, INDIVIDUATI DAI VERSORI $\vec{q}$ E $\vec{s}$

$\vec{t}_n = \{t_{nn}, t_{nq}, t_{ns}\}$

A QUESTE COMPONENTI ASSEGNAMO DEI NOMI SPECIALI: σ COMPONENTE NORMALE
τ COMPONENTE TANGENZIALE

$\vec{t}_n = \sigma_n\vec{n} + \tau_{nq}\vec{q} + \tau_{ns}\vec{s}$ o $\boxed{\vec{t}_n = \{\sigma_n, \tau_{nq}, \tau_{ns}\}}$

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

I VERSORI $\vec{n}, \vec{q}$ E $\vec{s}$ POSSONO ESSERE INDIVIDUATI DAI COSENI DIRETTORI:

$$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\} \; ; \quad \vec{q} = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\} \; ; \quad \vec{s} = \{\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\}$$

CON:

$$\alpha_x = \vec{n} \times \vec{i} \; ; \quad \beta_x = \vec{q} \times \vec{i} \; ; \quad \gamma_x = \vec{s} \times \vec{i} \; ;$$
$$\alpha_y = \vec{n} \times \vec{j} \; ; \quad \beta_y = \vec{q} \times \vec{j} \; ; \quad \gamma_y = \vec{s} \times \vec{j} \; ;$$
$$\alpha_z = \vec{n} \times \vec{k} \; ; \quad \beta_z = \vec{q} \times \vec{k} \; ; \quad \gamma_z = \vec{s} \times \vec{k} \; ;$$

N.B.

$$(\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) = |\vec{n}|^2 = 1$$
$$(\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) = |\vec{q}|^2 = 1$$
$$(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) = |\vec{s}|^2 = 1$$

1° MODO – COMPONENTI CARTESIANE DI TENSIONE – $\vec{t} = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\}$ → SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO

2° MODO – COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE – $\vec{t} = \{\sigma_n, \tau_{nq}, \tau_{ns}\}$ → SIGNIFICATO INTRINSECO

SI PUO' PASSARE DA UNO ALL'ALTRO:

CONOSCENDO $\vec{n}, \vec{q}, \vec{s}$ POSSIAMO CALCOLARE LE COMPONENTI SPECIALI PROIETTANDO QUELLE CARTESIANE

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= t_{nx}\alpha_x + t_{ny}\alpha_y + t_{nz}\alpha_z \\ \tau_{nq} &= t_{nx}\beta_x + t_{ny}\beta_y + t_{nz}\beta_z \\ \tau_{ns} &= t_{nx}\gamma_x + t_{ny}\gamma_y + t_{nz}\gamma_z \end{aligned}}$$

COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE

$$\alpha_x = \cos\{\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\}, \text{ etc.}$$
$$\beta_x = \cos\{\widehat{\vec{q}, \vec{i}}\}, \text{ etc.}$$
$$\gamma_x = \cos\{\widehat{\vec{s}, \vec{i}}\}, \text{ etc.}$$

SI PUO' FARE ANCHE IL CONTRARIO

N.B.

$$\vec{i} = \vec{n}\alpha_x + \vec{q}\beta_x + \vec{s}\gamma_x$$
$$\vec{j} = \vec{n}\alpha_y + \vec{q}\beta_y + \vec{s}\gamma_y$$
$$\vec{k} = \vec{n}\alpha_z + \vec{q}\beta_z + \vec{s}\gamma_z$$

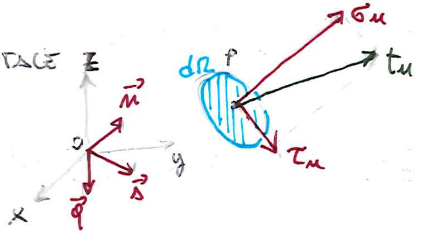
$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} t_{nx} &= \sigma_n\alpha_x + \tau_{nq}\beta_x + \tau_{ns}\gamma_x \\ t_{ny} &= \sigma_n\alpha_y + \tau_{nq}\beta_y + \tau_{ns}\gamma_y \\ t_{nz} &= \sigma_n\alpha_z + \tau_{nq}\beta_z + \tau_{ns}\gamma_z \end{aligned}}$$

COMPONENTI CARTESIANE DI TENSIONE

É POSSIBILE INDIVIDUARE τ_n, OVVERO LA COMPONENTE TANGENZIALE TOTALE

$$\boxed{\tau_n = \sqrt{\tau_{nq}^2 + \tau_{ns}^2}}$$

N.B. LA DIREZIONE DI τ_n NON É NOTA A PRIORI

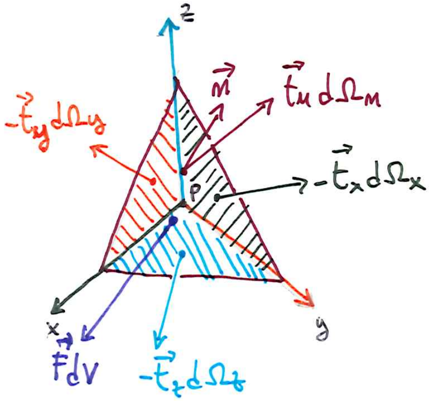


ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1B.- IL TENSORE DEGLI SFORZI -

Ⓘ

ASSEGNATO UN PUNTO NELL'INTERNO DEL CORPO, IL VETTORE $\vec{t}_n$ VARIA AL VARIARE DELLA GIACITURA, OVVERO DELLA NORMALE $\vec{n}$
É SUFFICIENTE CONOSCERE LA TENSIONE $\vec{t}_n$ SU TRE GIACITURE ORTOGONALI QUALUNQUE PER POTER DEFINIRE LA TENSIONE DI QUALUNQUE ALTRA GIACITURA: CONSIDERIAMO UN VOLUME INFINITESIMO NELL'INTORNO DI P DELIMITATO DA 3 GIACITURE PARALLELE AI PIANI COORDINATI E DALLA GIACITURA $\vec{n}$



N.B. LA FACCIA Ω_n, DI NORMALE $\vec{n}$, NON COMPRENDE IL PUNTO P, CHE É INVECE SULLE FACCE PARALLELE AGLI ASSI COORDINATI Ω_x, Ω_y, Ω_z. DOBBIAMO FAR TENDERE IL VOLUME DEL TETRAEDRO A 0 PER FAR SÌ CHE Ω_n COMPRENDA P.

IL VOLUME DEL TETRAEDRO É: $dV = \frac{1}{3} d\Omega_n \cdot h_n$

L'ELEMENTO DI VOLUME COSÌ CONFIGURATO DEVE ESSERE IN EQUILIBRIO:

$$\boxed{\vec{R}=\vec{0}} \Rightarrow -\underline{\vec{t}_x d\Omega_x} - \underline{\vec{t}_y d\Omega_y} - \underline{\vec{t}_z d\Omega_z} + \underline{\vec{t}_n d\Omega_n} + \underline{\vec{F}dV} = \vec{0}$$

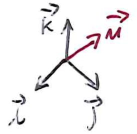
EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

PER $h_n \to 0$ $dV \to 0$ E $\vec{F}dV = \vec{F}\frac{d\Omega_n h_n}{3} = \vec{0}$

$d\Omega_x = \alpha_x d\Omega_n$; $d\Omega_y = \alpha_y d\Omega_n$; $d\Omega_z = \alpha_z d\Omega_z$; CON $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ COSENI DIRETTORI DELLA NORMALE $\vec{n}$ RISPETTO AGLI ASSI COORDINATI x, y, z

$$\boxed{\vec{R}=\vec{0}} \Rightarrow (-\vec{t}_x\alpha_x - \vec{t}_y\alpha_y - \vec{t}_z\alpha_z + \vec{t}_n)\,d\Omega_n = \vec{0}$$

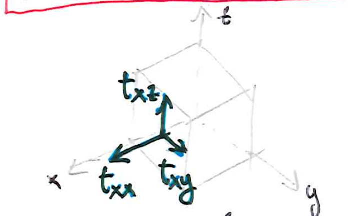
$$\boxed{\vec{t}_n = \vec{t}_x\alpha_x + \vec{t}_y\alpha_y + \vec{t}_z\alpha_z}$$



NB LE 3 FACCE DEL TETRAEDRO PARALLELE AGLI ASSI COORDINATI HANNO NORMALI PARALLELE AGLI ASSI MA DI VERSO OPPOSTO

LE COMPONENTI:

$$\begin{array}{lccc} & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ t_{nx} = & t_{xx}\alpha_x + & t_{yx}\alpha_y + & t_{zx}\alpha_z \\ t_{ny} = & t_{xy}\alpha_x + & t_{yy}\alpha_y + & t_{zy}\alpha_z \\ t_{nz} = & t_{xz}\alpha_x + & t_{yz}\alpha_y + & t_{zz}\alpha_z \end{array}$$



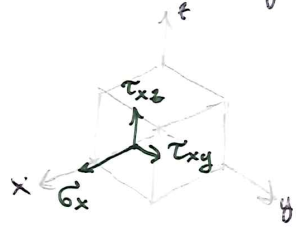
N.B.

σ = COMPONENTE NORMALE

τ = COMPONENTE TANGENZIALE

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_x\alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z \\ t_{ny} = \tau_{xy}\alpha_x + \sigma_y\alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z \\ t_{nz} = \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + \sigma_z\alpha_z \end{cases}$$

COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE



QUINDI L'EQUILIBRIO:

$$\begin{array}{cccccc} \vec{t}_n & & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z & \\ t_{nx} & x & \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} & \alpha_x \\ t_{ny} & =y & \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} & \alpha_y \\ t_{nz} & z & \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z & \alpha_z \end{array}$$

$$\boxed{\vec{t}_n = \underline{\underline{\sigma}}\ \vec{n}}$$

RELAZIONE DI CAUCHY

$\underline{\underline{\sigma}}$ = TENSORE DEGLI SFORZI

ANALISI DELLA TENSIONE o DELLO STATO DI SFORZO

1B. - IL TENSORE DEGLI SFORZI -

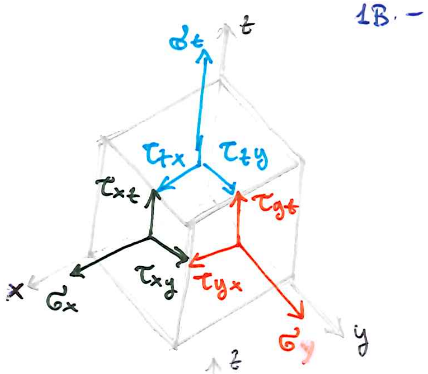
Ⓘ

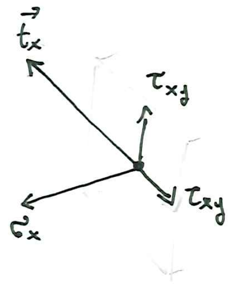
1A

1B

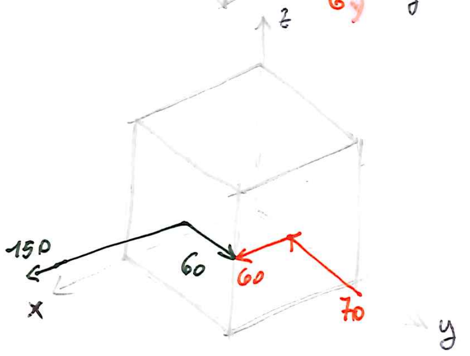
ESEMPIO APPLICATIVO

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{array}\right] \end{array}$$





$$\underline{\underline{\sigma}} = \left[\begin{array}{ccc} 150 & 60 & 0 \\ 60 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$



$\sigma_x = 150$

$\tau_{xy} = 60$

$\vec{t}_x$

$\tau_{xz} = 0$

$\tau_{yx} = 60$

$\sigma_y = -70$

$\vec{t}_y$

$\tau_{yz} = 0$

$\tau_{zx} = 0$

$\tau_{zy} = 0$

$\sigma_z = 0$

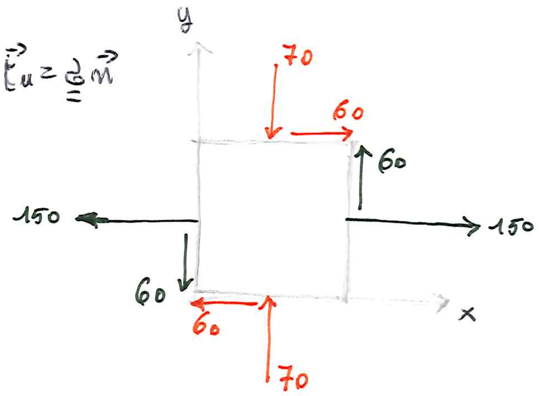
$\vec{t}_z$

STATO PIANO DI TENSIONE

$\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$ EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

$\vec{t}_u = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}$

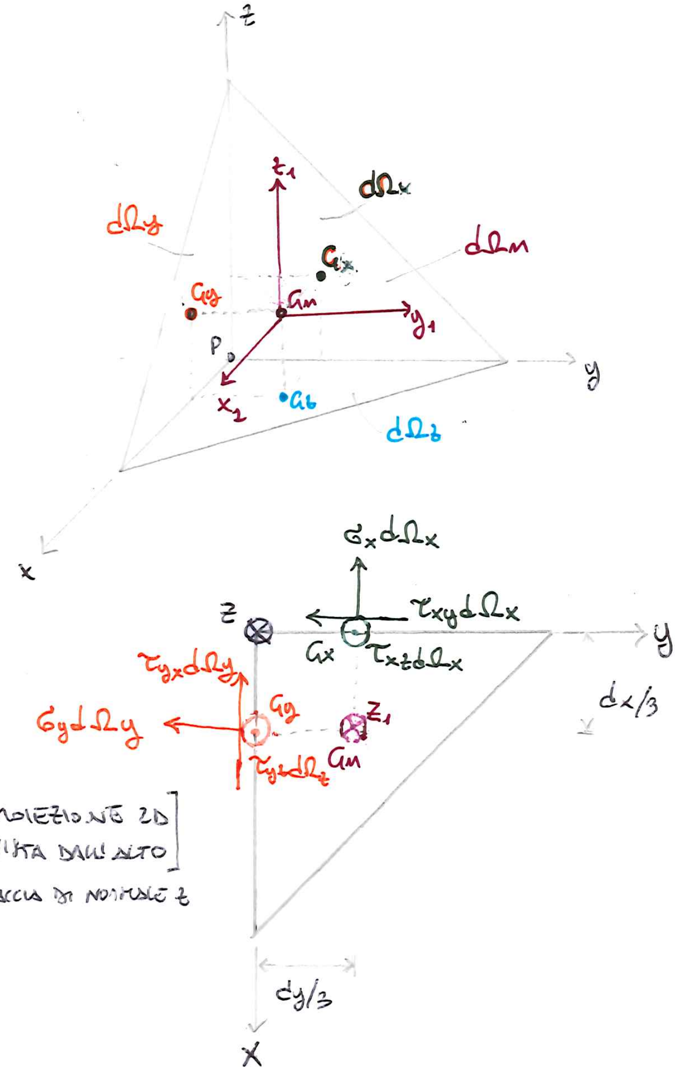
$\boxed{\vec{M}_{(o)} = \vec{0}}$ EQUILIBRIO DEI MOMENTI



N.B. LE TENSIONI SONO DIMENSIONALMENTE DELLE PRESSIONI: $\sigma = \frac{[F]}{[L]^2}$

SI MISURANO IN $Pa = N/m^2$ E IN PARTICOLARE IN GENERE IN $MPa = 10^6\,Pa = N/mm^2$

1B. - IL TENSORE DEGLI SFORZI -



[PROIEZIONE 2D
VISTA DALL'ALTO]
FACCIA DI NORMALE z

ABBIAMO VISTO CHE IL SISTEMA DI FORZE AGENTI SUL TETRAEDRO È IN EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

$$\boxed{\vec{R}=\vec{0}} \qquad \boxed{\vec{t}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}}$$

BISOGNA CONSIDERARE LE TRE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE DELL'ELEMENTO ATTORNO AI TRE ASSI $\boxed{\vec{M}=\vec{0}}$ EQUILIBRIO DEI MOMENTI

PER L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI USANDO COME POLO G_n BARICENTRO DELLA FACCIA $d\Omega_n$ DI NORMALE $\vec{n}$ È DEFINITO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO (x_1, y_1, z_1) CON ORIGINE IN G_n.
LAVORIAMO PER COMPONENTI

$$\boxed{\vec{M}_{(G_n)}=\vec{0}} \quad \text{IMPLICA CHE:} \quad \begin{cases} M_{(G_n)x} = 0 \\ M_{(G_n)y} = 0 \\ M_{(G_n)z} = 0 \end{cases}$$

- LE FORZE APPLICATE IN G_n (POLO) NON GENERANO MOMENTO
- LE FORZE CHE AGISCONO SULLA FACCIA $d\Omega_z$ DI NORMALE z SONO APPLICATE SUL BARICENTRO G_z, CHE È ALLINEATO CON G_n, QUINDI NON GENERANO MOMENTO
- LA RETTA DI AZIONE DI $\sigma_x d\Omega_x$ E QUELLA DI $\sigma_y d\Omega_y$ PASSANO PER G_n, QUINDI NON GENERANO MOMENTO
- LE FORZE $\tau_{xz} d\Omega_x$ E $\tau_{yz} d\Omega_y$ SONO PARALLELE ALL'ASSE z_1, QUINDI NON GENERANO MOMENTO
- NON CONSIDERIAMO LE FORZE DI VOLUME $\vec{F}$, PER $dV \to 0$ DIMINUISCONO PIÙ RAPIDAMENTE

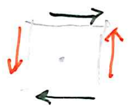
$$\boxed{M_{(G_n)z} = \tau_{xy} d\Omega_x \frac{dx}{3} - \tau_{yx} d\Omega_y \frac{dy}{3} = 0}$$

N.B. $dV = d\Omega_x \frac{dx}{3} = d\Omega_y \frac{dy}{3} = d\Omega_z \frac{dz}{3}$

$$M_{(G_n)z} = \tau_{xy} dV - \tau_{yx} dV = 0 \quad \rightsquigarrow \quad M_{(G_n)z} = (\tau_{xy} - \tau_{yx}) dV = 0$$

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

* N.B. SEBBENE τ_{xy} E τ_{yx} SIANO INDIPENDENTI (SONO LE PROIEZIONI DI $\vec{t}_x$ E $\vec{t}_y$) PER L'EQUILIBRIO DEVONO ESSERE UGUALI



N.B. [IL SIMBOLO ⊗ INDICA UN VETTORE O UN ASSE PERPENDICOLARE E USCENTE DAL FOGLIO
IL SIMBOLO ⊙ INDICA UN VETTORE O UN ASSE PERPENDICOLARE E ENTRANTE NEL FOGLIO]

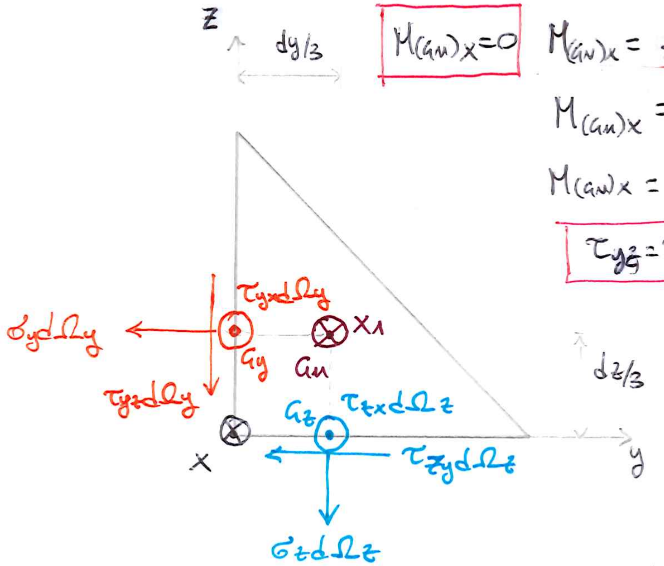
ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1B. - IL TENSORE DEGLI SFORZI -

IV

ANALOGAMENTE PER $M_{(an)x}$ E $M_{(an)y}$:

N.B. [⊗ VETTORE USCENTE DAL FOGLIO ; ⊙ VETTORE ENTRANTE NEL FOGLIO]



$$\boxed{M_{(an)x}=0}$$

$$M_{(an)x} = -\tau_{zy} d\Omega_z \frac{dz}{3} + \tau_{yz} d\Omega_y \frac{dy}{3}$$

$$M_{(an)x} = -\tau_{zy} dV + \tau_{yz} dV = 0$$

$$M_{(an)x} = -\tau_{zy} + \tau_{yz} = 0$$

$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

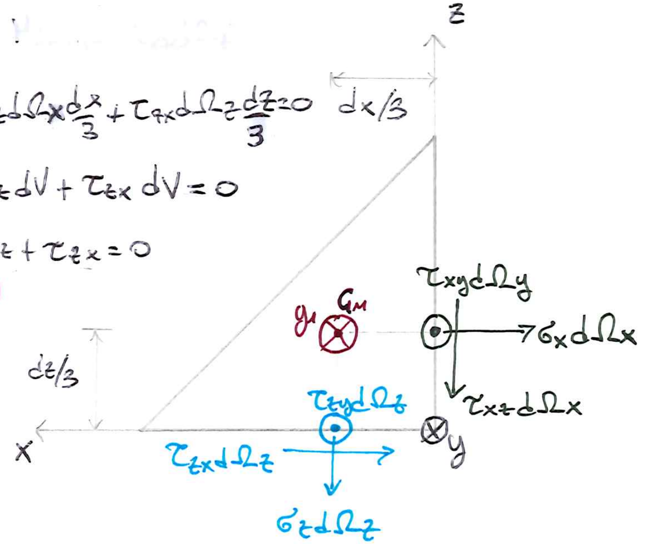
$$\boxed{M_{(an)y}=0}$$

$$M_{(an)y} = -\tau_{xz} d\Omega_x \frac{dx}{3} + \tau_{zx} d\Omega_z \frac{dz}{3} = 0$$

$$M_{(an)y} = -\tau_{xz} dV + \tau_{zx} dV = 0$$

$$M_{(an)y} = -\tau_{xz} + \tau_{zx} = 0$$

$$\boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz}}$$



$$\boxed{\vec{M}_{(an)} = \vec{0}} \iff \begin{cases} M_{(an)x} = 0 & \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}} \\ M_{(an)y} = 0 & \boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz}} \\ M_{(an)z} = 0 & \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} \text{ È SIMMETRICO}}$

6 COMPONENTI INDIPENDENTI

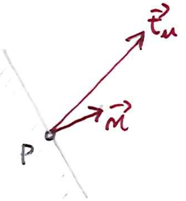
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \text{sym} & & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T}$$

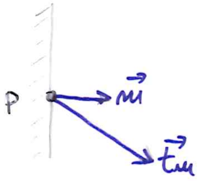
- 6 COMPONENTI INDIPENDENTI : $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}]$ MA $\vec{R} = \vec{0}$ ⇒ 3 EQUAZIONI : IL CONTINUO DEFORMABILE È IPERSTATICO
- LA RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI $[\tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} ; \tau_{xy} = \tau_{yx}]$ È UNA PROPRIETÀ GENERALE ✳
- LE τ RECIPROCHE SONO UGUALI IN VALORE NUMERICO MA HANNO SIGNIFICATO DIVERSO:
  τ_{xy} AGISCE SU UNA FACCIA DI NORMALE x IN DIREZIONE y ED È DIVERSA DA τ_{yx}, CHE AGISCE SU UNA FACCIA DI NORMALE y IN DIREZIONE x

UN'ULTERIORE CONSEGUENZA DELLA RECIPROCITÁ DELLE TENSIONI TANGENZIALI* E' CHE SE CONSIDERIAMO 2 VETTORI SFORZO $\vec{t}_n$ E $\vec{t}_m$ DI GIACITURA $\vec{n}$ E $\vec{m}$ RISPETTIVAMENTE, DETTA t_{nm} LA COMPONENTE DI $\vec{t}_n$ LUNGO $\vec{m}$ E t_{mn} LA COMPONENTE DI $\vec{t}_m$ LUNGO $\vec{n}$, RISULTA CHE:

$$\boxed{t_{nm} = t_{mn}}$$

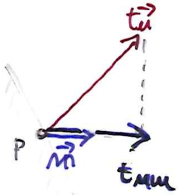
CONSIDERIAMO LO STESSO PUNTO P
E LE DUE GIACITURE $\vec{n}$ E $\vec{m}$

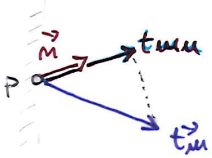




$$\vec{t}_n = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\}$$

$$\vec{t}_m = \{t_{mx}, t_{my}, t_{mz}\}$$





t_{nm} E t_{mn} SONO DIVERSE MA HANNO STESSO VALORE NUMERICO: $t_{nm} = t_{mn}$

$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\} \rightsquigarrow \vec{n} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k} \qquad |\vec{n}| = 1 \longleftrightarrow \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$

$\vec{m} = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\} \rightsquigarrow \vec{m} = \beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k} \qquad |\vec{m}| = 1 \longleftrightarrow \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$

PROIETTANDO $\vec{t}_n$ IN DIREZIONE $\vec{m}$: $\quad t_{nm} = t_{nx}\beta_x + t_{ny}\beta_y + t_{nz}\beta_z$

PROIETTANDO $\vec{t}_m$ IN DIREZIONE $\vec{n}$: $\quad t_{mn} = t_{mx}\alpha_x + t_{my}\alpha_y + t_{mz}\alpha_z$

MA: $\quad \vec{t}_n = \underline{\underline{\sigma}}\, \vec{n} \quad \boxed{1}$

$\quad \vec{t}_m = \underline{\underline{\sigma}}\, \vec{m} \quad \boxed{2}$

$$\boxed{1} \quad \left\{ \begin{array}{lccc} & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ t_{nx} = & \sigma_x\alpha_x & + \tau_{yx}\alpha_y & + \tau_{zx}\alpha_z \\ t_{ny} = & \tau_{xy}\alpha_x & + \sigma_y\alpha_y & + \tau_{zy}\alpha_z \\ t_{nz} = & \tau_{xz}\alpha_x & + \tau_{yz}\alpha_y & + \sigma_z\alpha_z \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\vec{t}_n = \vec{t}_x\alpha_x + \vec{t}_y\alpha_y + \vec{t}_z\alpha_z}$$

RELAZIONE DI CAUCHY

$$\boxed{2} \quad \left\{ \begin{array}{lccc} & \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ t_{mx} = & \sigma_x\beta_x & + \tau_{yx}\beta_y & + \tau_{zx}\beta_z \\ t_{my} = & \tau_{xy}\beta_x & + \sigma_y\beta_y & + \tau_{zy}\beta_z \\ t_{mz} = & \tau_{xz}\beta_x & + \tau_{yz}\beta_y & + \sigma_z\beta_z \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\vec{t}_m = \vec{t}_x\beta_x + \vec{t}_y\beta_y + \vec{t}_z\beta_z}$$

RELAZIONE DI CAUCHY

$\vec{t}_x = \{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\} \qquad \vec{t}_y = \{\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}\} \qquad \vec{t}_z = \{\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z\}$

$$t_{nm} = \overset{t_{nx}}{(\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z)}\underline{\beta_x} + \overset{t_{ny}}{(\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z)}\underline{\beta_y} + \overset{t_{nz}}{(\tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z)}\underline{\beta_z}$$

< COMPONENTI NORMALI > [COMPONENTI TANGENZIALI

$$t_{nm} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z + (\tau_{yx} \alpha_y \beta_x + \tau_{xy} \alpha_x \beta_y) + (\tau_{zx} \alpha_z \beta_x + \tau_{xz} \alpha_x \beta_z) + (\tau_{zy} \alpha_z \beta_y + \tau_{yz} \alpha_y \beta_z)]$$

$$t_{mn} = \overset{t_{mx}}{(\sigma_x \beta_x + \tau_{yx} \beta_y + \tau_{zx} \beta_z)}\underline{\alpha_x} + \overset{t_{my}}{(\tau_{xy} \beta_x + \sigma_y \beta_y + \tau_{zy} \beta_z)}\underline{\alpha_y} + \overset{t_{mz}}{(\tau_{xz} \beta_x + \tau_{yz} \beta_y + \sigma_z \beta_z)}\underline{\alpha_z}$$

< COMPONENTI NORMALI > [COMPONENTI TANGENZIALI

$$t_{mn} = \sigma_x \beta_x \alpha_x + \sigma_y \beta_y \alpha_y + \sigma_z \beta_z \alpha_z + (\tau_{yx} \beta_y \alpha_x + \tau_{xy} \beta_x \alpha_y) + (\tau_{zx} \beta_z \alpha_x + \tau_{xz} \beta_x \alpha_z) + (\tau_{zy} \beta_z \alpha_y + \tau_{yz} \beta_y \alpha_z)]$$

- LE COMPONENTI NORMALI SONO UGUALI : $\boxed{\sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z}$
- LE COMPONENTI TANGENZIALI SONO DIVERSE: MA POICHÉ $\underline{\underline{\sigma}}$ È SIMMETRICO ALLORA $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

QUINDI POSSIAMO RAGGRUPPARLE:

$$\tau_{xy}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + \tau_{zx}(\alpha_x \beta_z + \alpha_z \beta_x) + \tau_{zy}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) \quad \underline{t_{nm}}$$

$$\tau_{yx}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x \beta_z + \alpha_z \beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) \quad \underline{t_{mn}}$$

ALLORA t_{nm} E t_{mn} DEVONO ESSERE UGUALI PERCHÉ LE LORO ESPRESSIONI SONO UGUALI! $\boxed{t_{nm} = t_{mn}}$

SE $\vec{n} = \vec{m}$ ALLORA $\alpha_x = \beta_x$, $\alpha_y = \beta_y$, $\alpha_z = \beta_z$ E QUINDI $\boxed{t_{nm} = t_{mn} = t_{nn} = \sigma_n}$. COMPONENTE NORMALE

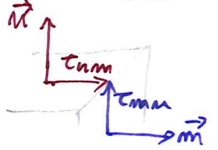
CON $\boxed{\sigma_n = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + \sigma_z \alpha_z^2 + 2\,\tau_{xy} \alpha_x \alpha_y + 2\,\tau_{xz} \alpha_x \alpha_z + 2\,\tau_{yz} \alpha_y \alpha_z}$ NOTE LE 6 COMPONENTI INDIPENDENTI $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ POSSIAMO RICAVARE σ_n

SE $\vec{n} \perp \vec{m}$ ALLORA $\vec{n} \times \vec{m} = 0 \iff \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = 0$ E QUINDI $\boxed{t_{nm} = \tau_{nm} \;;\; t_{mn} = \tau_{mn}}$ COMPONENTI TANGENZIALI

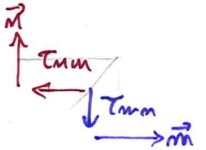
CON $\boxed{\tau_{nm} = \tau_{mn} = \sigma_x \alpha_x \beta_x + \sigma_y \alpha_y \beta_y + \sigma_z \alpha_z \beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x \beta_z + \alpha_z \beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y)}$

È QUINDI POSSIBILE RICAVARE τ_{nm} SE FISSIAMO 2 DIREZIONI ORTOGONALI

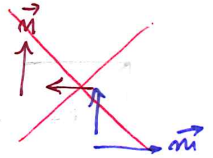
NELLO SPIGOLO:



SE SONO ENTRAMBE POSITIVE, CONVERGONO



SE SONO ENTRAMBE NEGATIVE, DIVERGONO



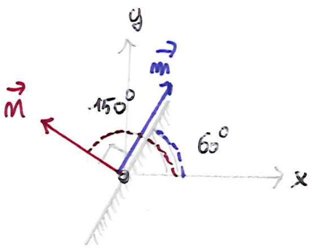
NON PUÒ MAI AVVENIRE CHE SI INSEGUANO

ANALISI DELLA TENSIONE o DELLO STATO DI SFORZO

ESEMPIO APPLICATIVO

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ \left[\begin{array}{c|c|c} 150 & 60 & 0 \\ 60 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

QUANTO VALE σ_n SU UNA GIACITURA DI NORMALE $\vec{n}$ RUOTATA DI 60° RISPETTO ALL'ASSE x?
E QUANTO VALE τ_{nm}, CON $\vec{m}$ PERPENDICOLARE AD $\vec{n}$?



[$\vec{n}$ E x FORMANO UN ANGOLO DI 150°]

$$\underline{\vec{n}} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\} \qquad \alpha_x = \cos\{\overset{150°}{\widehat{x,n}}\}; \quad \alpha_y = \cos\{\overset{60°}{\widehat{y,n}}\}; \quad \alpha_z = \cos\{\overbrace{\widehat{z,n}}^{90°}\}$$

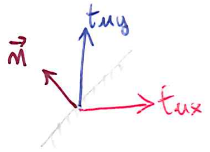
$$\underline{\vec{m}} = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\} \qquad \beta_x = \cos\{\overset{60°}{\widehat{x,m}}\}; \quad \beta_y = \cos\{\overset{30°}{\widehat{y,m}}\}; \quad \beta_z = \cos\{\overbrace{\widehat{z,m}}^{90°}\}$$

$$\underline{\vec{n} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}}$$

$$\underline{\vec{m} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}}$$

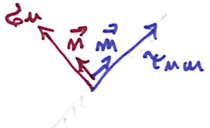
N.B. $\vec{n}$ E $\vec{m}$ SONO PERPENDICOLARI? $\vec{n} \times \vec{m} = 0 \rightsquigarrow \vec{n} \times \vec{m} = \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y + \alpha_z\beta_z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + (0\cdot 0) = 0$ VERIFICATO ✓

$$\vec{t}_n = \{t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}\} \qquad \vec{t}_n = \vec{t}_x\alpha_x + \vec{t}_y\alpha_y + \vec{t}_z\alpha_z = \overset{\vec{t}_x}{\begin{Bmatrix}150\\60\\0\end{Bmatrix}} \cdot \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} + \overset{\vec{t}_y}{\begin{Bmatrix}60\\-70\\0\end{Bmatrix}} \cdot \left\{\frac{1}{2}\right\} + \overset{\vec{t}_z}{\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}} \cdot \{0\}$$



$$\begin{cases} \underline{t_{nx}} = (150)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (60)\left(\frac{1}{2}\right) = -100 \text{ MPa} \; (-99.904) \quad = 75\sqrt{3} + 30 \\ \underline{t_{ny}} = (60)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-70)\left(\frac{1}{2}\right) = -87 \text{ MPa} \; (-86.962) \quad = -30\sqrt{3} - 35 \\ t_{nz} = 0 \end{cases}$$

DOBBIAMO PROIETTARE t_{nx} E t_{ny} SECONDO $\vec{n}$ E $\vec{m}$ PER TROVARE σ_n E τ_{nm}

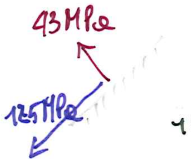


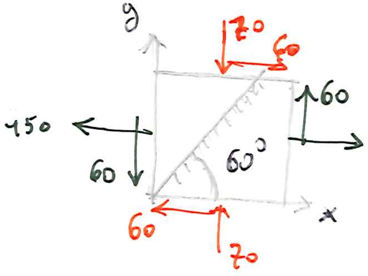
$$\sigma_n = t_{nx}\alpha_x + t_{ny}\alpha_y + t_{nz}\alpha_z = (-99.904)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-86.962)(1/2) + (0)(0) = +43 \text{ MPa} \quad (43.038)$$

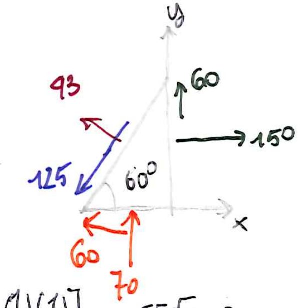
$$\tau_{nm} = t_{nx}\beta_x + t_{ny}\beta_y + t_{nz}\beta_z = (-99.904)\left(\frac{1}{2}\right) + (-86.962)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -125 \text{ MPa} \quad (-125.263)$$

[PER GLI SFORZI NORMALI:
⊕ = TRAZIONE

⊖ = COMPRESSIONE]







[NB POSSIAMO ANCHE CALCOLARLO COSÌ:

$$\sigma_n = \sigma_x\alpha_x^2 + \sigma_y\alpha_y^2 + \sigma_z\alpha_z^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x\alpha_y + 2\tau_{xz}\alpha_x\alpha_z + 2\tau_{yz}\alpha_y\alpha_z$$

$$\tau_{nm} = \sigma_x\alpha_x\beta_x + \sigma_y\alpha_y\beta_y + \sigma_z\alpha_z\beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$$

$$\sigma_n = 150\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 70\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot 60\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{225-35}{2} - 30\sqrt{3} = 43.038$$]

$$\tau_{nm} = 150\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 70\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 60\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = -55\sqrt{3} - 30 = -125.263$$

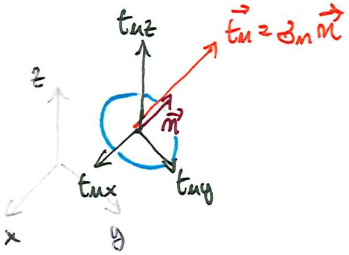
1C. – COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE –

ESISTE LA POSSIBILITÁ DI AVERE QUALCHE PARTICOLARE GIACITURA $\vec{n}$ IN CUI $\vec{t_n}$ ABBIA SOLO COMPONENTI NORMALI σ_n E SIANO NULLE TUTTE LE COMPONENTI TANGENZIALI τ?

GIACITURE CHE GODONO DI TALE PROPRIETÁ VENGONO DETTE GIACITURE PRINCIPALI, LE LORO NORMALI SI DICONO DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE E I VALORI DELLE RELATIVE TENSIONI NORMALI COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE.

∘ METODO SCIENTIFICO : TRASFORMARE UN PROBLEMA FISICO IN UNO MATEMATICO E VEDERE SE ESISTONO SOLUZIONI

DOMANDA ESISTE QUALCHE DIREZIONE $\vec{n}$ PER CUI $\vec{t_n}$ È DIRETTO COME $\vec{n}$?



COME SAREBBERO t_{nx}, t_{ny} E t_{nz} SE $\vec{t_n} = \sigma_n \cdot \vec{n}$?

$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\}$

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_n \alpha_x \\ t_{ny} = \sigma_n \alpha_y \\ t_{nz} = \sigma_n \alpha_z \end{cases}$$

COMPONENTI CARTESIANE DI $\vec{t_n} = \sigma_n \vec{n}$ $\Longleftrightarrow$ PER LA RELAZIONE DI CAUCHY: $\vec{t_n} = \underline{\underline{\sigma}}\, \vec{n}$

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z \\ t_{ny} = \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z \\ t_{nz} = \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{cases}$$

LE COMPONENTI CARTESIANE E QUELLE SPECIALI OTTENUTE CON LA RELAZIONE DI CAUCHY DEVONO ESSERE UGUALI

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z = \sigma_n \alpha_x \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z = \sigma_n \alpha_y \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z = \sigma_n \alpha_z \end{cases}$$

QUALI SONO LE INCOGNITE? L'INCOGNITA È $\vec{n}$, CIOÈ $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n) \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + (\sigma_y - \sigma_n) \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + (\sigma_z - \sigma_n) \alpha_z = 0 \end{cases} \quad [*]$$

[*] È 1 SISTEMA ALGEBRICO LINEARE DI EQUAZIONI NELLE 3 INCOGNITE $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$. I TERMINI NOTI SONO NULLI → SISTEMA OMOGENEO

PER I SISTEMI OMOGENEI ESISTE SEMPRE UNA SOLUZIONE BANALE: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$, MA QUESTA SOLUZIONE NON HA SENSO DA UN PUNTO DI VISTA FISICO: α_x, α_y E α_z SONO LE COMPONENTI DI 1 VETTORE UNITARIO $(\vec{n})$ ⇒ $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = |\vec{n}| = 1$

(D'ALTRONDE UN VETTORE NULLO NON PUÓ RAPPRESENTARE UNA GIACITURA (OLTRE AL MODULO, NON HA NEANCHE DIREZIONE E VERSO)

MA NEI SISTEMI OMOGENEI, OLTRE ALLA SOLUZIONE BANALE POSSONO ESISTERE ALTRE SOLUZIONI SE LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE DIVENTA SINGOLARE:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

IL DETERMINANTE DI A DEVE ESSERE UGUALE A ZERO:

$$\det [A] = 0$$

(TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI)

1C. - COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE -

1A

[A] HA UNA STRUTTURA SPECIALE: $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \sigma_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow [A] = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}$ ALLORA BISOGNA RISOLVERE: $\boxed{\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}})}$

1B

PROBLEMA AGLI AUTOVALORI: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ CON $\lambda \underline{\underline{I}}\,\underline{x} \rightsquigarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{\underline{I}}\,\underline{x} \rightsquigarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{x} = 0$

SOLUZIONE BANALE: $x = \{0\ 0\ 0\}^T$, MA POSSONO ESISTERE SOLUZIONI DIVERSE SE $\det.(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$, CHE È UNA FUNZIONE DI λ CHE CONSENTE DI CALCOLARE GLI AUTOVALORI. PER OGNI AUTOVALORE POSSO RICOSTRUIRE GLI AUTOVETTORI

1C

* IL PROBLEMA $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n I)$ É ANALOGO: I VALORI DI σ_n PER CUI IL DETERMINANTE È UGUALE A Ø SONO GLI AUTOVALORI CHE CONSENTONO DI TROVARE GLI AUTOVETTORI PER CUI $\vec{t_n} = \sigma_n \vec{n}$

I VALORI DI σ_n SONO LE TENSIONI PRINCIPALI

I CORRISPONDENTI AUTOVETTORI SONO I VALORI DI $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ PER CUI SULLA GIACITURA $\vec{n}$ SI HANNO SOLO COMPONENTI NORMALI σ_n

$$\det.\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = \boxed{\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0}$$

SVILUPPANDO IL DETERMINANTE SI OTTIENE QUESTA EQUAZIONE CUBICA IN σ_n: EQUAZIONE CARATTERISTICA

É POSSIBILE NOTARE CHE: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = tr(\underline{\underline{\sigma}})$ É L'INVARIANTE PRIMO DI $\underline{\underline{\sigma}}$ - LINEARE

$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)$ È L'INVARIANTE SECONDO DI $\underline{\underline{\sigma}}$ - QUADRATICO

NB. $I_2 = -\left(\det\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left\{tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) - [tr(\underline{\underline{\sigma}})]^2\right\}$

$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$ É L'INVARIANTE TERZO DI $\underline{\underline{\sigma}}$ - CUBICO

NB $I_3 = \det|\underline{\underline{\sigma}}|$

NB GLI INVARIANTI NON POSSONO DIPENDERE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO!

IL TENSORE $\underline{\underline{\sigma}}$ HA 3 INVARIANTI - LINEARE, CUBICO E QUADRATICO - INDIPENDENTI DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO

AD ESEMPIO UN VETTORE HA 1 INVARIANTE - IL MODULO - CHE NON CAMBIA RISPETTO AL RIFERIMENTO (LE COMPONENTI)

1C.- COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE -

III

1A L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\boxed{\sigma_u^3 - I_1 \sigma_u^2 - I_2 \sigma_u - I_3 = 0}$ AMMETTE SEMPRE 3 RADICI REALI (PER LA SIMMETRIA DI $\underset{=}{\sigma}$)

CONSEGUENTEMENTE ESISTONO 3 COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE: $\boxed{\sigma_1 ; \sigma_2 ; \sigma_3}$ SFORZI PRINCIPALI

1B E SI POSSONO DETERMINARE 3 DIREZIONI PRINCIPALI (AUTOVETTORI DEL PROBLEMA) MUTUAMENTE ORTOGONALI (NB È UNIVOCAMENTE DEFINITA LA DIREZIONE MA NON IL VERSO)

È POSSIBILE INDIVIDUARE 3 CASI:

1° CASO $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 3 RADICI DISTINTE; LE 3 CORRISPONDENTI DIREZIONI PRINCIPALI SONO ORTOGONALI

1C **2° CASO** $\sigma_1 > (\sigma_2 = \sigma_3)$ o $(\sigma_1 = \sigma_2) > \sigma_3$ 2 RADICI DISTINTE E 1 COINCIDENTE, SI PUÒ DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA DIREZIONE PRINCIPALE ASSOCIATA ALLA RADICE DISTINTA, E TUTTE LE DIREZIONI CONTENUTE NEL PIANO ORTOGONALE A QUESTA SONO PRINCIPALI

3° CASO $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 3 RADICI COINCIDENTI, TUTTE LE DIREZIONI SONO PRINCIPALI

NEI 3 CASI È SEMPRE POSSIBILE INDIVIDUARE (UNIVOCAMENTE NEL 1° CASO, MA VIA VIA PIÙ ARBITRARIAMENTE NEGLI ALTRI 2 CASI) UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE IN CUI IL TENSORE DEGLI SFORZI $\underset{=}{\sigma}$ ABBIA SOLO COMPONENTI NORMALI:

1° CASO

$\sigma_1 \rightarrow \vec{n}_1$

$\sigma_2 \rightarrow \vec{n}_2$

$\sigma_3 \rightarrow \vec{n}_3$

CON $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ TERNA DESTRA

$$\underset{=}{\sigma} = \begin{array}{ccc} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \\ \hline \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{array}$$

DOVE $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ SONO I VETTORI SULLE DIREZIONI PRINCIPALI $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$

ALLORA I COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA SONO:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}}$$

INVARIANTI DI TENSIONE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE

NB SE $I_3 = 0$ ⇝ STATO DI SFORZO PIANO

SE $I_3 = 0$ E $I_2 = 0$ ⇝ STATO DI SFORZO MONOASSIALE

I_1 É ASSOCIATO ALLO SFORZO "MEDIO" : $p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = I_1/3$ PRESSIONE IDROSTATICA

È POSSIBILE ESPRIMERE IL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$ COME: $\underline{\underline{\sigma}} = p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\sigma}}'$

$p\underline{\underline{I}}$ RAPPRESENTA LO STATO DI SFORZO IDROSTATICO : $p\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} \end{bmatrix}$

ALLORA $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix}$

SE IL MATERIALE É ELASTICO ;

- $p\underline{\underline{I}}$ - PARTE IDROSTATICA DEL TENSORE DEGLI SFORZI - È RESPONSABILE SOLO DEL CAMBIO DI VOLUME MA NON DI FORMA
- $\underline{\underline{\sigma}}'$ - PARTE DEVIATORICA DEL TENSORE DEGLI SFORZI - È RESPONSABILE DEI CAMBIAMENTI DI FORMA A VOLUME COSTANTE

N.B. $I_1' = \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} + \frac{-\sigma_x + 2\sigma_y - \sigma_z}{3} + \frac{-\sigma_x - \sigma_y + 2\sigma_z}{3} = 0$ $\quad I_1 = 0$ SE LO STATO DI SFORZO É PURAMENTE DEVIATORICO

1° CASO $\quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$\vec{n}_i$, $\vec{n}_j$ $\quad \vec{t}_i = \sigma_i \vec{n}_i$ $\quad \vec{t}_j = \sigma_j \vec{n}_j$ $\quad t_{ij} = \sigma_i \vec{n}_i \times \vec{n}_j$ $\quad t_{ji} = \sigma_j \vec{n}_j \times \vec{n}_i$ $\quad \vec{n}_i \times \vec{n}_j = 1 \cdot 1 \cdot \cos\vartheta_{ij} = \cos\vartheta_{ij}$ $\quad \vartheta_{ij} = \{n_i \hat{,} n_j\}$

MA : $\boxed{t_{ij} = t_{ji}}$ PER IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÁ DELLE TENSIONI TANGENZIALI $\rightarrow$ $t_{ij} - t_{ji} = 0$ $\quad t_{ij} = \sigma_i \cos\vartheta_{ij}$ $\quad t_{ji} = \sigma_j \cos\vartheta_{ij}$ $\quad (\sigma_i - \sigma_j)\cos\vartheta_{ij} = 0$

SE $\sigma_i \neq \sigma_j$ $\rightsquigarrow$ $\cos\vartheta_{ij} = 0$ $\quad \vartheta_{ij} = 90°$ $\Rightarrow$ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ALLORA $\boxed{\vartheta_{12} = \vartheta_{13} = \vartheta_{23} = 90°}$ $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ SONO MUTUAMENTE ORTOGONALI

1C.- COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE -

ESEMPIO APPLICATIVO

ASSEGNATO UNO STATO DI SFORZO $\underline{\underline{\sigma}}$ CALCOLARE LE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

[N.B. VALORI IN MPa]

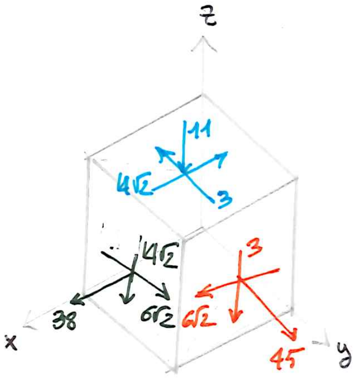
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ \end{array}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 38 & 6\sqrt{2} & -14\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 45 & -3 \\ -14\sqrt{2} & -3 & -11 \end{bmatrix}$$

DOBBIAMO RISOLVERE:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_u)\alpha_x + \tau_{yx}\alpha_y + \tau_{zx}\alpha_z = 0 \\ \tau_{xy}\alpha_x + (\sigma_y - \sigma_u)\alpha_y + \tau_{zy}\alpha_z = 0 \\ \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y + (\sigma_z - \sigma_u)\alpha_z = 0 \end{cases}$$

PIÙ LA CONDIZIONE: $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = |\vec{n}| = 1$



TIPICO PROBLEMA AGLI AUTOVALORI: $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_u \underline{\underline{I}})\vec{\underline{n}} = \vec{0}$

ALLORA $\boxed{\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_u \underline{\underline{I}}) = 0}$ DETERMINA SOLUZIONI NON BANALI DEL SISTEMA

$$\det\begin{bmatrix} (38-\sigma_u) & 6\sqrt{2} & -14\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & (45-\sigma_u) & -3 \\ -14\sqrt{2} & -3 & (-11-\sigma_u) \end{bmatrix} = 0$$

MOLTO COMPLICATO... MA POSSIAMO USARE GLI INVARIANTI: $\rightsquigarrow \boxed{\sigma_u^3 - I_1\sigma_u^2 - I_2\sigma_u - I_3 = 0}$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\textcircled{I_1} = tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 38 + 45 - 11 = 72 \qquad \boxed{I_1 = 72}$$

$$\textcircled{I_2} = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) = \frac{1}{2}\left\{tr(\underline{\underline{\sigma}}^2) - [tr(\underline{\underline{\sigma}})]^2\right\}$$

$$I_2 = -\left[\det\begin{vmatrix} 38 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 45 \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} 38 & -14\sqrt{2} \\ -14\sqrt{2} & -11 \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} 45 & -3 \\ -3 & -11 \end{vmatrix}\right] = -\Big[(38)(45) - (6\sqrt{2})(6\sqrt{2}) + (38)(-11)) - ((-14\sqrt{2})(-14\sqrt{2}) +$$

$$+ (45)(-11) - (-3)(-3)\Big] = -[1638 + (-810) + (-504)] = -324 \qquad \boxed{I_2 = -324}$$

$$\textcircled{I_3} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_z\tau_{xy}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$$

$$I_3 = \det|\underline{\underline{\sigma}}| = 38\begin{vmatrix} 45 & -3 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} - 6\sqrt{2}\begin{vmatrix} 6\sqrt{2} & -3 \\ -14\sqrt{2} & -11 \end{vmatrix} - 14\sqrt{2}\begin{vmatrix} 6\sqrt{2} & 45 \\ -14\sqrt{2} & -3 \end{vmatrix} = 38\Big[(45)(-11) - (-3)(-3)\Big] - 6\sqrt{2}\Big[(6\sqrt{2})(-11) +$$

$$-(-3)(-14\sqrt{2})\Big] - 14\sqrt{2}\Big[(6\sqrt{2})(-3) - (45)(-14\sqrt{2})\Big] = -19152 + 1296 - 17136 = -34992 \qquad \boxed{I_3 = -34992}$$

ANALISI DELLA TENSIONE o DELLO STATO DI SFORZO

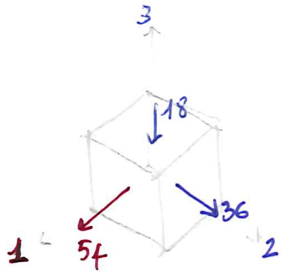
1C - COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE -

DETERMINATI GLI INVARIANTI, L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DIVENTA: $\boxed{\sigma_u^3 - 72\,\sigma_u^2 + 324\,\sigma_u + 34992 = 0}$

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA SONO I VALORI DELLE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$\boxed{\sigma_1 = 54}$ $\boxed{\sigma_2 = 36}$ $\boxed{\sigma_3 = -18}$ N.B. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \end{array}$$



[N.B. NON SAPPIAMO LE DIREZIONI MA SARÀ DI QUESTO TIPO CON SOLO SFORZI NORMALI]

COME POSSIAMO VERIFICARE CHE SIANO GIUSTE?

1° MODO LE METTIAMO NELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$\sigma_1 \rightarrow (54)^3 - 72(54)^2 + 324(54) + 34992 = 0$ ✓

$\sigma_2 \rightarrow (36)^3 - 72(36)^2 + 324(36) + 34992 = 0$ ✓

$\sigma_3 \rightarrow (-18)^3 - 72(-18)^2 + 324(-18) + 34992 = 0$ ✓

2° MODO CON GLI INVARIANTI:

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 54 + 36 - 18 = 72$ ✓

$I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = -[(54)(36) + (54)(-18) + (36)(-18)] = -324$ ✓

$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (54)(36)(-18) = -34992$ ✓

1A

IL PASSO SUCCESSIVO È DETERMINARE LE DIREZIONI PRINCIPALI $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ E $\vec{n}_3$ DELLE TRE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

ESSENDO 3 SOLUZIONI DISTINTE, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ESISTONO 3 DIREZIONI DISTINTE MUTUAMENTE ORTOGONALI

PER DETERMINARLE UTILIZZIAMO LA CONDIZIONE $\boxed{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = |\vec{n}| = 1}$

1B

POSSIAMO ESPRIMERE $\boxed{\vec{n}_1 = (\alpha_{x1}, \alpha_{y1}, \alpha_{z1})}$, $\boxed{\vec{n}_2 = (\alpha_{x2}, \alpha_{y2}, \alpha_{z2})}$, $\boxed{\vec{n}_3 = (\alpha_{x3}, \alpha_{y3}, \alpha_{z3})}$

SOSTITUIAMO NEL SISTEMA INIZIALE A SUA VOLTA PER VOLTA LA RADICE CHE CI SERVE, OVVERO σ_1 PER CALCOLARE $\vec{n}_1$, σ_2 PER $\vec{n}_2$ E σ_3 PER $\vec{n}_3$:

1C

$$\begin{cases} (38 - \sigma_u)\alpha_x + 6\sqrt{2}\alpha_y - 14\sqrt{2}\alpha_z = 0 \\ 6\sqrt{2}\alpha_x + (45 - \sigma_u)\alpha_y - 3\alpha_z = 0 \\ -14\sqrt{2}\alpha_x + 3\alpha_y + (-11 - \sigma_u)\alpha_z = 0 \end{cases}$$

AD ESEMPIO PER CALCOLARE $\vec{n}_1$ SOSTITUIAMO $\boxed{\sigma_u = \sigma_1}$ E RICAVIAMO α_{x1}, α_{y1} E α_{z1}

$$\begin{cases} (38 - 54)\alpha_{x1} + 6\sqrt{2}\alpha_{y1} - 14\sqrt{2}\alpha_{z1} = 0 \quad (*) \\ 6\sqrt{2}\alpha_{x1} + (45 - 54)\alpha_{y1} - 3\alpha_{z1} = 0 \quad (**) \\ -14\sqrt{2}\alpha_{x1} + 3\alpha_{y1} + (-11 - 54)\alpha_{z1} = 0 \end{cases}$$

UTILIZZIAMO LE PRIME 2 (NON POSSIAMO USARE TUTTE E 3 PERCHÉ NON SONO INDIPENDENTI)

(*) $-16\alpha_{x1} + 6\sqrt{2}\alpha_{y1} - 14\sqrt{2}\alpha_{z1} = 0$ ⇝ DIVIDIAMO PER 2 ⇝ $-8\alpha_{x1} + 3\sqrt{2}\alpha_{y1} - 7\sqrt{2}\alpha_{z1} = 0$

(**) $6\sqrt{2}\alpha_{x1} - 9\alpha_{y1} - 3\alpha_{z1} = 0$ ⇝ DIVIDIAMO PER 3 ⇝ $2\sqrt{2}\alpha_{x1} - 3\alpha_{y1} - \alpha_{z1} = 0$

DALLA (*) $\alpha_{x1} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{y1} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1}$ E SOSTITUENDO IN (**) $2\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha_{y1} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1}\right) - 3\alpha_{y1} - \alpha_{z1} = 0$ ⇝ $\frac{3}{2}\alpha_{y1} - \frac{7}{2}\alpha_{z1} - 3\alpha_{y1} - \alpha_{z1} = 0$

RACCOGLIENDO: $-\frac{3}{2}\alpha_{y1} - \frac{9}{2}\alpha_{z1} = 0$ ⇝ DIVIDENDO PER 2 E POI PER 3 ⇝ $\boxed{\alpha_{y1} = -3\alpha_{z1}}$

ESPRIMIAMO α_{y1} IN FUNZIONE DI α_{z1} IN α_{x1}: $\alpha_{x1} = \frac{3\sqrt{2}}{8}(-3\alpha_{z1}) - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1} = -\frac{9\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\alpha_{z1} = -2\sqrt{2}\alpha_{z1}$ $\boxed{\alpha_{x1} = -2\sqrt{2}\alpha_{z1}}$

IMPONENDO $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$: $(-2\sqrt{2}\alpha_{z1})^2 + (-3\alpha_{z1})^2 + \alpha_{z1}^2 = 1$ ⇝ $18\alpha_{z1}^2 = 1$ $\boxed{\alpha_{z1} = +/- \frac{1}{\sqrt{18}} = +/- \frac{\sqrt{2}}{6}}$

E RICAVIAMO $\boxed{\alpha_{x1} = -2\sqrt{2}(+\sqrt{2}/6) = -2/3}$ E $\boxed{\alpha_{y1} = -3(+\sqrt{2}/6) = -\sqrt{2}/2}$

QUINDI: $\vec{n}_1 = (-2/3, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/6)$

ANALOGAMENTE SI PROCEDE PER $\vec{n}_2$ E $\vec{n}_3$ (VEDI PERÒ NOTA 4)

ANALISI DELLA TENSIONE o DELLO STATO DI SFORZO

1C.- COMPONENTI PRINCIPALI E INVARIANTI DI TENSIONE -

1A

1B

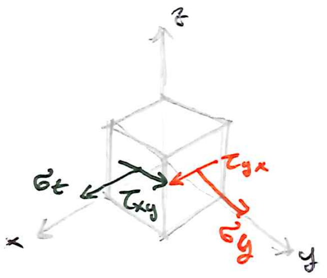
1C

STATO DI SFORZO PIANO

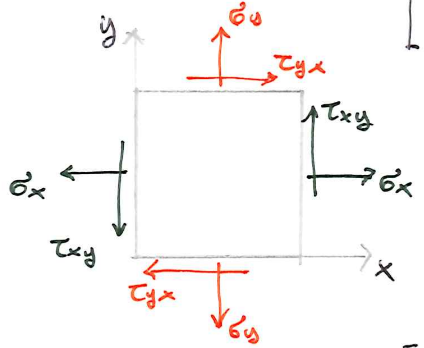
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{ccc} \vec t_x & \vec t_y & \vec t_z \\ \left[\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \end{array}$$

$\underline{\vec t_z = \vec 0}$

N.B. z è 1 direzione principale, non ci sono tensioni tangenziali (ovviamente anche normali) $\sigma_z = 0$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ *



Possiamo rappresentarlo nel piano x, y



COME TROVARE LE TENSIONI PRINCIPALI?

$$\sigma_u \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_u & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u \end{bmatrix} \qquad \det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_u \underline{\underline{I}}\right) = 0 \qquad \det\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_u) & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_u) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} = 0$$

$$-\sigma_u\left[(\sigma_x - \sigma_u)(\sigma_y - \sigma_u) - \tau_{xy}^2\right] = 0 \rightsquigarrow -\sigma_u\left[\sigma_u^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_u + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2\right] = 0 \quad (*)$$

N.B.

$$\sigma_u^3 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_u^2 - (\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y)\sigma_u = 0 \longleftrightarrow \boxed{\sigma_u^3 - I_1\sigma_u^2 - I_2\sigma_u - I_3 = 0}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

*$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \cancel{\sigma_z}$; *$I_2 = \tau_{xy}^2 + \cancel{\tau_{xz}}^2 + \cancel{\tau_{yz}}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\cancel{\sigma_z} + \sigma_y\cancel{\sigma_z})$; *$I_3 = \sigma_x\cancel{\sigma_y}\cancel{\sigma_z} + 2\tau_{xy}\cancel{\tau_{xz}}\tau_{yz} - (\cancel{\sigma_z}\tau_{xy}^2 + \sigma_y\cancel{\tau_{xz}}^2 + \sigma_x\cancel{\tau_{yz}}^2)$

$\underline{I_1 = \sigma_x + \sigma_y}$; $\underline{I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y}$; $\underline{I_3 = 0}$ $\boxed{\text{STATO PIANO DI TENSIONE}}$

$$\sigma_m^3 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_u^2 - (\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y)\sigma_u = 0$$

$$(*) \; -\sigma_u\left[\sigma_u^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_u + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2\right] = 0$$

$\underline{\sigma_u = 0 \rightsquigarrow \sigma_3 = 0}$ TERZO SFORZO PRINCIPALE NULLO (STATO PIANO)

$\sigma_u^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_u + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (**)$

LA (**) È UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO : LE RADICI SONO LE TENSIONI PRINCIPALI σ_1 E σ_2

* [NB $ax^2+bx+c=0$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b+/-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]

$$* \ \sigma_{1,2}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)+/-\sqrt{(\sigma_x+\sigma_y)^2-4(\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2)}}{2}$$

SVILUPPANDO IL TERMINE SOTTO LA RADICE : $\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\sigma_x\sigma_y-4\sigma_x\sigma_y-4\tau_{xy}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\sigma_x\sigma_y+4\tau_{xy}^2=(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2$

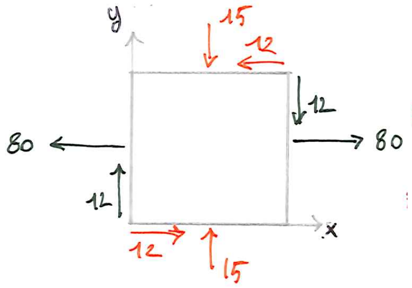
$$\boxed{\sigma_{1,2}}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)+/-\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}}{2}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}+/-\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}{4}}=\boxed{\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}+/-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

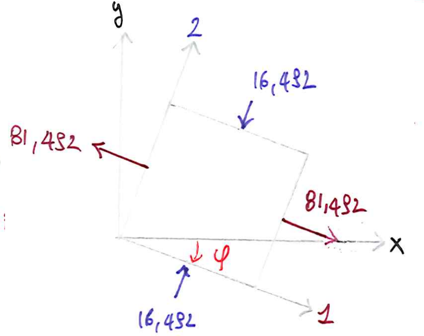
CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI σ_1 E σ_2 IN STATO PIANO DI TENSIONE

ESEMPIO APPLICATIVO

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\vec{t}_x & \vec{t}_y & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc}80 & -12 & 0\\ -12 & -15 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}\ \text{MPa}$$

STATO PIANO DI TENSIONE





φ ANGOLO DI CUI DOBBIAMO RUOTARE LA FACCIA DEL CUBO PER ESSERE NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE

VOGLIAMO CALCOLARE ⓢσ_1 E σ_2:

$$\sigma_{1,2}=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)+/-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\left(\frac{80-15}{2}\right)+/-\sqrt{\left(\frac{80+15}{2}\right)^2+(-12)^2}=\begin{cases}\boxed{\sigma_1=81,492\ \text{MPa}}\\ \boxed{\sigma_2=-16,492\ \text{MPa}}\end{cases}$$

N.B. $\boxed{\sigma_3=0}$

NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE :

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc}81,492 & 0 & 0\\ 0 & -16,492 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

N.B. $I_1=\sigma_x+\sigma_y=80-15=65$

$I_1=\sigma_1+\sigma_2=81,492-16,492=65$

$I_2=\tau_{xy}^2-\sigma_x\sigma_y=144+1200=1344$

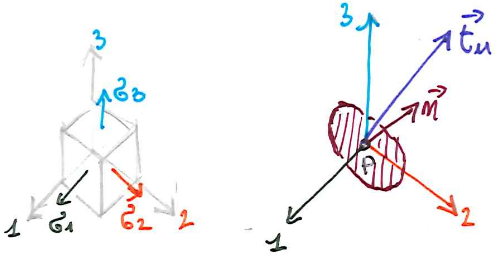
$I_2=-\sigma_1\sigma_2=1344$

PER TROVARE LE DIREZIONI PRINCIPALI, $\vec{n}_1$ E $\vec{n}_2$ USIAMO LA CONDIZIONE $\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2=1$ [PER IL CALCOLO DELL'ANGOLO φ VEDI NOTA 7]

PERÒ ESISTE UN MODO PIÙ COMODO PER CALCOLARE φ → $\boxed{\text{CERCHI DI MOHR}}$

1D. – I CERCHI DI MOHR –

DATO UN PUNTO P, ASSUMIAMO COME ASSI DI RIFERIMENTO LE TRE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE ①, ②, ③, E CONSIDERIAMO UN PIANO PASSANTE PER P AVENTE UNA GIACITURA GENERICA DI NORMALE $\vec{n}$ SU CUI AGISCE LA TENSIONE $\vec{t_n}$



$$\boxed{\vec{n} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} \quad \alpha_1 = \cos\{1,\hat{n}\}, \ \alpha_2 = \cos\{2,\hat{n}\}, \ \alpha_3 = \cos\{3,\hat{n}\}$$

LA RELAZIONE DI CAUCHY CONSENTE DI DETERMINARE $\vec{t_n}$ NOTI $\vec{t_1}$, $\vec{t_2}$ E $\vec{t_3}$, OVVERO LE SUE COMPONENTI RISPETTO ALLE DIREZIONI ①②③ (3 PIANI ORTOGONALI → È POSSIBILE DETERMINARE $\vec{t}$ PER QUALSIASI GIACITURA)

$$\boxed{\vec{t_n} = \vec{t_1}\alpha_1 + \vec{t_2}\alpha_2 + \vec{t_3}\alpha_3}$$

$$\vec{t_1} = \{\sigma_1, 0, 0\}, \ \vec{t_2} = \{0, \sigma_2, 0\}, \ \vec{t_3} = \{0, 0, \sigma_3\}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t_1} & \vec{t_2} & \vec{t_3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

ALLORA LE COMPONENTI DI t_n RISPETTO AL RIFERIMENTO PRINCIPALE

$$\boxed{\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_1 \alpha_1 \\ t_{n2} &= \sigma_2 \alpha_2 \\ t_{n3} &= \sigma_3 \alpha_3 \end{aligned}}$$

QUANTO VALE LA COMPONENTE NORMALE σ_n DI $\vec{t_n}$?

$$\sigma_n = t_{n1}\alpha_1 + t_{n2}\alpha_2 + t_{n3}\alpha_3 \ \rightsquigarrow \ \boxed{\sigma_n = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2} \ [\bullet]$$

[N.B. È L'ESPRESSIONE $\sigma_n = \sigma_x\alpha_x^2 + \sigma_y\alpha_y^2 + \sigma_z\alpha_z^2 + 2\tau_{xy}\alpha_z\alpha_y + 2\tau_{xz}\alpha_x\alpha_z + 2\tau_{yz}\alpha_y\alpha_z$]

QUANTO VALE LA COMPONENTE TANGENZIALE τ_{nm} DI $\vec{t_n}$, CON $\vec{m}$ PERPENDICOLARE A $\vec{n}$?

$\vec{m}$ È UNA QUALUNQUE RETTA PERPENDICOLARE A $\vec{n}$, OVVERO APPARTENENTE AL PIANO DI GIACITURA $\vec{n}$

$$\boxed{\vec{m} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}} \quad \beta_1 = \cos\{1,\hat{\vec{m}}\}, \ \beta_2 = \cos\{2,\hat{\vec{m}}\}, \ \beta_3 = \cos\{3,\hat{\vec{m}}\}$$

$$\tau_{nm} = t_{n1}\beta_1 + t_{n2}\beta_2 + t_{n3}\beta_3 \ \rightsquigarrow \ \boxed{\tau_{nm} = \sigma_1\alpha_1\beta_1 + \sigma_2\alpha_2\beta_2 + \sigma_3\alpha_3\beta_3} \ [\circ]$$

[N.B. È L'ESPRESSIONE $\tau_{nm} = \sigma_x\alpha_x\beta_x + \sigma_y\alpha_y\beta_y + \sigma_z\alpha_z\beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$]

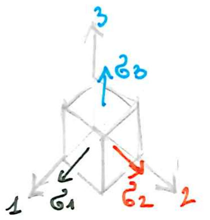
* LE ESPRESSIONI [•] E [∘] QUINDI CONSENTONO DI VALUTARE LE TENSIONI NORMALI E TANGENZIALI SU UNA QUALUNQUE GIACITURA IN FUNZIONE DELLE TENSIONI PRINCIPALI σ_1, σ_2, σ_3

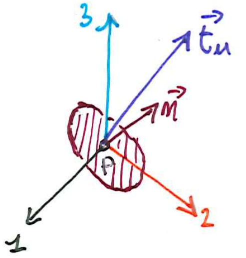
ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1D. – I CERCHI DI MOHR –

Ⓘ

DATO UN PUNTO P, ASSUMIAMO COME ASSI DI RIFERIMENTO LE TRE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE ①, ②, ③, E CONSIDERIAMO UN PIANO PASSANTE PER P AVENTE UNA GIACITURA GENERICA DI NORMALE $\vec{n}$ SU CUI AGISCE LA TENSIONE $\vec{t}_n$





$$\boxed{\vec{n} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} \quad \alpha_1 = \cos\{1,\hat{n}\} \;,\; \alpha_2 = \cos\{2,\hat{n}\} \;,\; \alpha_3 = \cos\{3,\hat{n}\}$$

LA RELAZIONE DI CAUCHY CONSENTE DI DETERMINARE $\vec{t}_n$ NOTI $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ E $\vec{t}_3$, OVVERO LE SUE COMPONENTI RISPETTO ALLE DIREZIONI ①②③ (3 PIANI ORTOGONALI → È POSSIBILE DETERMINARE $\vec{t}$ PER QUALSIASI GIACITURA)

$$\boxed{\vec{t}_n = \vec{t}_1\alpha_1 + \vec{t}_2\alpha_2 + \vec{t}_3\alpha_3}$$

$$\vec{t}_1 = \{\sigma_1, 0, 0\} \;,\; \vec{t}_2 = \{0, \sigma_2, 0\} \;,\; \vec{t}_3 = \{0, 0, \sigma_3\}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{ccc} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \\ \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{array}$$

ALLORA LE COMPONENTI DI t_n RISPETTO AL RIFERIMENTO PRINCIPALE

$$\boxed{\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_1\alpha_1 \\ t_{n2} &= \sigma_2\alpha_2 \\ t_{n3} &= \sigma_3\alpha_3 \end{aligned}}$$

QUANTO VALE LA COMPONENTE NORMALE σ_n DI $\vec{t}_n$?

$$\sigma_n = t_{n1}\alpha_1 + t_{n2}\alpha_2 + t_{n3}\alpha_3 \rightsquigarrow \boxed{\sigma_n = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2} \quad [\bullet]$$

[N.B. È L'ESPRESSIONE $\sigma_n = \sigma_x\alpha_x^2 + \sigma_y\alpha_y^2 + \sigma_z\alpha_z^2 + 2\tau_{xy}\alpha_z\alpha_y + 2\tau_{xz}\alpha_x\alpha_z + 2\tau_{yz}\alpha_y\alpha_z$]

QUANTO VALE LA COMPONENTE TANGENZIALE τ_{nm} DI $\vec{t}_n$, CON $\vec{m}$ PERPENDICOLARE A $\vec{n}$?

$\vec{m}$ È UNA QUALUNQUE RETTA PERPENDICOLARE A $\vec{n}$, OVVERO APPARTENENTE AL PIANO DI GIACITURA $\vec{m}$

$$\boxed{\vec{m} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}} \quad \beta_1 = \cos\{1,\hat{\vec{m}}\} \;,\; \beta_2 = \cos\{2,\hat{\vec{m}}\} \;,\; \beta_3 = \cos\{3,\hat{\vec{m}}\}$$

$$\tau_{nm} = t_{n1}\beta_1 + t_{n2}\beta_2 + t_{n3}\beta_3 \rightsquigarrow \boxed{\tau_{nm} = \sigma_1\alpha_1\beta_1 + \sigma_2\alpha_2\beta_2 + \sigma_3\alpha_3\beta_3} \quad [\circ]$$

[N.B. È L'ESPRESSIONE $\tau_{nm} = \sigma_x\alpha_x\beta_x + \sigma_y\alpha_y\beta_y + \sigma_z\alpha_z\beta_z + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + \tau_{xz}(\alpha_x\beta_z + \alpha_z\beta_x) + \tau_{yz}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y)$]

✱ LE ESPRESSIONI [•] E [∘] QUINDI CONSENTONO DI VALUTARE LE TENSIONI NORMALI E TANGENZIALI SU UNA QUALUNQUE GIACITURA IN FUNZIONE DELLE TENSIONI PRINCIPALI σ_1, σ_2, σ_3

1A

DEVE ESSERE $\underline{\tau_u^2 + (\sigma_u - \sigma_2)(\sigma_u - \sigma_3) \geq 0}$ $\tau_u^2 + \sigma_u^2 - \sigma_u(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 \geq 0$

POSSIAMO SCRIVERE $\sigma_u^2 - \sigma_u(\sigma_2+\sigma_3) + \sigma_2\sigma_3$ COME LO SVILUPPO DI 1 QUADRATO DI UN BINOMIO DEL TIPO $(a-b)^2$:

1B

$$\sigma_u^2 - 2\sigma_u\frac{(\sigma_2+\sigma_3)}{2} + \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

[AGGIUNGIAMO $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2$ E LEVIAMO $\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$]

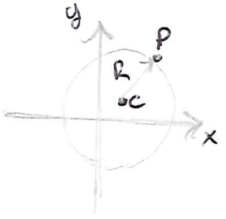
$$\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \cancel{\frac{\sigma_2^2}{4}} + \cancel{\frac{\sigma_3^2}{4}} + 2\frac{\sigma_2\sigma_3}{4} - \left[\cancel{\frac{\sigma_2^2}{4}} + \cancel{\frac{\sigma_3^2}{4}} - 2\frac{\sigma_2\sigma_3}{4}\right] = \frac{2}{4}\sigma_2\sigma_3 + \frac{2}{4}\sigma_2\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3$$

1C

ALLORA $\tau_u^2 + \boxed{\sigma_u^2 - 2\sigma_u\frac{(\sigma_2+\sigma_3)}{2} + \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2} - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 \geq 0 \rightsquigarrow \boxed{\tau_u^2 + \left(\sigma_u - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2}$

1D

QUESTA ESPRESSIONE HA UN SIGNIFICATO GEOMETRICO PRECISO: NEL PIANO x, y UN CERCHIO DI CENTRO $C = (x_c, y_c)$ E RAGGIO R HA EQUAZIONE: $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$

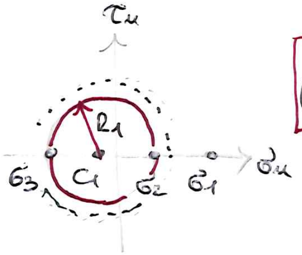


$C = (x_c, y_c)$

$P = (x, y)$

$R = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}$

SE RIPORTIAMO L'EQUAZIONE SU UN PIANO σ, τ
– PIANO DI MOHR –



$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_u = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2}$$

È LA CIRCONFERENZA DI CENTRO $C_1 = \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$

E RAGGIO $R_1 = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)$

C_1 = PUNTO MEDIO TRA σ_2 E σ_3 ; $\overline{\sigma_2\sigma_3}$ È IL DIAMETRO DEL CERCHIO

$\boxed{\alpha_1^2 \geq 0}$ È SODDISFATTA DA TUTTI I PUNTI CHE STANNO SULLA CIRCONFERENZA CON CENTRO C_1 E DI RAGGIO R_1 E AL DI FUORI

IN MANIERA ANALOGA SI PROCEDE CON $\alpha_2^2 \geq 0$ E $\alpha_3^2 \geq 0$

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1 D. – I CERCHI DI MOHR –

Ⅳ

1A

$$\boxed{\alpha_2^2 = \frac{\tau_u^2 + (\sigma_u-\sigma_3)(\sigma_u-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}}$$

$$\alpha_2^2 \geq 0 \to \frac{\geq 0}{\geq 0} \text{ o } \frac{\leq 0}{\leq 0} \to \frac{------}{\underset{\oplus}{(\sigma_2-\sigma_3)}\underset{\ominus}{(\sigma_2-\sigma_1)}} \to \frac{---}{\underset{\neq 0}{\leq 0}} \text{ ALLORA } \frac{\leq 0}{---} \qquad \tau_u^2+(\sigma_u-\sigma_3)(\sigma_u-\sigma_1) \leq 0$$

$\sigma_2 > \sigma_3$ $\quad \sigma_2 < \sigma_1$ $\quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

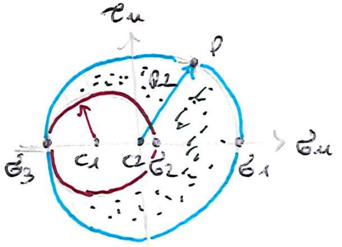
1B

N.B. PERMUTAZIONE DEGLI INDICI

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

SI OTTIENE:

$$\boxed{\tau_u^2 + \left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2}$$



1C

$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2}$$

È LA CIRCONFERENZA DI CENTRO

$C2 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0\right)$

E RAGGIO $R2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

C2 = PUNTO MEDIO TRA σ_1 E σ_3

$\overline{\sigma_1\sigma_3}$ = DIAMETRO

1D

$\boxed{\alpha_2^2 \geq 0}$ È SODDISFATTA DA TUTTI I PUNTI CHE STANNO SULLA CIRCONFERENZA DI CENTRO C2 E RAGGIO R2 E AL SUO INTERNO, MA ALL'ESTERNO DEL CERCHIO DI CENTRO C1 E RAGGIO R1

$$\boxed{\alpha_3^2 = \frac{\tau_u^2 + (\sigma_u-\sigma_1)(\sigma_u-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}}$$

$$\alpha_3^2 \geq 0 \to \frac{\geq 0}{\geq 0} \text{ o } \frac{\leq 0}{\leq 0} \to \frac{--------}{\underset{\ominus}{(\sigma_3-\sigma_1)}\underset{\ominus}{(\sigma_3-\sigma_2)}} \to \frac{---}{\underset{\neq 0}{\geq 0}} \text{ ALLORA } \frac{\geq 0}{} \qquad \tau_u^2+(\sigma_u-\sigma_1)(\sigma_u-\sigma_2) \geq 0$$

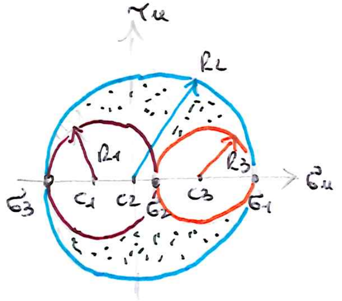
$\sigma_3 < \sigma_1$ $\quad \sigma_3 < \sigma_2$ $\quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

N.B. PERMUTAZIONE DEGLI INDICI

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

SI OTTIENE

$$\boxed{\tau_u^2 + \left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2}$$



$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2}$$

È LA CIRCONFERENZA DI CENTRO

$C_3 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)$

E RAGGIO $R_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

C_3 = PUNTO MEDIO TRA σ_1 E σ_2 ; $\overline{\sigma_1\sigma_2}$ = DIAMETRO

$\boxed{\alpha_3^2 \geq 0}$ È SODDISFATTA DA TUTTI I PUNTI CHE STANNO SULLA CIRCONFERENZA DI CENTRO C_3 E RAGGIO R_3 E AL DI FUORI, MA ALL'ESTERNO DEL CERCHIO $\overline{C}_1$ E ALL'INTERNO DEL CERCHIO $\overline{C}_2$

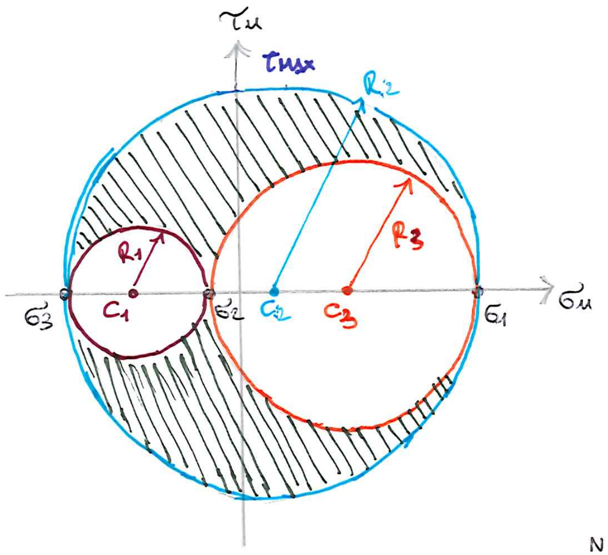
[N.B. $\overline{C}_1$ È IL CERCHIO DI RAGGIO R_1 E CENTRO C_1; $\overline{C}_2$ È IL CENTRO DI RAGGIO R_2 E CENTRO C_2]

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1D. – I CERCHI DI MOHR –

Ⓥ

ARBELO DI MOHR



CERCHIO 1 : $C_1 = \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$ $R_1 = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$

CERCHIO 2 : $C_2 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0\right)$ $R_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

CERCHIO 3 : $C_3 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)$ $R_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

▨ PUNTI DEL PIANO DI MOHR CHE SODDISFANO $\alpha_1^2 \geq 0, \alpha_2^2 \geq 0, \alpha_3^2 \geq 0$

OVVERO : $\boxed{\text{STATI TENSIONALI AMMISSIBILE}}$

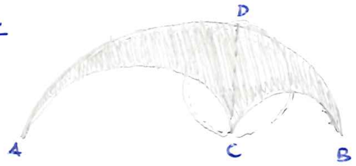
N.B. - • NON SONO POSSIBILI VALORI DI $\sigma_n > \sigma_1$ E $\sigma_n < \sigma_3$: $\boxed{\sigma_3 < \sigma_n < \sigma_1}$

• LO SFORZO TANGENZIALE τ_n NON PUÒ SUPERARE IL RAGGIO DELLA MASSIMA CIRCONFERENZA R_2:

$$\underline{R_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}} \Rightarrow \boxed{|\tau_n| \leq \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}$$

• $\boxed{\tau_n = 0}$ SOLO IN CORRISPONDENZA DI $\underline{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$

N.B.



ARBELO : FIGURA PIANA LIMITATA DA 3 CIRCONFERENZE, STUDIATA DA ARCHIMEDE. IL TERMINE DERIVA DAL GRECO, E INDICA UN "TRINCETTO DA CALZOLAIO"

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1D. - I CERCHI DI MOHR -

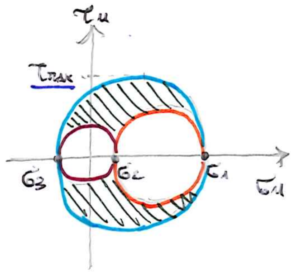
(VI)

NOTI I VALORI DELLE TENSIONI PRINCIPALI, σ_1, σ_2 E σ_3, È POSSIBILE TRACCIARE I CERCHI E L'ARBELO E DETERMINARE GLI STATI TENSIONALI AMMISSIBILI, LA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA E, IN GENERALE, LE TENSIONI RELATIVE A TUTTE LE INFINITE GIACITURE CHE SI POSSONO CONSIDERARE PER IL PUNTO IN OGGETTO.

1° CASO

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$



$\overline{C}_1$ E $\overline{C}_3$ SONO TANGENTI IN σ_2

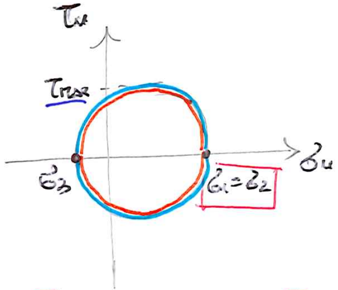
$\overline{C}_2$ È TANGENTE A C_1 IN σ_3 E A $\overline{C}_3$ IN σ_1

$|\tau_n| \leq R_2 \Rightarrow |\tau_n| \leq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)$

2° CASO

$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$

$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$



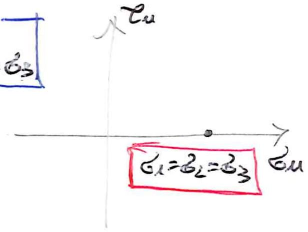
$\overline{C}_3$ CRESCE, MENTRE $\overline{C}_1$ DIMINUISCE FINCHÉ $\sigma_1 = \sigma_2 \rightarrow \overline{C}_1$ DEGENERA IN UN PUNTO E $\overline{C}_3$ DIVENTA UGUALE A $\overline{C}_2$

* GLI STATI AMMISSIBILI SONO SOLO I PUNTI DELLA CIRCONFERENZA $\overline{C}_2 = \overline{C}_3$ (E NON ALL'INTERNO)

$$\tau_{MAX} = R_2 = \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}$$

3° CASO

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$



I 3 CERCHI DEGENERANO IN UN PUNTO,

STATO IDROSTATICO

$\tau_n = 0$

ESEMPIO APPLICATIVO

TRACCIAMO I CERCHI DI MOHR E L'ARBELO PER LO STATO DI SFORZO UTILIZZATO NEL PRECEDENTE ESERCIZIO:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

RIFERIMENTO CARTESIANO

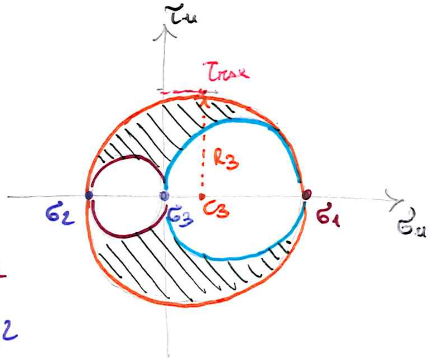
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 81{,}432 & 0 & 0 \\ 0 & -16{,}432 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

RIFERIMENTO PRINCIPALE

$\sigma_1 = 81{,}432$

$\sigma_2 = -16{,}432$

$\sigma_3 = 0$

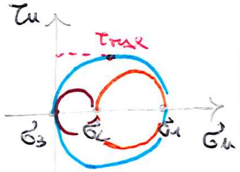


SE σ_1 E σ_2 HANNO SEGNI DIVERSI, ALLORA τ_{MAX} APPARTIENE AL CERCHIO C_3, DI DIAMETRO $\overline{\sigma_1\sigma_2}$, ED È NEL PIANO (x,y)

$$\boxed{\tau_{MAX} = R_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}}$$

N.B.

SE σ_1 E σ_2 HANNO LO STESSO SEGNO, ALLORA τ_{MAX} NON SI TROVA NEL PIANO (x,y), OVVERO NON APPARTIENE AL CERCHIO $\overline{C}_3$ $(\overline{\sigma_1\sigma_2})$ MA AL CERCHIO $\overline{C}_2$ $(\overline{\sigma_1\sigma_3})$



τ_{MAX} = RAGGIO DEL CERCHIO PIÙ GRANDE:

$$\tau_{max} = \max\left\{\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right|\right\}$$

1E. - I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI -

Ⓘ

IN MOLTI PROBLEMI STRUTTURALI LO STATO TENSIONALE GODE DI PARTICOLARI PROPRIETÁ CHE SEMPLIFICANO NOTEVOLMENTE LA TRATTAZIONE GENERALE; LO STATO TENSIONALE È TALE CHE IL VETTORE $\vec{t}_n$ AGENTE SU UNA QUALUNQUE GIACITURA PASSANTE PER IL PUNTO STA SEMPRE CONTENUTO IN UNO STESSO PIANO, IL PIANO DELLE TENSIONI. → STATI TENSIONALI PIANI

FACENDO RIFERIMENTO AL VETTORE TENSIONE AGENTE SULLE TRE GIACITURE PRINCIPALI, LA CONDIZIONE DI COMPLANARITÁ DI $\vec{t}_n$ PUÓ ESSERE SODDISFATTA SOLO SE UNA DELLE TRE TENSIONI PRINCIPALI È NULLA E IL PIANO DELLE TENSIONI È INDIVIDUATO DALLE ALTRE DUE, AD ESEMPIO $\boxed{\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0 \ \text{E} \ \sigma_3 = 0}$

ALLORA SU UNA QUALUNQUE GIACITURA $\vec{n} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ SI HA $t_{n1} = \sigma_1 \alpha_1$, $t_{n2} = \sigma_2 \alpha_2$ E $t_{n3} = 0$, PERTANTO $\vec{t}_n$ NON PUÓ CHE ESSERE CONTENUTO NEL PIANO (1,2)

PER RICONOSCERE SE UNO STATO TENSIONALE È PIANO È SUFFICIENTE DEFINIRE LE CONDIZIONI SOTTO LE QUALI UNA DI ESSE È NULLA. RICORDANDO CHE I VALORI DELLE TENSIONI PRINCIPALI SI DETERMINANO CON L'ANNULLAMENTO DEL DETERMINANTE $\det(\underline{\sigma} - \sigma_n \underline{I}) = 0$, LA CONDIZIONE DI NULLITÀ DI UNA DI ESSE È CERTAMENTE VERIFICATA SE SI ANNULLA IL DETERMINANTE PONENDO $\sigma_n = 0$ ALLORA LO STATO TENSIONALE É PIANO SE $\boxed{\det \underline{\sigma} = 0}$, CHE PERALTRO CORRISPONDE A $\boxed{I_3 = 0}$

ASSUMENDO COME PIANO DELLE TENSIONI IL PIANO (x,y), ALLORA z DEVE ESSERE DIREZIONE PRINCIPALE CON RELATIVA COMPONENTE PRINCIPALE NULLA $\underset{[\sigma_3 = 0]}{\uparrow}$: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ E LO STATO TENSIONALE E DEFINITO DALLE TRE COMPONENTI NON NULLE $\boxed{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}}$

LA RICERCA DELLE COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE RICHIEDE CHE

$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

ESCLUDENDO LA OVVIA RADICE $\sigma_n = \sigma_3 = 0$

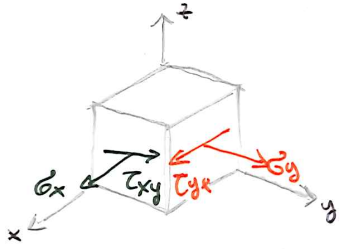
$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) \end{bmatrix} = 0$$

CHE SVILUPPATA FORNISCE L'EQUAZIONE: $\boxed{\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xz}^2 = 0}$ LE CUI RADICI $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} +/- \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ SONO LE COMPONENTI PRINCIPALI DI TENSIONE σ_1 E σ_2

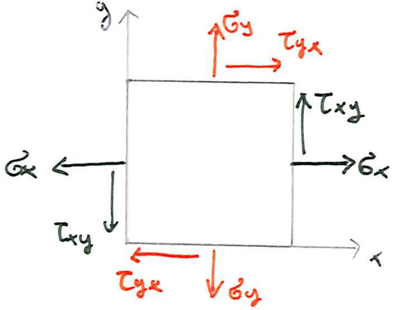
* LO STUDIO DELLO STATO PIANO DI TENSIONE PUÒ ESSERE CONDOTTO IN MANIERA MOLTO VANTAGGIOSA PER VIA GRAFICA ATTRAVERSO L'APPLICAZIONE DEI CERCHI DI MOHR

ANALISI DELLA TENSIONE o DELLO STATO DI SFORZO

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{array}{ccc} \vec{t}_x & \vec{t}_y & \vec{t}_z \\ \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$



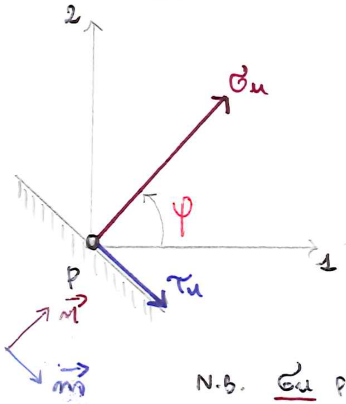
1E. – I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI –



$$\sigma_3 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} +/- \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

CONSIDERIAMO UNA GIACITURA $\vec{n}$ APPARTENENTE AL PIANO DELLE TENSIONI (1,2), INCLINATA RISPETTO ALL'ASSE 1 DI UN ANGOLO φ E SIANO σ_n E τ_n LE COMPONENTI NORMALI E TANGENZIALI SU TALE GIACITURA (τ_n INDIVIDUATA DA $\vec{m}$, ⊥ A $\vec{n}$)



$$\vec{n} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \boxed{\{\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0\}}$$

$$\alpha_1 = \cos(1,\hat{\vec{n}}) = \cos\varphi$$

$$\alpha_2 = \cos(2,\hat{\vec{n}}) = \operatorname{sen}\varphi$$

$$\alpha_3 = \cos(3,\hat{\vec{n}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

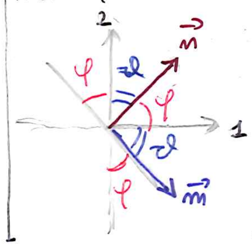
$$\vec{m} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \boxed{\{\operatorname{sen}\varphi, -\cos\varphi, 0\}}$$

$$\beta_1 = \cos(1,\hat{\vec{m}}) = \operatorname{sen}\varphi$$

$$\beta_2 = \cos(2,\hat{\vec{m}}) = -\cos\varphi$$

$$\beta_3 = \cos(3,\hat{\vec{m}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

N.B. $\varphi + \vartheta = \pi/2$



N.B. σ_n POSITIVA QUANDO CONCORDE CON $\vec{n}$

τ_n POSITIVA QUANDO TENDE A "FAR RUOTARE" IN SENSO ORARIO L'ELEMENTINO MATERIALE +↻

$$\sigma_n = \underline{\sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2} = \boxed{\sigma_1\cos^2\varphi + \sigma_2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$\tau_n = \underline{\sigma_1\alpha_1\beta_1 + \sigma_2\alpha_2\beta_2 + \sigma_3\alpha_3\beta_3} = \sigma_1\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \sigma_2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \boxed{(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}$$

RICORDANDO CHE: $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$, $\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi$, $\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi$

$$\sigma_n = \sigma_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) + \sigma_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) = \boxed{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cdot\cos 2\varphi}$$

E

$$\tau_n = (\sigma_1-\sigma_2)\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi = \boxed{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{sen}2\varphi}$$

1E - I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI -

RISCRIVIAMO σ_u :

$$\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\cos 2\varphi$$

METTIAMO ENTRAMBE AL QUADRATO:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\cos^2 2\varphi$$

$$\tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi$$

LE SOMMIAMO:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\cos^2 2\varphi + \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi .$$

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\left(\cos^2 2\varphi + \operatorname{sen}^2 2\varphi\right) \rightarrow \text{NB} \quad \cos^2 2\varphi + \operatorname{sen}^2 2\varphi = 1$$

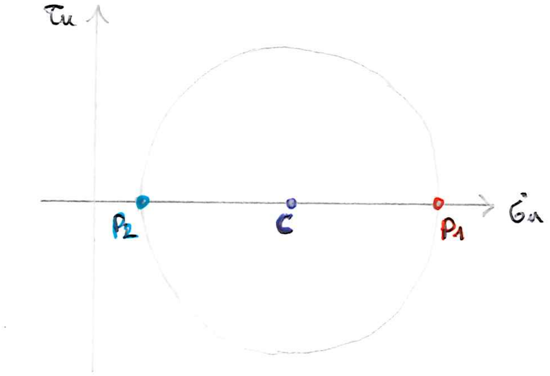
OTTENIAMO:

$$\boxed{\left(\sigma_u - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_u^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2} \quad [\circ]$$

N.B. $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$ È L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI CENTRO $C=(x_c, y_c)$

ALLORA LA $[\circ]$ RAPPRESENTA LA CIRCONFERENZA DI CENTRO $\boxed{C = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)}$ E RAGGIO $\boxed{R = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)}$ NEL PIANO (σ_u, τ_u) [PIANO DI MOHR]

I PUNTI DEL CERCHIO RAPPRESENTANO TUTTI I POSSIBILI STATI TENSIONALI SULLE GIACITURE AVENTI NORMALE CONTENUTA NEL PIANO DELLE TENSIONI (σ_1, σ_2)



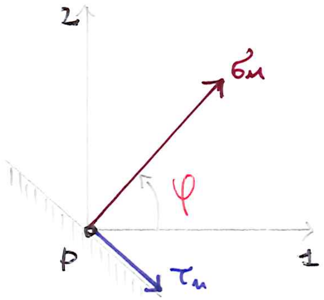
IN PARTICOLARE I PUNTI P_1 E P_2 RAPPRESENTANO LO STATO TENSIONALE SULLE GIACITURE PRINCIPALI DI NORMALE 1 E 2

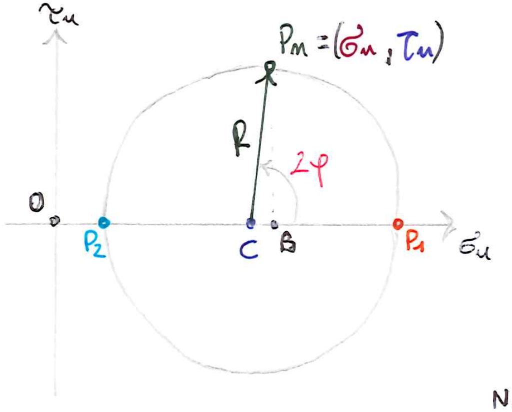
$\boxed{P_1 = (\sigma_1, 0)}$ $\boxed{P_2 = (\sigma_2, 0)}$ $C = (\sigma_c, 0)$ CON $\sigma_c = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$

$$R = \overline{P_1C} = \sqrt{\left[\sigma_1 - \underbrace{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}_{\sigma_c}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sigma_1-\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)$$

1 E. - I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI -

PER OTTENERE IL PUNTO $\boxed{P_M = (\sigma_u, \tau_u)}$ CORRISPONDENTE ALLA GIACITURA LA CUI NORMALE $\vec{M}$ FORMA L'ANGOLO φ CON L'ASSE 1 È SUFFICIENTE COSTRUIRE IL RAGGIO $\overline{CP_M}$ RUOTATO RISPETTO AL RAGGIO $\overline{CP_1}$, NELLO STESSO SENSO IN CUI $\vec{M}$ È RUOTATA RISPETTO ALL'ASSE 1, DELL'ANGOLO DOPPIO, 2φ





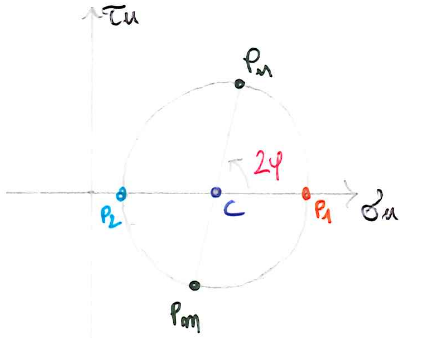
$$\sigma_u = \overline{OC} + \overline{CB} = \overset{\sigma_c}{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}} + \overset{R}{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}} \cos 2\varphi = \overline{OC} + R\cos 2\varphi$$

$$\tau_u = \overline{BP_M} = R \operatorname{sen} 2\varphi = \overset{R}{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}} \operatorname{sen} 2\varphi$$

* NEL PIANO DI MOHR GLI ANGOLI SONO DOPPI RISPETTO AL PIANO FISICO

N.B. SE AD OGNI NORMALE $\vec{M}$ NEL PIANO DELLE TENSIONI SI ASSOCIA UN RAGGIO $\overrightarrow{CP_M}$ NEL PIANO DI MOHR, LO SFALSAMENTO ANGOLARE TRA DUE RAGGI $\overline{CP_M}$ E $\overline{CP_m}$ È IL DOPPIO DELLO SFALSAMENTO ANGOLARE DELLE CORRISPONDENTI $\vec{M}$ E $\vec{m}$ NEL PIANO DELLE TENSIONI

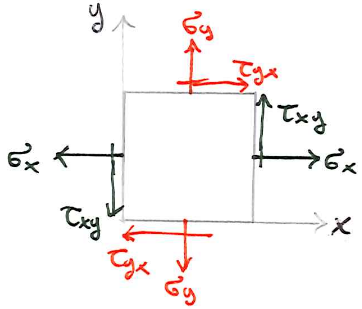
SE $\vec{M}$ E $\vec{m}$ SONO ORTOGONALI, I CORRISPONDENTI RAGGI $\overline{CP_M}$ E $\overline{CP_m}$ DEVONO FORMARE UN ANGOLO DI 180°, SONO PERTANTO DISPOSTI SU UNO STESSO DIAMETRO



1E. - I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI -

PRATICAMENTE, SE CONOSCIAMO LE TENSIONI SU DUE FACCE PERPENDICOLARI POSSIAMO COSTRUIRE DIRETTAMENTE IL CERCHIO DI MOHR RIPORTANDO SUL PIANO DI MOHR (σ_u, τ_u) I PUNTI P_x E P_y CORRISPONDENTI ALLE GIACITURE DI NORMALE x E y

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

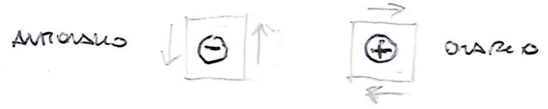


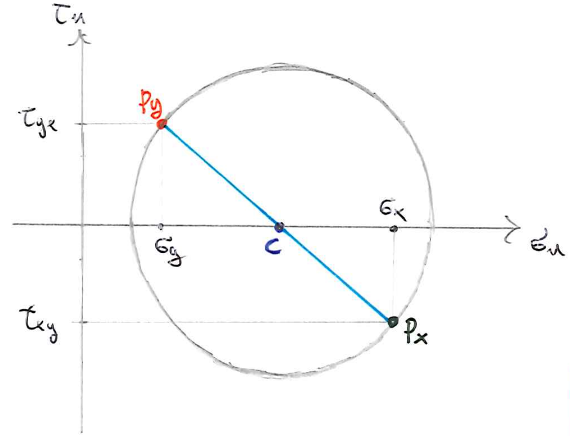
$$\boxed{P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy})}$$

$$\boxed{P_y = (\sigma_y, \tau_{yx})}$$

N.B. NELL'ELEMENTINO LE τ POSITIVE CONVERGONO SULLO SPIGOLO :

NEL CERCHIO DI MOHR LE τ SONO POSITIVE QUANDO FANNO RUOTARE L'ELEMENTINO IN SENSO ORARIO:





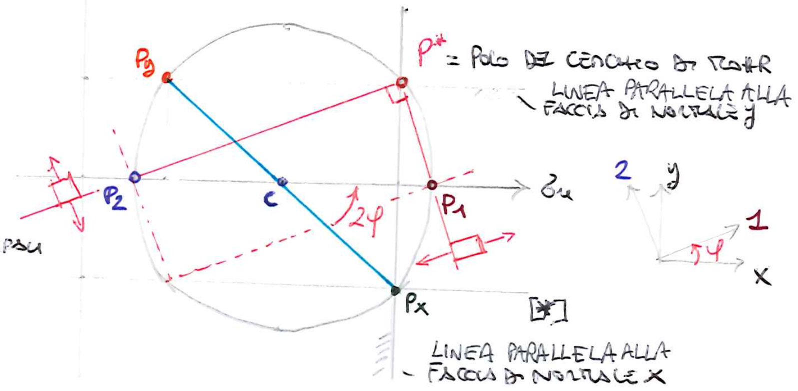
N.B. È LO STESSO CERCHIO DI PRIMA:

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

POSSIAMO INDIVIDUARE P1 E P2 DOVE ABBIAMO SOLO TENSIONI PRINCIPALI

$$\boxed{P_1 = \sigma_1, 0} \quad \boxed{P_2 = \sigma_2, 0}$$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} +/- \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$



N.B. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ STESSA DISTANZA DA σ_u MA SEGNI OPPOSTI τ_{xy} ⊖ E τ_{yx} ⊕

C GIACE SEMPRE SU σ_u

$$C = \left[\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right), \left(\frac{\tau_{xy}+(-\tau_{xy})}{2}\right)\right] \rightsquigarrow \boxed{C = \left[\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right), 0\right]}$$

$$D = \sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\tau_{yx}-(-\tau_{xy}))^2} = \sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$R = D/2 = \sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}{4}} = \boxed{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

N.B.

$$\cos 2\varphi = \frac{\sigma_x-\sigma_c}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}} \qquad \text{sen}\, 2\varphi = \frac{-\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\text{sen}\, 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \boxed{\frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_c}}$$

INCLINAZIONE DEL PIANO (1,2)

$$\text{MA } \sigma_c = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \rightarrow \tan 2\varphi = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

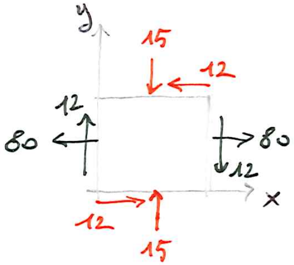
[*] GLI ANGOLI AL CENTRO $P_1\hat{C}P_2$ E $P_x\hat{C}P_y$ SONO DOPPI DEGLI ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA $P_1\hat{P^*}P_2$ E $P_x\hat{P^*}P_y$; LE DIREZIONI INDICATE DAL POLO SONO LE EFFETTIVE INCLINAZIONI DELLE FACCE

1E. - I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI -

ESEMPIO APPLICATIVO

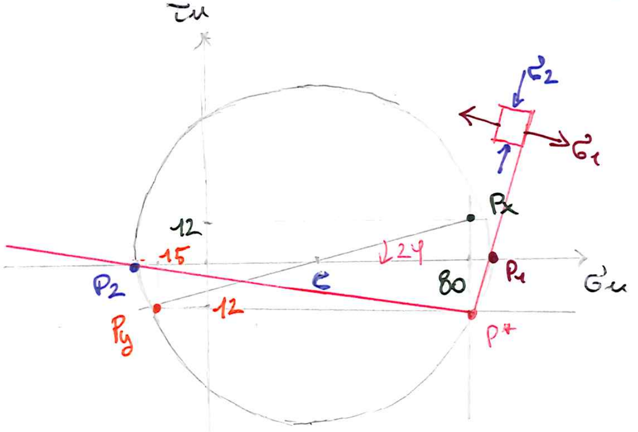
(MPa)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\boxed{P_x = (80, 12)}$ [τ_{xy} PRODUCE QUESTA VOLTA ROTAZIONE ↺]

$\boxed{P_y = (-15, -12)}$ [τ_{yx} PRODUCE QUESTA VOLTA ROTAZIONE ↻]



$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 - 15}{2} = 32,5$$

$$C = (32,5,\ 0)$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{xy} + \tau_{yx}}{2} = \frac{12 - 12}{2} = 0$$

$$R = \overline{P_x C} = \sqrt{\underbrace{(80 - 32,5)^2}_{(x - x_c)^2} + \underbrace{(12 - 0)^2}_{(y - y_c)^2}} = 48,992$$

$$\boxed{\sigma_1} = \sigma_c + R = 32,5 + 48,992 = \underline{81,492} \qquad \boxed{P_1 = (81,492,\ 0)}$$

$$\boxed{\sigma_2} = \sigma_c - R = 32,5 - 48,992 = \underline{-16,492} \qquad \boxed{P_2 = (-16,492\ 0)}$$

$\varphi = ?$

$$\tan 2\varphi = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \overset{[*]}{=} \frac{\overbrace{12}^{-\tau_{xy}}}{\underbrace{(80 - 32,50)}_{\sigma_x - \sigma_c}} = \frac{12}{47,5} = 0,2526$$

$$2\varphi = \operatorname{arcTan}(0,2526) = 0,2472 \text{ rad} \qquad 0,2472 \cdot \frac{180}{\pi} = 14,177°$$

$$\boxed{\varphi = 7,089°}$$

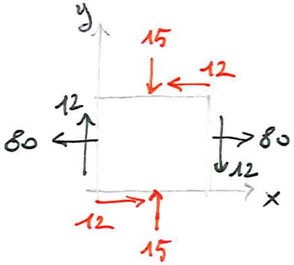
[*] SI OSSERVA CHE $\tan 2\varphi$ È ANCHE PARI A $\dfrac{-\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = -\dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_c}$.

IN QUANTO $\sigma_x - \sigma_c = \sigma_x - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{2\sigma_x - \sigma_x - \sigma_y}{2} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

ESEMPIO APPLICATIVO

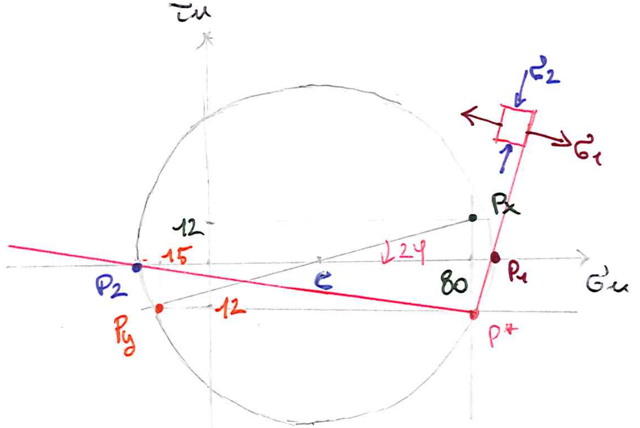
(MPa)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\boxed{P_x = (80, 12)}$ [τ_{xy} PRODUCE QUESTA VOLTA ROTAZIONE ↻]

$\boxed{P_y = (-15, -12)}$ [τ_{yx} PRODUCE QUESTA VOLTA ROTAZIONE ↺]



$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80-15}{2} = 32,5 \qquad C = (32,5,\ 0)$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{xy} + \tau_{yx}}{2} = \frac{12-12}{2} = 0$$

$$R = \overline{P_x C} = \sqrt{\underbrace{(80-32,5)^2}_{(x-x_c)^2} + \underbrace{(12-0)^2}_{(y-y_c)^2}} = 48,992$$

$$\sigma_1 = \sigma_c + R = 32,5 + 48,992 = \underline{81,492} \qquad \boxed{P_1 = (81,492,\ 0)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - R = 32,5 - 48,992 = \underline{-16,492} \qquad \boxed{P_2 = (-16,492\ 0)}$$

$\varphi = ?$

$$\tan 2\varphi = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\cos 2\varphi} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \overset{[*]}{=} \frac{\overbrace{12}^{-\tau_{xy}}}{\underbrace{(80-32,50)}_{\sigma_x - \sigma_c}} = \frac{12}{47,5} = 0,2526$$

$$2\varphi = \arctan(0,2526) = 0,2472 \text{ rad} \qquad 0,2472 \cdot \frac{180}{\pi} = 14,177°$$

$$\boxed{\varphi = 7,089°}$$

[*] SI OSSERVA CHE $\tan 2\varphi$ È ANCHE PARI A $\dfrac{-\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = -\dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_c}$.
IN QUANTO $\sigma_x - \sigma_c = \sigma_x - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{2\sigma_x - \sigma_x - \sigma_y}{2} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

1 E. – I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI –

UTILIZZANDO IL TENSORE DEL PRECEDENTE ESERCIZIO:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 80 & -12 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$\sigma_x \rightarrow \sigma_{u}$

$\tau_{xy}' \rightarrow \tau_{uw}$

$$\boxed{\sigma_x'} = \sigma_x \alpha_x^2 + \sigma_y \alpha_y^2 + 2\tau_{xy}\alpha_x\alpha_y = 80\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2(-12)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \underline{45{,}858 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\tau_{xy}'} = \sigma_x\alpha_x\beta_x + \sigma_y\alpha_y\beta_y + \tau_{xy}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) =$$

$$= 80\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - 15\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 12\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \underline{-47{,}136 \text{ MPa}}$$

N.B. $\sigma_y' \rightarrow \sigma_{w}$

$$\boxed{\sigma_y'} = \sigma_x\beta_x^2 + \sigma_y\beta_y^2 + 2\tau_{xy}\beta_x\beta_y = 80\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 15\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2(-12)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{19{,}142 \text{ MPa}}$$

$\tau_{yx}' \rightarrow \tau_{wu}$

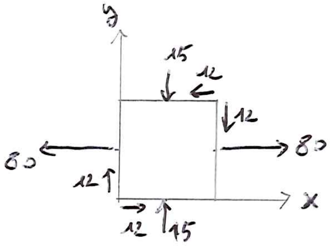
$$\boxed{\tau'_{xy}} = \sigma_x\beta_x\alpha_x + \sigma_y\beta_y\alpha_y + \tau_{xy}(\beta_x\alpha_y + \beta_y\alpha_x) =$$

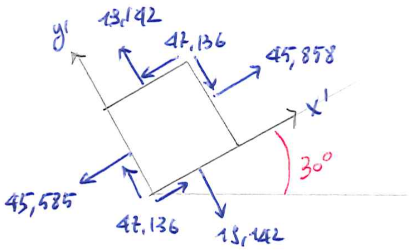
$$= 80\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 15\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 12\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \underline{-47{,}136 \text{ MPa}}$$

E INFATTI $\boxed{\tau'_{xy} = \tau'_{yx}}$ $(\tau_{uw} = \tau_{wu})$

QUINDI:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{x',y',z'} = \begin{bmatrix} 45{,}858 & -47{,}136 & 0 \\ -47{,}136 & 13{,}142 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$





N.B. :

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y = 80 - 15 = 65$

$I_1 = \sigma_x' + \sigma_y' = 45{,}858 + 13{,}142 = 65$

$I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y = 144 + 1200 = 1344$

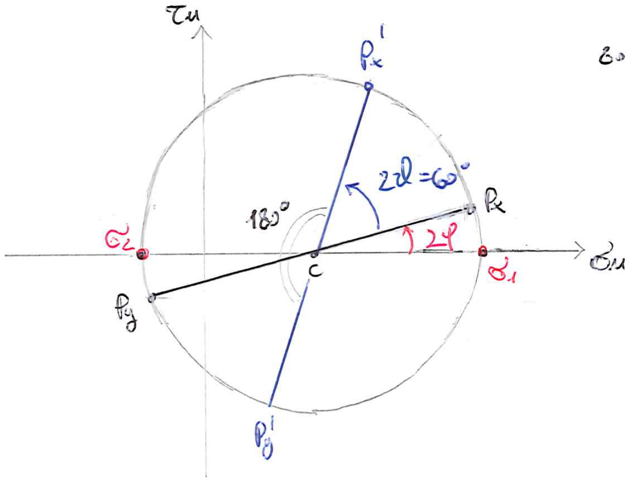
$I_2 = \tau'^2_{xy} - \sigma_x'\sigma_y' = 2221{,}802 - 877{,}814 = 1343{,}990 \cong 1344$

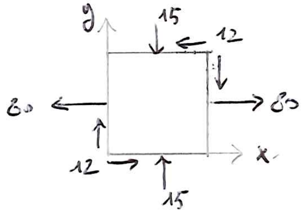
1A
1B
1C
1D
1E

1E.- I CERCHI DI MOHR PER STATI DI SFORZO PIANI -

IX

É POSSIBILE CALCOLARE LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z}$ SU UNA QUALUNQUE GIACITURA - AD ESEMPIO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO $x'y'z'$, IN CUI IL PIANO x',y' É RUOTATO DI 30° RISPETTO AL PIANO x,y E $z'=z$ - UTILIZZANDO I CERCHI DI MOHR





$P_x = (80; 12) \qquad P_y = (-15; -12)$

$\sigma_c = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 32,5$

$R = \overline{P_x C} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_c)^2 + \tau_{xy}^2} = 48,832$

$\sigma_1 = C + R = 81,432 \text{ MPa} \qquad \boxed{P_1 = (81,432; 0)}$

$\sigma_2 = C - R = -16,432 \text{ MPa} \qquad \boxed{P_2 = (-16,432; 0)}$

* PER RICAVARE I VALORI DELLO SFORZO SU x' E y' DOBBIAMO RUOTARE NEL PIANO DI MOHR DEL DOPPIO RISPETTO AL PIANO DELLE TENSIONI: $\vartheta = 30° \rightarrow 2\vartheta = 60°$

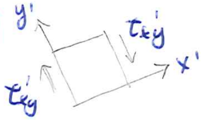
ALLORA L'ANGOLO TRA P_x' E L'ASSE σ_u SARÁ PARI A $2\vartheta + 2\varphi = 60° + 14,177° = 74,177°$

$P_x' = (\sigma_u, \tau_u)$

$\sigma_u = \sigma_c + R\cos(74,177°) = 32,5 + (48,832)(0,342) = \underline{45,858 \text{ MPa}}$

$\tau_u = R \operatorname{sen}(74,177°) = 48,832\,(0,962) = \underline{47,136 \text{ MPa}}$

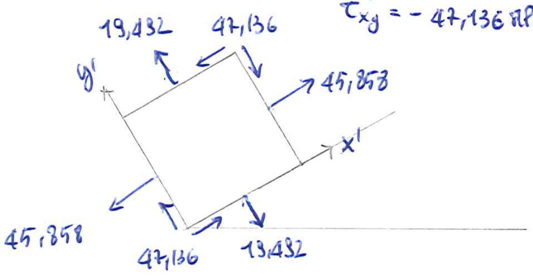
N.B.: τ_u POSITIVO → L'ELEMENTINO DEVE RUOTARE IN SENSO ORARIO: $\boxed{+\circlearrowright}$



QUINDI NEL PIANO DELLE TENSIONI τ_{xy}' É NEGATIVO, OVVERO IN VERSO OPPOSTO RISPETTO ALL'ASSE y'

$\sigma_x' = 45,858 \text{ MPa} \leftarrow \underline{P_x' = (45,858; 47,136)}$

$\tau_{xy}' = -47,136 \text{ MPa}$



L'ANGOLO TRA P_y' E L'ASSE σ_u SARÁ PARI A $2\varphi + 2\vartheta + 180° = 74,177° + 180° = 254,177°$

$P_y' = (\sigma_u, \tau_u)$

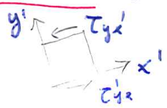
$\sigma_u = \sigma_c + R\cos(254,177°) = 32,5 + (48,832)(-0,273) = \underline{19,142}$

$\tau_u = R \operatorname{sen}(254,177°) = 48,982(-0,962) = \underline{-47,136 \text{ MPa}}$

NB: τ_u NEGATIVO → L'ELEMENTINO DEVE RUOTARE IN SENSO ANTIORARIO:

$\sigma_y' = +19,432 \text{ MPa} \leftarrow P_y' = (+19,432; -47,136) \qquad \boxed{-\circlearrowleft}$

$\tau_{yx}' = -47,136 \text{ MPa}$



QUINDI NEL PIANO DELLE TENSIONI τ_{yx}' É NEGATIVO, OVVERO OPPOSTO RISPETTO ALL'ASSE x'

ANALISI DELLA TENSIONE O DELLO STATO DI SFORZO

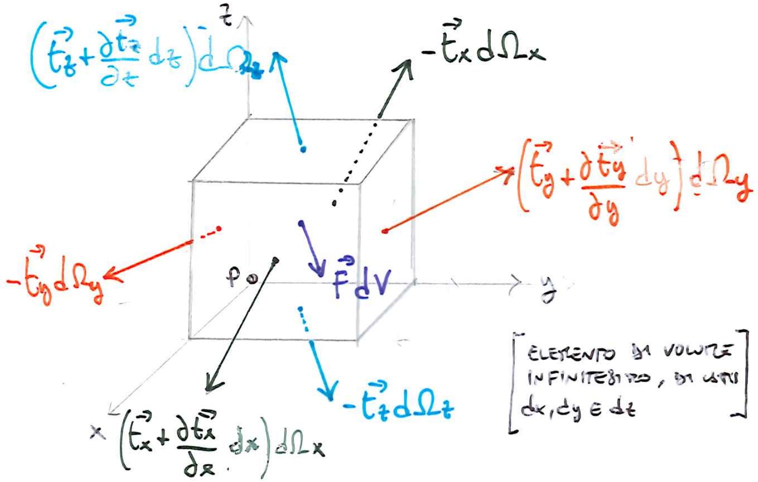
1F. – LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO – (I)

ABBIAMO DEFINITO LE PROPRIETÀ GENERALI DELLO STATO DI TENSIONE IN UN PUNTO, ED ESSO RISULTA DEFINITO NOTE LE 6 COMPONENTI DEL TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$, OVVERO $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ E τ_{yz}.

COME VARIA LO STATO DI SFORZO QUANDO PASSIAMO DA UN PUNTO AD UN ALTRO?

PER DETERMINARE LO STATO DI TENSIONE IN UN CORPO, OVVERO CONOSCERE $\underline{\underline{\sigma}}$ IN OGNI PUNTO DEL CORPO, BISOGNA DEFINIRE LE FUNZIONI DELLE 6 COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$, CHE VARIANO IN TUTTO IL CORPO (RICORDANDO CHE LE TENSIONI TANGENZIALI SONO A DUE A DUE RECIPROCHE)

$$\sigma_x = \sigma_x(x,y,z)\ ;\ \sigma_y = \sigma_y(x,y,z)\ ;\ \sigma_z = \sigma_z(x,y,z)\ ;\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z)\ ;\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y,z)\ ;\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y,z)$$



[ELEMENTO DI VOLUME INFINITESIMO, DI LATI dx, dy e dz]

N.B. $d\Omega_x = dy dz\ ;\ d\Omega_y = dx dz\ ;\ d\Omega_z = dx dy\ ;\ dV = dx dy dz$

PASSANDO DALLA FACCIA CHE CONTIENE P A UNA FACCIA POSTA A UNA DISTANZA INFINITESIMA dx, dy o dz SI HA UN INCREMENTO DELLA TENSIONE:

AD ESEMPIO $\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} dx$ È L'INCREMENTO DI $\vec{t}_x$ SULLA FACCIA DI NORMALE x POSTA A DISTANZA dx DALLA FACCIA CONTENENTE P

PER L'EQUILIBRIO: $\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$ E $\boxed{\vec{M}_{(\cdot)} = \vec{0}}$

$$\vec{R} = \vec{0} \iff \cancel{-\vec{t}_x dydz + \vec{t}_x dydz} + \frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} dxdydz \cancel{- \vec{t}_y dxdz + \vec{t}_y dxdz} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} dydxdz \cancel{- \vec{t}_z dxdy + \vec{t}_z dxdy} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} dzdxdy + \vec{F} dxdydz = \vec{0}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} + \vec{F}\right) dxdydz = \vec{0}$$

DEVE VALERE IN OGNI PUNTO DEL CORPO, QUINDI PER OGNI dV, CON dV ≠ 0

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0}} \iff \boxed{\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} + \vec{F} = \vec{0}}$$

RESTA SOLO IL CONTRIBUTO DI VARIAZIONE DOVUTO AL PASSAGGIO DA UNA FACCIA ALL'ALTRA

[N.B. $\frac{\partial}{\partial i}$ È UNA DERIVATA PARZIALE: VARIAZIONE SOLO IN DIREZIONE i, CON $i = x,y,z$]

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO CHE CONTIENE I VETTORI TENSIONE $\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z$ E LA FORZA DI VOLUME $\vec{F}$

POSSIAMO SCRIVERLA PER COMPONENTI, RICORDANDO CHE $\vec{t}_x, \vec{t}_y$ E $\vec{t}_z$ SONO LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{\sigma}}$ E $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

ANALISI DELLA TENSIONE o DELLO STATO DI SFORZO

1F. - LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO -

Ⓘ

1A

$$\boxed{\vec{R}=\vec{0}} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x}+\frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y}+\frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z}+\vec{F}=\vec{0}} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \begin{array}{ccccccc} \vec{t}_x & & \vec{t}_y & & \vec{t}_z & & \vec{F} \end{array} \\ \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}+F_z=0 \end{cases} \end{array}$$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

1B

$\vec{F}$ È NOTA, MA ABBIAMO 3 EQUAZIONI E 9 INCOGNITE

CON LE SOLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO NON POSSIAMO DETERMINARE IL PROBLEMA (N° INCOGNITE > N° EQUAZIONI)

IL CONTINUO È IPERSTATICO

NOTANDO CHE $\vec{t}_x$ È SEMPRE DERIVATO RISPETTO A x, $\vec{t}_y$ RISPETTO A y E $\vec{t}_z$ RISPETTO A z, POSSIAMO SCRIVERE L'EQUILIBRIO IN MANIERA COMPATTA:

1C

t_{ij} = COMPONENTE DI $\vec{t}_i$ IN DIREZIONE $\vec{j}$ $\qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0 \qquad j=1,2,3$ CON $i,j=1\rightarrow x;\ i,j=2\rightarrow y;\ i,j=3\rightarrow z$

SE SI AMMETTE LA SOMMA SOTTOINTESA SUGLI INDICI RIPETUTI POSSIAMO SCRIVERE L'EQUILIBRIO NELLA FORMA COMPATTA $\boxed{\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0}$ $i,j=1,2,3$

1D

ANCHE $\boxed{\vec{M}(\cdot)=\vec{0}}$ PUÒ ESSERE ESPRESSA IN FUNZIONE DELLE COMPONENTI RISPETTO A x,y,z, COME ABBIAMO VISTO NELLA PRIMA LEZIONE E POI PER LA RELAZIONE DI CAUCHY. SI DIMOSTRA CHE:

$$\boxed{\vec{M}=\vec{0}} \Longleftrightarrow \begin{cases} M(\cdot)_x=0 \\ M(\cdot)_y=0 \\ M(\cdot)_z=0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} \tau_{yz}=\tau_{zy} \\ \tau_{xz}=\tau_{zx} \\ \tau_{xy}=\tau_{yx} \end{array}}$$

RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI

SISTEMA DI 3 EQUAZIONI ALGEBRICHE

1E

ANCHE QUESTE EQUAZIONI POSSONO ESSERE ESPRESSE IN FORMA COMPATTA: $\boxed{\tau_{ij}=\tau_{ji}}$

QUINDI, L'EQUILIBRIO RICHIEDE CHE:

$$\vec{R}=\vec{0} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0} \quad \text{EQUILIBRIO INTERNO}$$

$$\vec{M}(\cdot)=\vec{0} \Longleftrightarrow \boxed{\tau_{ij}=\tau_{ji}} \quad \text{CONDIZIONI DI RECIPROCITÀ}$$

6 INCOGNITE

3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

3 EQUAZIONI ALGEBRICHE

1F

LA DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO RICHIEDE DI CONOSCERE IN OGNI PUNTO LE FUNZIONI INCOGNITE:

$\sigma_x=\sigma_x(x,y,z) \quad \tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y,z) \leftrightarrow \tau_{yx}=\tau_{yx}(x,y,z)$

$\sigma_y=\sigma_y(x,y,z) \quad \tau_{xz}=\tau_{xz}(x,y,z) \leftrightarrow \tau_{zx}=\tau_{zx}(x,y,z)$

$\sigma_z=\sigma_z(x,y,z) \quad \tau_{yz}=\tau_{yz}(x,y,z) \leftrightarrow \tau_{zy}=\tau_{zy}(x,y,z)$

CHE DEVONO SODDISFARE NEI PUNTI INTERNI:

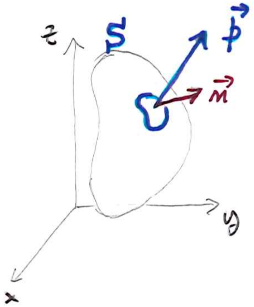
$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0$$

E RISPETTARE LA CONDIZIONE $\tau_{ij}=\tau_{ji}$

1F. - LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO -

1A
1B
1C
1D
1E
1F

SULLA SUPERFICIE DI CONTORNO S DEL CORPO DEVE ESSERE SODDISFATTA LA RELAZIONE DI CAUCHY: $\vec{t}_x \alpha_x + \vec{t}_y \alpha_y + \vec{t}_z \alpha_z = \vec{t}_n$



NEI PUNTI ESTERNI DEL CORPO, SE $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ È IL VETTORE RAPPRESENTANTE LA FORZA DI SUPERFICIE (PER UNITÀ DI AREA) ESTERNA, ALLORA IL VETTORE $\vec{t}_n$ SULLA GIACITURA DI NORMALE $\vec{n}$ APPARTENENTE A S COINCIDE PROPRIO CON $\vec{p}$:

$$t_{nx} = p_x \qquad t_{ny} = p_y \qquad t_{nz} = p_z$$

ALLORA PER LA RELAZIONE DI CAUCHY IN OGNI PUNTO DELLA SUPERFICIE S CHE CONTORNA IL CORPO DEVONO ESSERE SODDISFATTE LE 3 RELAZIONI:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{t}_x & & \vec{t}_y & & \vec{t}_z & & \vec{p} \\ \sigma_x \alpha_x & + & \tau_{yx} \alpha_y & + & \tau_{zx} \alpha_z & = & p_x \\ \tau_{xy} \alpha_x & + & \sigma_y \alpha_y & + & \tau_{zy} \alpha_z & = & p_y \\ \tau_{xz} \alpha_x & + & \tau_{yz} \alpha_y & + & \sigma_z \alpha_z & = & p_z \end{array}\right.$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AL CONTORNO

(EQUILIBRIO ESTERNO)

DOVE $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ SONO I COSENI DIRETTORI DELLA NORMALE ESTERNA $\vec{n}$ DEL GENERICO PUNTO DI S

IN FORMA COMPATTA: $\boxed{t_{ij} n_i = p_i}$ $\quad i = 1,2,3$

N.B. LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO INTERNO ED EQUILIBRIO ESTERNO SONO CONDIZIONI NECESSARIE MA NON SUFFICIENTI PER LA DEFINIZIONE DELLO STATO TENSIONALE IN UN CORPO DI CUI SIANO ASSEGNATE LE FORZE SUPERFICIALI $\vec{p}$ E DI MASSA $\vec{F}$ CONTINUO IPERSTATICO

LE ULTERIORI CONDIZIONI NON POSSONO CHE TRARSI METTENDO IN GIOCO LE DEFORMAZIONI CHE IL CORPO SUBISCE PER EFFETTO DELLE TENSIONI

CONTINUO DEFORMABILE