

**CAP.15 – STUDIO DEI SISTEMI DINAMICI NON LINEARI A N GDL****15.1 INTRODUZIONE**

Nel cap.7 sono state esaminate le tecniche d'integrazione diretta delle equazioni del moto dei sistemi ad un solo grado di libertà. Qui di seguito verranno esaminati gli stessi algoritmi quando sono applicati ai sistemi modellati con N gradi di libertà.

Nei metodi d'integrazione diretta le derivate degli spostamenti nodali  $\{\dot{s}(t)\}$  e  $\{\ddot{s}(t)\}$  che compaiono nell'equazione dell'equilibrio dinamico:

$$[M]\{\ddot{s}(t)\} + [C]\{\dot{s}(t)\} + [K]\{s(t)\} = \{F^{est}(t)\} \quad (15.1)$$

vengono sostituite con dei valori approssimati calcolati con il metodo delle differenze finite. La procedura consiste nello scrivere l'equazione del moto in un preciso istante di tempo:

$$[M]\{\ddot{s}\}_n + [C]\{\dot{s}\}_n + [K]\{s\}_n = \{F^{est}\}_n \quad (15.2a)$$

dove l'indice  $n$  indica il tempo  $n\Delta t$  e  $\Delta t$  è la dimensione dell'incremento o passo temporale. L'assenza dei pedici alla base delle matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  implica che il problema sia lineare. Per i problemi che comportano la risposta non lineare del materiale,  $[K]$  è funzione dello spostamento e quindi anche del tempo. In tal caso si può scrivere:

$$[M]\{\ddot{s}\}_n + [C]\{\dot{s}\}_n + \{F^{int}\}_n = \{F^{est}\}_n \quad (15.2b)$$

$\{F^{int}\}_n$  è la risposta del materiale al tempo  $n\Delta t$ . Nei problemi non lineari  $\{F^{int}\}_n$  è funzione non lineare di  $\{s\}_n$  e talvolta anche delle sue derivate rispetto al tempo; nei problemi lineari  $\{F^{int}\}_n = [K]\{s\}_n$ . Benché esistano dei problemi nei quali le matrici  $[M]$  e  $[C]$  abbiano un comportamento non lineare, nell'eq.(15.2b) si è ipotizzato che non dipendano dal tempo.

In quanto segue si ipotizzerà che la matrice di massa  $[M]$  sia definita positiva e che la matrice  $[K]$  sia definita semipositiva, cioè possa ammettere moti rigidi.

**15.2 - Metodi diretti espliciti**

Il *metodo delle differenze centrali* è caratteristico dei metodi espliciti. Con esso la velocità e l'accelerazione sono approssimati con le seguenti formule:

$$\{\dot{s}\}_n = \frac{\{s\}_{n+1} - \{s\}_{n-1}}{2\Delta t} \quad (15.3)$$

$$\{\ddot{s}\}_n = \frac{\{s\}_{n+1} - 2\{s\}_n + \{s\}_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (15.4)$$

Le equazioni precedenti si ottengono sviluppando la funzione spostamento in serie di Taylor, prima in avanti e poi indietro:

$$\{s\}_{n+1} = \{s\}_n + \{\dot{s}\}_n \Delta t + \frac{\{\ddot{s}\}_n}{2} (\Delta t)^2 + \frac{\{\ddot{\ddot{s}}\}_n}{6} (\Delta t)^3 + \dots \quad (15.5a)$$

$$\{s\}_{n-1} = \{s\}_n - \{\dot{s}\}_n \Delta t + \frac{\{\ddot{s}\}_n}{2} (\Delta t)^2 - \frac{\{\ddot{\ddot{s}}\}_n}{6} (\Delta t)^3 + \dots \quad (15.5b)$$

Le eq. (15.3) e (15.4) si ottengono sottraendo e sommando le due espressioni precedenti e trascurando i termini di ordine superiore. Di conseguenza l'approssimazione alle differenze centrali comporta un errore proporzionale a  $(\Delta t)^2$  il che implica che dimezzando il passo d'integrazione l'errore si riduce ad un quarto.

Lo spostamento al tempo  $n\Delta t$  si ottiene sostituendo le eq.(15.3) e (15.4) nell'eq.(15.2b):

$$\left[ \frac{[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} \right] \{s\}_{n+1} = \{F^{est}\}_n - [K]\{s\}_n + \frac{1}{(\Delta t)^2} [M](2\{s\}_n - \{s\}_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t} [C]\{s\}_{n-1} \quad (15.6)$$



Calcolato lo spostamento al tempo  $(n + 1)\Delta t$ , è possibile calcolare la velocità e l'accelerazione al tempo  $n\Delta t$  utilizzando le eq.(15.3) e (15.4).

### OSSERVAZIONI

- 1) L'eq.(15.6) è un sistema di equazioni lineari. Se le matrici  $[C]$  ed  $[M]$  sono diagonali allora le equazioni sono disaccoppiate e  $\{s\}_{n+1}$  si calcola senza la necessità di risolvere un sistema.
- 2) Anche nel caso di problemi lineari, invece di assemblare la matrice di rigidezza globale ed eseguire il prodotto  $[K]\{s\}_n$ , ad ogni passo  $n$  si preferisce calcolare il vettore delle forze interne  $\{F^{int}\}_n$  assemblando il contributo delle forze interne elementari:

$$\{f_e^{int}\}_n = \int_{Vol_e} [B]^T \{\sigma\} dVol \quad \text{dove} \quad \{\sigma\} = [E][B]\{s_e\}_n$$

dove  $\{s_e\}_n$  rappresenta gli spostamenti nodali dell'elemento calcolati al passo  $n$ -esimo. La matrice  $[E]$  rappresenta la legge costitutiva del materiale e potrebbe essere funzione degli spostamenti. Poiché questa procedura non richiede l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale  $[K]$ , i metodi espliciti consentono la soluzione di problemi di notevoli dimensioni.

- 3) Per inizializzare il metodo è necessario conoscere  $\{s\}_{-1}$ , il cui valore si può calcolare usando l'eq.(15.5b) a partire dalle condizioni iniziali  $\{s\}_0$  e  $\{\dot{s}\}_0$ , dopo avere eliminato i termini di ordine superiore a  $(\Delta t)^2$ :

$$\{s\}_{-1} = \{s\}_0 - \{\dot{s}\}_0 \Delta t + \frac{\{\ddot{s}\}_0}{2} (\Delta t)^2 \quad (15.7)$$

L'accelerazione  $\{\ddot{s}\}_0$  al tempo iniziale si ottiene utilizzando l'equazione del moto (15.2a):

$$\{\ddot{s}\}_0 = [M]^{-1} (\{F^{est}\}_0 - [K]\{s\}_0 - [C]\{\dot{s}\}_0) \quad (15.8)$$

- 4) Per calcolare  $\{s\}_{n+1}$  è necessario conoscere  $\{F^{int}\}_n$ . Se la legge costitutiva del materiale non è lineare e dipende dalla deformazione (ma non dalla velocità della deformazione), allora è possibile calcolare  $\{F^{int}\}_n$  in quanto al tempo  $n\Delta t$  lo spostamento  $\{s\}_n$  è noto (e quindi anche la deformazione).
- 5) L'eq.(15.6) è *condizionatamente stabile* e richiede che il passo  $\Delta t$  soddisfi l'espressione:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (15.9)$$

dove  $\omega_{max}$  è la frequenza naturale più grande del sistema. Se il passo temporale non soddisfa l'eq.(15.9) i risultati dei calcoli saranno instabili. In tal caso la risposta calcolata cresce illimitatamente, talvolta di molti ordini di grandezza ad ogni passo. La stabilità è un concetto diverso dalla precisione: i due aspetti verranno esaminati in seguito. Nei problemi non lineari individuare l'instabilità è molto più complicato.

- 6) Una caratteristica dell'eq.(15.6) è che la stabilità (cioè il massimo passo temporale consentito) non dipende dallo smorzamento. Perché il metodo delle differenze centrali sia computazionalmente competitivo rispetto ai metodi impliciti, le matrici  $[M]$  e  $[C]$  devono essere entrambe diagonali. Come si vedrà in seguito, l'integrazione esplicita è più precisa quando le matrici di massa sono diagonali; però non sempre è possibile modellizzare lo smorzamento con matrici  $[C]$  diagonali.

### IMPLEMENTAZIONE

Nella tabella 15.1 è riportato il diagramma a blocchi per il calcolo automatico della risposta di un sistema a  $N$  gradi di libertà con il metodo esplicito delle differenze centrali. La procedura consente di analizzare anche il comportamento di materiali non lineari, ma ipotizza che lo smorzamento sia costante. Il calcolo delle forze interne elementari  $\int_{Vol_e} [B]^T \{\sigma\} dVol$ , richiede che l'argomento dell'integrale venga valutato nello stesso numero di punti di Gauss utilizzato per calcolare le matrici di rigidezza elementari:  $\int_{Vol_e} [B]^T [\sigma] [B] dVol$ . Inoltre bisogna notare che le forze interne devono essere calcolate ad ogni passo temporale: questo rappresenta



il costo computazionale maggiore di un ciclo di calcolo. Di conseguenza per il calcolo delle forze interne diventa molto utile il metodo dell'integrazione ridotta. Per esempio se si utilizzano elementi quadrangolari bilineari a 4 nodi con un solo punto d'integrazione, l'analisi richiederà circa un quarto di tempo rispetto allo stesso calcolo eseguito utilizzando l'integrazione su  $2 \times 2$  punti di Gauss. Se per un'analisi in tre dimensioni si utilizzano elementi di volume a 8 nodi bilineari, l'integrazione ridotta riduce i tempi di calcolo di circa 8 volte. Comunque, quando si utilizza l'integrazione ridotta è necessario controllare con attenzione che la mesh non diventi instabile a causa della presenza di modi ad energia nulla.

- 1) Si sceglie il passo temporale  $\Delta t$  in modo che sia inferiore al passo critico  $\Delta t_{cr}$ .
- 2) Assembla la matrice di massa  $[M]$  e la matrice di smorzamento  $[C]$
- 3) Calcola la matrice di massa equivalente:  $[\hat{M}] = \frac{1}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C]$
- 4) Assembla il vettore delle forze interne:  $\{F^{int}\}_0$
- 5) Calcola l'accelerazione all'istante iniziale:  $\{\ddot{s}\}_0 = [\hat{M}]^{-1} (\{F^{est}\}_0 - \{F^{int}\}_0 - [C]\{\dot{s}\}_0)$
- 6) Calcola:  $\{s\}_{-1} = \{s\}_0 - \Delta t \{\dot{s}\}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{\ddot{s}\}_0$
- 7) Per ogni passo temporale  $n$ 
  - 7.1) Calcola la risposta del materiale:  $\{F^{int}\}_n$ 
    - 7.1.1) Loop su tutti gli elementi:  $e = 1, \dots, n_e$
    - 7.1.2) Calcola la forza interna elementare:  $\{f_e^{int}\}_n = \int_{Vol_e} [B]^T \{\sigma\} dVol$
    - 7.1.3) Assembla la forza elementare nella forza interna globale:  $\{F^{int}\}_n$
  - 7.2) Calcola la forza equivalente al tempo  $n\Delta t$ :
 
$$\{\hat{F}\}_n = \{F^{est}\}_n - \{F^{int}\}_n + \frac{1}{(\Delta t)^2} [M](2\{s\}_n - \{s\}_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t} [C]\{s\}_{n-1}$$
  - 7.3) Calcola lo spostamento al passo  $(n+1)\Delta t$ :  $\{s\}_{n+1} = [\hat{M}]^{-1} \{\hat{F}\}_n$

**Tabella 15.1** – Diagramma a blocchi del metodo esplicito delle differenze centrali.

#### STABILITÀ: STIMA DI $\omega_{max}$

Il metodo delle differenze centrali, come in generale i metodi espliciti, è condizionatamente stabile. Se  $\Delta t$  è troppo grande, il metodo non funziona. Se  $\Delta t$  è più piccolo del necessario, il costo computazionale diventa eccessivo. Per questo motivo è necessario stimare nel modo più preciso possibile il valore di  $\omega_{max}$ . Un limite superiore di  $\omega_{max}$  si può stimare calcolando la frequenza più alta di ogni singolo elemento privo di vincoli appartenente alla mesh del modello:

$$\det([k_e] - \omega_e^2 [m_e]) = 0$$

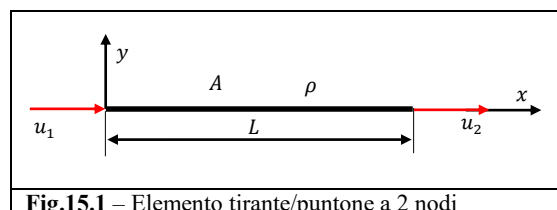
Indicando con  $\omega_{e,max}$  la frequenza più alta trovata su tutti gli elementi del modello, si può scrivere che:

$$\omega_{max} \leq \omega_{e,max}$$

Questa equazione afferma che la frequenza naturale massima  $\omega_{max}$  dell'intero modello è limitata dalla frequenza massima dei singoli elementi del modello considerati privi di vincoli. Talvolta questo valore si può calcolare molto facilmente.

Si consideri per esempio la trave prismatica orizzontale non vincolata, modellata con un solo elemento del tipo tirante/puntone a due nodi, come in fig.15.1. La densità del materiale sia  $\rho$ , il modulo di Young  $E$  e l'area della sezione trasversale sia  $A$ . Si calcolino frequenze proprie del sistema utilizzando:

- a) la matrice di massa "consistente";
- b) la matrice di massa diagonale



**Fig.15.1** – Elemento tirante/puntone a 2 nodi

Nel primo caso il problema agli autovalori diventa:



$$([k_e] - \omega^2 [m_e]) \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \left( \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Posto  $\lambda = \omega^2$  la soluzione non banale si ottiene azzerando il determinante:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{3} \lambda & -\frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{6} \lambda \\ -\frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{6} \lambda & \frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{3} \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Il polinomio caratteristico risulta:

$$\left( \frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{3} \lambda \right)^2 - \left( \frac{EA}{L} + \frac{\rho AL}{6} \lambda \right)^2 = 0$$

Sviluppando si ottiene:

$$\frac{1}{12} (\rho AL)^2 \lambda^2 - (E \rho A^2) \lambda = 0$$

Le due soluzioni risultano:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ \frac{12E}{\rho L^2} \end{cases}$$

da cui:  $\omega_1 = 0$  e  $\omega_2 = \frac{2\sqrt{3}}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Se si fosse utilizzata la matrice di massa diagonale, il risultato sarebbe stato:

$$([k_e] - \omega^2 [m_e]) \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \left( \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Posto  $\lambda = \omega^2$  la soluzione non banale si ottiene azzerando il determinante:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{2} \lambda & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{2} \lambda \end{bmatrix} = 0$$

In questo caso il polinomio caratteristico risulta:

$$\left( \frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{2} \lambda \right)^2 - \left( \frac{EA}{L} \right)^2 = 0$$

Sviluppando si ottiene:

$$\left( \frac{\rho AL}{2} \right)^2 \lambda^2 - (E \rho A^2) \lambda = 0$$

Le due soluzioni risultano:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ \frac{4E}{\rho L^2} \end{cases}$$

da cui:  $\omega_1 = 0$  e  $\omega_2 = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Quindi, posto  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , se la matrice di massa è diagonale, la frequenza più alta vale:  $\omega_{e,max} = \frac{2c}{L}$ .  $c$  è la velocità dell'onda all'interno di una trave che ha modulo di Young  $E$  e densità  $\rho$ , e rappresenta la velocità con la quale l'informazione viaggia all'interno del materiale. Per un acciaio per il quale  $E = 210 [GPa]$  e  $\rho = 8000 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ , risulta  $c \cong 5100 \left[ \frac{m}{s} \right]$ .



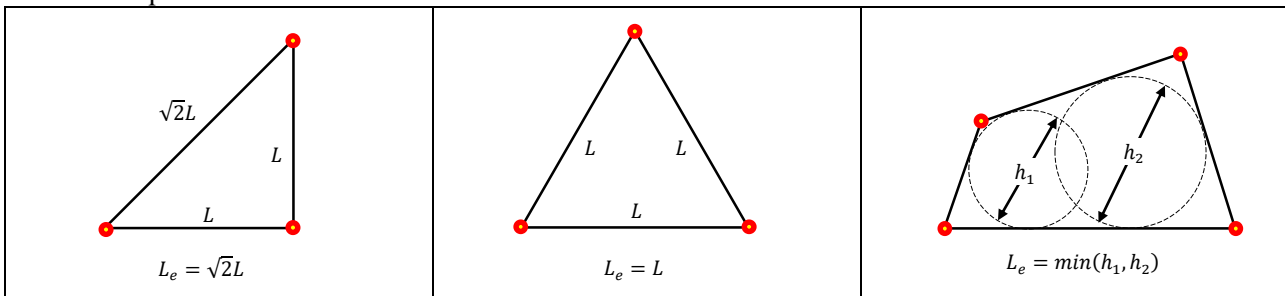
Di conseguenza se  $\omega_{e,max}$  rappresenta la frequenza elementare massima tra tutti gli elementi che formano il modello in esame, l'integrazione delle equazioni del moto con il metodo delle differenze centrali richiede che:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} = \frac{L}{c} \quad (15.10)$$

L'interpretazione fisica di questa condizione è che  $\Delta t$  deve essere abbastanza piccolo perché durante un passo temporale l'informazione non attraversi più di un elemento. Questa osservazione è corretta solo per gli elementi lineari modellati con matrici di massa diagonali. Se nell'analisi dell'elemento tirante/puntone si utilizza la matrice di massa consistente, la frequenza massima diventa:  $\omega_{e,max} = 2\sqrt{3}\frac{c}{L}$  e quindi il passo temporale massimo si riduce e diventa  $\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L}{c}$ . In generale le matrici di massa diagonali oltre a dar luogo a sistemi di equazioni disaccoppiate, a richiedere una minore mole di calcoli, a condurre nell'integrazione esplicita a risultati in genere più precisi che utilizzando le matrici di massa consistenti, consentono di utilizzare passi temporali più grandi.

Gli elementi di ordine più elevato forniscono, rispetto a quelli di ordine inferiore, frequenze più elevate, ed è per questo motivo che quando si utilizzano i metodi d'integrazione espliciti, non sono consigliabili. Per lo stesso motivo, quando si inseriscono i vincoli, è sconsigliato l'uso degli elementi di penalità che danno origine a frequenze  $\omega_{max}$  molto alte.

Per gli elementi piani o di volume, normalmente è difficile stimare analiticamente il valore di  $\omega_{max}$ . Invece è possibile usare l'eq.(15.10) sostituendo la lunghezza  $L$  con un *diametro elementare equivalente*  $L_e$ . La fig.15.2 mostra i diametri elementari equivalenti per alcuni elementi di ordine inferiore. Calcolare il diametro elementare equivalente per gli elementi di ordine elevato non è facile ed in letteratura sono stati proposti alcuni metodi che qui non verranno descritti.



**Fig.15.2** – Diametri equivalenti per alcuni elementi piani. I risultati degli elementi triangolari sono esatti. Il risultato dell'elemento a quattro nodi è esatto se l'elemento è rettangolare ( $h_1 = h_2$ ) altrimenti è conservativo. I cerchi inscritti devono toccare almeno tre lati dell'elemento.

### ULTERIORI OSSERVAZIONI

Quando per la soluzione di un problema dinamico ad un solo grado di libertà si utilizza un metodo esplicito, la precisione dipende essenzialmente dal passo temporale. Sembrerebbe quindi che il criterio per garantire la stabilità del procedimento sia solo d'interesse accademico, in quanto per ottenere la precisione desiderata  $\Delta t$  deve essere decisamente inferiore al suo valore critico. Comunque questa ipotesi non è corretta nel caso dei sistemi contenenti numerosi gradi di libertà (con oltre 20 equazioni) per i quali si osserva che si possono ottenere eccellenti risultati utilizzando un passo temporale appena inferiore al suo valore critico. La ragione è dovuta al fatto che il criterio di stabilità si basa sulla frequenza più elevata che la mesh utilizzata nella modellazione della struttura può riprodurre. E' vero che quando si sottopone il modello a frequenze prossime a  $\omega_{max}$ , gli spostamenti sono calcolati con una pessima precisione. Fortunatamente questi spostamenti contribuiscono molto poco alla risposta della struttura che dipende in gran parte dal contributo degli spostamenti a bassa frequenza che invece sono calcolati in modo preciso. In altre parole, non è necessario che i fenomeni relativi alle alte frequenze siano calcolati con precisione; ciò che invece è assolutamente necessario è che siano integrati in modo stabile. Ciò implica che quando si utilizza un metodo esplicito, un passo temporale  $\Delta t$  appena inferiore al suo valore critico è normalmente sufficiente a garantire una buona precisione. Ciò non ostante, il passo temporale critico può risultare molto piccolo: in tal caso per coprire l'intera durata del fenomeno in esame potrebbero essere necessari numerosi passi di calcolo.

**15.3 - Metodi diretti impliciti**

La maggior parte dei metodi impliciti sono *incondizionatamente stabili* e non impongono delle limitazioni nella scelta della dimensione del passo temporale a parte quella derivante dalla necessità di ottenere la precisione richiesta.

**15.3.1 Metodo dell'accelerazione media**

Si tratta di un metodo implicito *incondizionatamente stabile* in base al quale, durante l'intero passo temporale, si utilizza un'accelerazione pari alla media dei suoi valori agli estremi dell'intervallo:

$$\{\ddot{s}(t_0 + \tau)\} = \frac{\{\ddot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_{n+1}}{2} = \text{cost} \quad (15.11)$$

dove  $0 \leq \tau \leq \Delta t$  e  $t_0 = n\Delta t$ . La velocità durante l'intervallo si ottiene integrando l'eq.(15.11):

$$\{\dot{s}(t_0 + \tau)\} = \{\dot{s}\}_n + \frac{\{\ddot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_{n+1}}{2} \tau \quad (15.12)$$

Al tempo  $(n + 1)\Delta t$  la velocità vale:

$$\{\dot{s}\}_{n+1} = \{\dot{s}\}_n + \frac{\{\ddot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_{n+1}}{2} \Delta t \quad (15.13)$$

Lo spostamento durante l'intervallo si ottiene integrando l'eq.(15.12):

$$\{s(t_0 + \tau)\} = \{s\}_n + \{\dot{s}\}_n \tau + \frac{\{\ddot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_{n+1}}{4} \tau^2 \quad (15.14)$$

Al tempo  $(n + 1)\Delta t$  lo spostamento vale:

$$\{s\}_{n+1} = \{s\}_n + \{\dot{s}\}_n \Delta t + \frac{\{\ddot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_{n+1}}{4} (\Delta t)^2 \quad (15.15)$$

Dalla (15.13) si ricava:

$$\frac{\{\ddot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_{n+1}}{2} \Delta t = \{\dot{s}\}_{n+1} - \{\dot{s}\}_n \quad (15.16)$$

che sostituita nella (15.15) fornisce:

$$\{s\}_{n+1} = \{s\}_n + \frac{\{\dot{s}\}_{n+1} + \{\dot{s}\}_n}{2} \Delta t \quad (15.17)$$

Dalle eq.(15.15) e (15.17) è possibile calcolare  $\{\ddot{s}\}_{n+1}$  e  $\{\dot{s}\}_{n+1}$  in funzione di  $\{s\}_{n+1}$ ,  $\{s\}_n$ ,  $\{\dot{s}\}_n$  e  $\{\ddot{s}\}_n$ .

Dalla (15.17) si ha:

$$\{\dot{s}\}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\{s\}_{n+1} - \{s\}_n) - \{\dot{s}\}_n \quad (15.18)$$

L'eq. (15.16) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\{\ddot{s}\}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\{\dot{s}\}_{n+1} - \{\dot{s}\}_n) - \{\ddot{s}\}_n \quad (15.19)$$

Sostituendovi l'eq.(15.18) si ottiene:

$$\{\ddot{s}\}_{n+1} = \frac{4}{(\Delta t)^2} (\{s\}_{n+1} - \{s\}_n) - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{s}\}_n - \{\ddot{s}\}_n \quad (15.20)$$

Sostituendo le espressioni (15.18) e (15.20) nell'equazione di equilibrio al tempo  $(n + 1)\Delta t$

$$[M]\{\ddot{s}\}_{n+1} + [C]\{\dot{s}\}_{n+1} + [K]\{s\}_{n+1} = \{F^{est}\}_{n+1} \quad (15.21)$$

si ottiene:

$$[M] \left[ \frac{4}{(\Delta t)^2} (\{s\}_{n+1} - \{s\}_n) - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{s}\}_n - \{\ddot{s}\}_n \right] + [C] \left[ \frac{2}{\Delta t} (\{s\}_{n+1} - \{s\}_n) - \{\dot{s}\}_n \right] + [K]\{s\}_{n+1} = \{F^{est}\}_{n+1} \quad (15.22)$$



Riorganizzando l'equazione si ottiene:

$$\left[ \frac{4[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{2[C]}{\Delta t} + [K] \right] \{s\}_{n+1} = \{F^{est}\}_{n+1} + [M] \left[ \frac{4}{(\Delta t)^2} \{s\}_n + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_n \right] + [C] \left[ \frac{2}{\Delta t} \{s\}_n + \{\dot{s}\}_n \right] \quad (15.23)$$

L'eq.(15.23) assume quindi la forma:

$$[\hat{K}]\{s\}_{n+1} = \{\hat{F}\}_{n+1} \quad (15.24)$$

dove  $[\hat{K}]$  è la matrice di rigidità equivalente:

$$[\hat{K}] = \frac{4}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] + [K] \quad (15.25)$$

e  $\{\hat{F}\}_{n+1}$  è il vettore delle forze equivalenti:

$$\{\hat{F}\}_{n+1} = \{F^{est}\}_{n+1} + [M] \left( \frac{4}{(\Delta t)^2} \{s\}_n + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{s}\}_n + \{\ddot{s}\}_n \right) + [C] \left( \frac{2}{\Delta t} \{s\}_n + \{\dot{s}\}_n \right) \quad (15.26)$$

Nella tabella 15.2 è riportato il diagramma a blocchi per il calcolo automatico della risposta:

- 1) Scegli il passo temporale  $\Delta t$  per ottenere la precisione richiesta
- 2) Calcola le matrici  $[K]$ ,  $[C]$  ed  $[M]$
- 3) Scegli le condizioni iniziali:  $\{s\}_0$  e  $\{\dot{s}\}_0$
- 4) Calcola l'accelerazione all'istante iniziale:  $\{\ddot{s}\}_0 = [M]^{-1}(\{F^{est}\}_0 - [K]\{s\}_0 - [C]\{\dot{s}\}_0)$
- 5) Calcola la matrice di rigidità equivalente:  $[\hat{K}] = \frac{4}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] + [K]$
- 6) Fattorizza la matrice di rigidità equivalente:  $[\hat{K}] = [L][U]$
- 7) Per ogni passo temporale  $n = 0, 1, \dots$ 
  - 7.1) Calcola la forza equivalente: eq.(15.26)
  - 7.2) Calcola  $\{s\}_{n+1}$  risolvendo il sistema (15.24)
  - 7.3) Calcola la velocità e l'accelerazione al passo  $n + 1$

$$\{\dot{s}\}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\{s\}_{n+1} - \{s\}_n) - \{\dot{s}\}_n$$

$$\{\ddot{s}\}_{n+1} = \frac{4}{(\Delta t)^2} (\{s\}_{n+1} - \{s\}_n) - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{s}\}_n - \{\ddot{s}\}_n$$

Tabella 15.2 – Diagramma a blocchi del metodo implicito dell'accelerazione media.

## OSSERVAZIONI

- 1) L'eq.(15.24) è un sistema di equazioni accoppiate anche quando le matrici  $[C]$  ed  $[M]$  sono diagonali. Per i problemi lineari  $[\hat{K}]$  deve essere calcolata e fattorizzata una sola volta. Dopo il passo iniziale computazionalmente costoso per la necessità di fattorizzare la matrice di rigidità, le iterazioni successive richiedono solo la sostituzione in avanti  $[L]\{y\} = \{\hat{F}\}_{n+1}$  e la sostituzione all'indietro  $[U]\{s\}_{n+1} = \{y\}$ ;
- 2) Se  $[M]$  è definita positiva, allora  $[\hat{K}]$  è non singolare anche se  $[K]$  consente alcuni moti rigidi
- 3) L'inizializzazione della procedura è semplice perché le condizioni iniziali sono note.
- 4) Per problemi in cui la legge costitutiva del materiale non è lineare,  $[K]$  (e quindi anche  $[\hat{K}]$ ) è funzione di  $\{s\}_{n+1}$  (e magari anche delle sue derivate rispetto al tempo) che è incognita. Di conseguenza  $[K]$  deve essere calcolata usando una stima di  $\{s\}_{n+1}$ . Il processo diventa iterativo: si stima  $\{s\}_{n+1}$ , si calcola  $\{\hat{F}\}_{n+1}$  usando la (15.26) e si ricalcola lo spostamento  $\{s\}_{n+1}$  usando la (15.24) finché non si giunge alla convergenza. Quando il problema è fortemente non lineare, possono nascere problemi di convergenza.



5) Da un punto di vista computazionale, l'eq.(15.25) mostra che non c'è alcun vantaggio nell'uso delle matrici di massa diagonali. In seguito si mostrerà che normalmente l'integrazione implicita con le matrici di massa consistenti è più precisa che non le matrici di massa diagonali.

### 15.3.2 Metodo di Newmark

Secondo il metodo di Newmark si utilizzano le seguenti ipotesi:

$$\{\dot{s}\}_{n+1} = \{\dot{s}\}_n + [(1 - \delta)\{\ddot{s}\}_n + \delta \{\ddot{s}\}_{n+1}]\Delta t \quad (15.27)$$

$$\{s\}_{n+1} = \{s\}_n + \{\dot{s}\}_n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{s}\}_n + \alpha \{\ddot{s}\}_{n+1} \right] (\Delta t)^2 \quad (15.28)$$

dove  $\alpha$  e  $\delta$  sono parametri che possono essere determinati in modo che l'integrazione sia precisa e stabile.

Se si pone  $\alpha = 0$ , sostituendo le eq.(15.27) e (15.28) nell'eq.(15.2a) al tempo  $(n + 1)\Delta t$  si ottiene un'equazione simile all'eq.(15.6) ed il metodo di Newmark diventa di tipo esplicito;

se si pone  $\alpha > 0$ , sostituendo le eq.(15.27) e (15.28) nell'eq.(15.2a) al tempo  $(n + 1)\Delta t$  si ottengono equazioni simili alle eq.(15.24), (15.25) e (15.26) ed il metodo di Newmark diventa di tipo implicito.

Si può dimostrare che l'algoritmo risulta:

- *Incondizionatamente stabile* quando:

$$2\alpha \geq \delta \geq 0.5 \quad (15.29)$$

- *Condizionatamente stabile* quando

$$\delta \geq 0.5 \quad \alpha < 0.5 \quad \text{e} \quad \Delta t \leq \frac{\xi(\delta - 0.5) + \sqrt{\delta/2 - \alpha + \xi^2(\delta - 0.5)^2}}{\omega_{max}(\delta/2 - \alpha)} \quad (15.30)$$

Il metodo è instabile per  $\delta < 0.5$ .

Si può notare che ponendo nell'eq.(15.30)  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/4$  il passo temporale  $\Delta t$  diventa infinito.

In accordo con la definizione che distingue i metodi espliciti da quelli impliciti, il metodo di Newmark è implicito a meno che  $\alpha = \delta = 0$ , nel qual caso il metodo è instabile per qualsiasi passo temporale e perciò non si può usare. Posto  $\alpha = 0$  e  $\delta \geq 1/2$  alcuni analisti classificano il metodo di Newmark come esplicito perché se la matrice di smorzamento  $[C]$  è nulla o diagonale non è necessario risolvere il sistema di equazioni. Le implementazioni dei metodi espliciti ed impliciti di Newmark sono essenzialmente identiche a quelle riportate rispettivamente nella tabella 15.1 e 15.2.

Quando  $\delta = 0.5$  l'algoritmo non smorza la risposta e la precisione è del secondo ordine.

Ponendo  $\delta > 0.5$  nella risposta si produce uno smorzamento artificiale e si ha un peggioramento della precisione che diventa solo del primo ordine.

Posto  $\delta \geq 0.5$ , la scelta  $\alpha = \frac{1}{4}(\delta + 0.5)^2$  massimizza la dissipazione delle alte frequenze.

### ANALISI DEGLI ERRORI

Per analizzare gli errori causati dall'integrazione diretta con il metodo delle differenze centrali e con il metodo dell'accelerazione media (rappresentativi rispettivamente dei metodi espliciti ed impliciti), è possibile concentrare l'attenzione su una singola equazione. In quanto segue si analizzerà la soluzione numerica dell'equazione:

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0 \quad (15.31)$$

la cui soluzione esatta è stata ricavata nel 2° capitolo:

$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + v(0) \cos(\omega t) \quad (2.11)$$

dove  $v(0)$  e  $\dot{v}(0)$  rappresentano le condizioni al contorno. Se si pone:

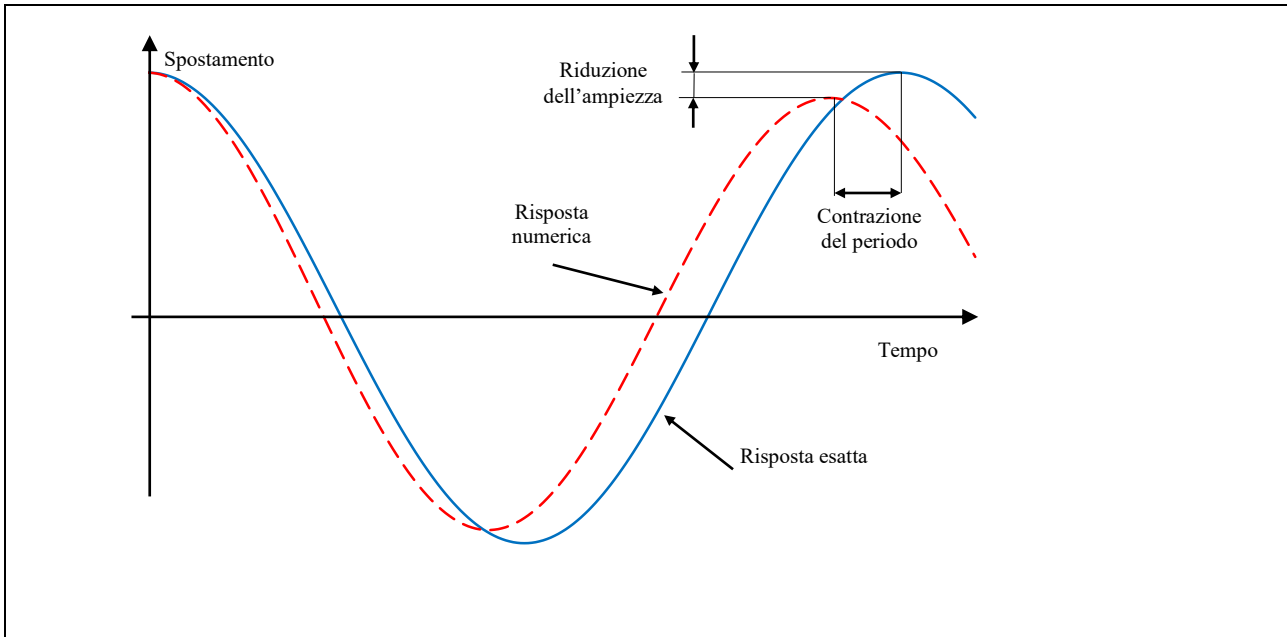
$$v(0) = 1 \quad \text{e} \quad \dot{v}(0) = 0 \quad (15.32)$$



la soluzione esatta si riduce alla seguente equazione:

$$v(t) = \cos(\omega t) \tag{15.33}$$

La soluzione approssimata ottenuta con un metodo d'integrazione diretta può condurre sia ad errori d'ampiezza che del periodo. I primi possono comportare sia un aumento dell'ampiezza (come accade anche a causa dell'instabilità provocata da un passo temporale superiore a quello critico), sia una riduzione: questo fenomeno viene spesso indicato come *smorzamento artificiale*. Gli errori sul periodo possono essere sia di allungamento che di contrazione. Questi errori sono schematizzati nella fig.15.3.



**Fig. 15.3** – Possibili errori causati dall'integrazione diretta delle equazioni del moto.

Si definisce errore del periodo  $P$  il rapporto tra il periodo ricostruito dall'algoritmo d'integrazione e quello del sistema reale. Nel caso dell'eq.(15.31) l'analisi teorica dell'errore  $P$  causato dai due metodi d'integrazione selezionati conduce al seguente risultato:

$$\text{Metodo delle differenze centrali: } P = \omega \Delta t \left[ \arctang \left( \frac{\omega \Delta t \sqrt{4 - (\omega \Delta t)^2}}{4 - (\omega \Delta t)^2} \right) \right]^{-1} \tag{15.34a}$$

$$\text{Metodo dell'accelerazione media costante: } P = \omega \Delta t \left[ \arctang \left( \frac{4\omega \Delta t}{4 - (\omega \Delta t)^2} \right) \right]^{-1} \tag{15.34b}$$

nelle quali è necessario che la funzione arcotangente fornisca un angolo positivo (cioè se  $\arctang(\arg) < 0$  allora nelle eq.(15.34a e b) si pone  $\arctang(\arg + \pi)$ ).

Nella fig.15.4 sono stati riportati gli errori prodotti dai due metodi. Questa figura suggerisce delle linee guida per la scelta del tipo di matrice di massa quando si utilizza il metodo dell'integrazione diretta.

Le frequenze naturali che si ottengono utilizzando le matrici di massa consistenti sono sovrastimate (i modelli FEM a spostamenti imposti sono più rigidi del necessario), quindi i periodi dei modi sono sottostimati. Quando si usa il metodo dell'accelerazione media che, come si osserva nella fig.15.4, causa un allungamento del periodo, l'uso delle matrici di massa di tipo consistente ha l'effetto di *compensare parzialmente tale errore*. Questa osservazione è vera, in generale, per tutti i metodi d'integrazione impliciti.

L'uso della matrici di massa diagonali normalmente conduce ad una sottostima delle frequenze naturali e quindi ad un allungamento o sovrastima dei periodi. Quando si usa il metodo delle differenze centrali, le matrici di massa diagonali compensano parzialmente l'errore del periodo. Anche questa osservazione è valida, in generale, per tutti i metodi espliciti.

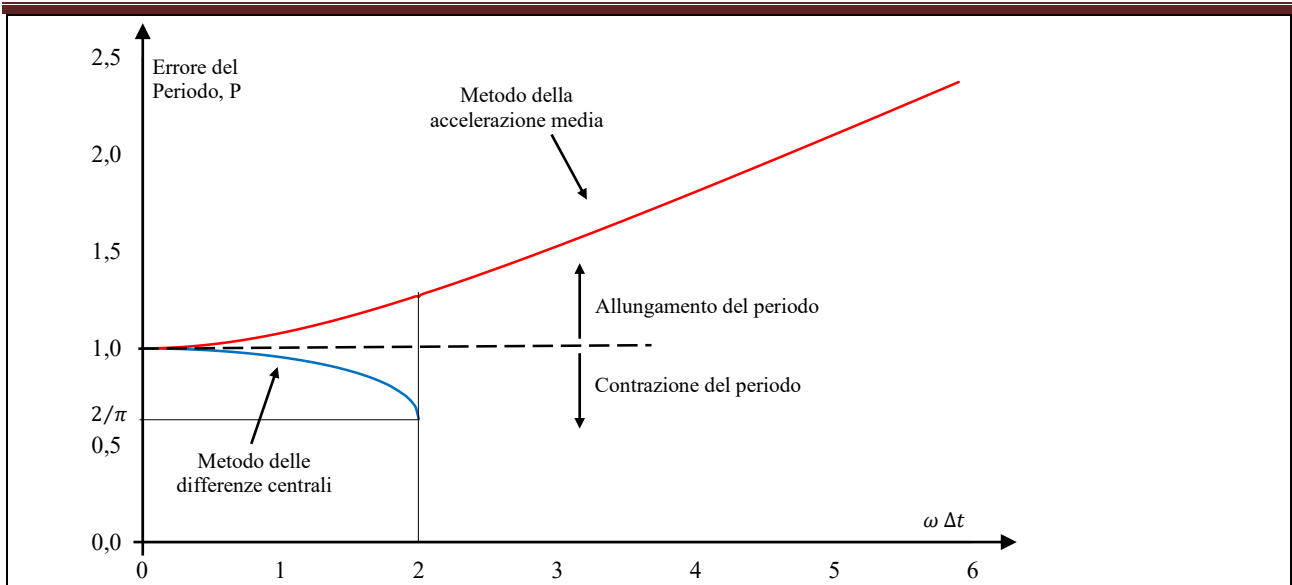


Fig.15.4 – Errori del periodo nel caso del metodo delle differenze centrali e del metodo dell’accelerazione media.

E’ bene osservare che la fig.15.4 è stata costruita analizzando un sistema con un solo grado di libertà il cui modo ha frequenza  $\omega$ . Per l’analisi strutturale si sceglie un passo temporale  $\Delta t$  in modo tale che  $\omega \Delta t$  sia piccolo per tutti i modi di interesse pratico.

Né il metodo delle differenze centrali, né quello dell’accelerazione media causano l’errore dell’ampiezza, purché il passo temporale sia inferiore a quello critico. Comunque ciò non significa che l’ampiezza della risposta calcolata con il metodo delle differenze centrali coincida con la risposta esatta. Ciò è particolarmente vero quando si utilizza un passo temporale stabile, ma molto prossimo a quello limite. In tale situazione la risposta del sistema può manifestare forti “battimenti”, come mostrato nella fig.15.5. In questo contesto affermare che l’integrazione diretta non abbia causato errori sull’ampiezza della risposta significa che l’involuppo della soluzione numerica ha un valore medio che non cresce o non diminuisce rispetto alla soluzione esatta.

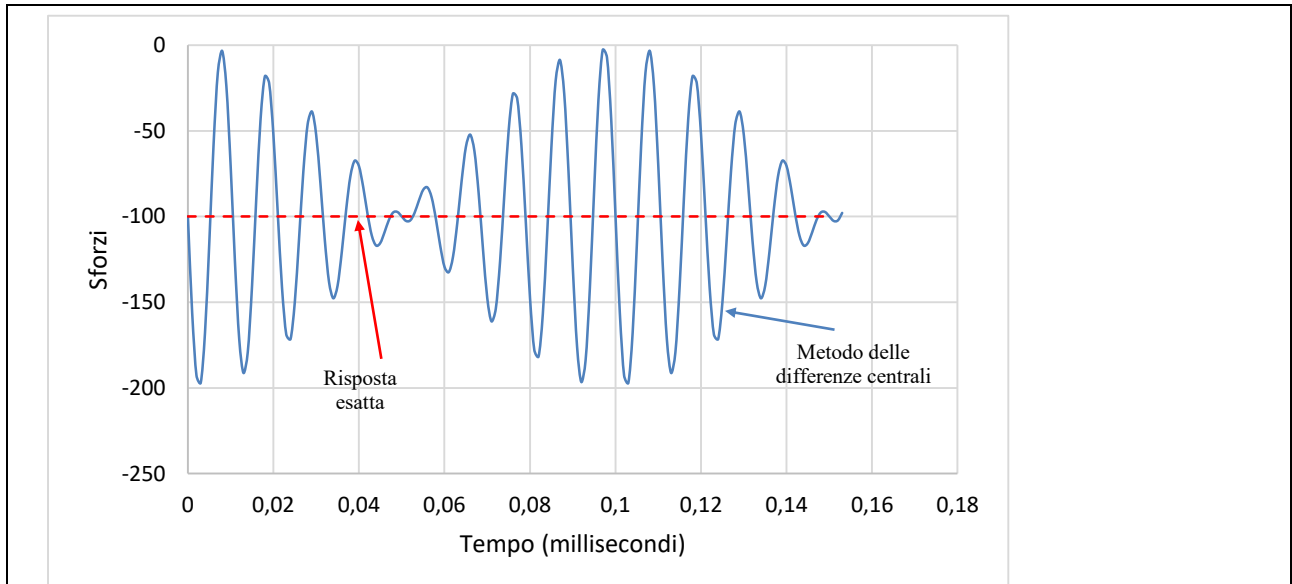


Fig.15.5 – Variazione nel tempo dello sforzo di compressione in una trave sottoposta ad un carico improvviso.



---

**OSSERVAZIONI CONCLUSIVE****SCelta DEL METODO**

La scelta del metodo da utilizzare per l'analisi dinamica dipende fortemente dal problema in esame. L'efficienza di un dato metodo dipende dal tipo di problema (propagazione delle onde o dinamica strutturale), dalla durata complessiva che si intende analizzare, dal fatto che la risposta del sistema sia lineare o meno e dalla topologia della mesh agli elementi finiti.

Nei problemi di propagazione delle onde la forza applicata è normalmente ricca di componenti ad alta frequenza. La durata temporale da analizzare è in genere molto breve, spesso dell'ordine di tempo che un fronte d'onda impiega ad attraversare la struttura. Normalmente si è interessati ad osservare il passaggio delle onde d'urto attraverso gli elementi e ad analizzarne i transitori.

Nei problemi di dinamica strutturale la forza esterna e la risposta sono caratterizzate da basse frequenze che agiscono per lungo tempo. La durata temporale dell'analisi è normalmente lunga rispetto a quella richiesta nei problemi di propagazione delle onde.

I metodi di sovrapposizione modale sono consigliabili quando è necessario sovrapporre una piccola parte del numero totale di modi della struttura. Per l'analisi dei problemi legati alla trasmissione delle onde è necessario considerare un numero molto elevato di modi, quindi i metodi di sovrapposizione modale non sono adatti. Nei problemi di dinamica strutturale, le forze e le risposte strutturali sono dominate dalle componenti a bassa frequenza, quindi i metodi di sovrapposizione modale sono molto efficienti.

Se la risposta del materiale diventa non lineare o se le deformazioni diventano grandi, gli autovalori e gli autovettori della struttura cambiano. Di conseguenza non è possibile utilizzare il metodo della sovrapposizione modale.

Con i metodi espliciti d'integrazione diretta, la stabilità normalmente richiede che il passo temporale d'integrazione sia abbastanza piccolo in modo che l'informazione non si propaghi attraverso più di un elemento per ogni passo temporale. I metodi espliciti sono ideali per i problemi di propagazione delle onde nei quali è di notevole importanza conoscere lo sforzo causato dal passaggio del fronte d'onda. Quindi il limite posto dalla stabilità non è un grande svantaggio in quanto per la precisione è necessario utilizzare un passo temporale molto breve. Altri fattori a vantaggio dei metodi espliciti sono la loro semplice implementazione, la possibilità di trattare in modo rigoroso le non linearità e la possibilità di esaminare problemi di notevoli dimensioni con una relativamente piccola occupazione di memoria del calcolatore. Sebbene i metodi espliciti siano spesso utilizzati nei problemi di dinamica strutturale, non sono particolarmente adatti per questo scopo.

Il solo vantaggio che hanno i metodi impliciti rispetto a quelli espliciti è che consentono di utilizzare un passo temporale d'integrazione molto più lungo in quanto sono incondizionatamente stabili. Per la soluzione dei problemi di trasmissione delle onde, i metodi impliciti sono costosi in quanto la precisione richiede l'uso di passi temporali molto brevi. Per i problemi di dinamica strutturale di lunga durata, normalmente i metodi impliciti sono più efficienti dei metodi espliciti, sebbene ciò dipenda dalla topologia della mesh e dalla severità delle non linearità. Rispetto ai metodi espliciti, quelli impliciti sono più difficili da implementare, specie per i problemi non lineari e richiedono un'occupazione di memoria decisamente maggiore.

**SCelta DEGLI ELEMENTI E DELLA MESH**

Quando si discretizza una struttura è necessario scegliere il tipo di elementi finiti più adatti: per esempio è necessario stabilire se è meglio utilizzare elementi di ordine inferiore, come l'elemento piano bilineare a 4 nodi, oppure gli elementi di ordine elevato, come gli elementi piani a 8 nodi le cui funzioni di forma sono polinomi quadratici di Lagrange.

Nei problemi di trasmissione delle onde, attraverso il modello viaggiano dei fronti d'onda che causano forti discontinuità nel campo delle deformazioni per la cui modellazione sono più adatti gli elementi di ordine inferiore, in quanto quelli di ordine superiore producono maggiore rumore numerico.

I problemi di dinamica strutturale tendono ad avere campi di deformazione che nel tempo variano con regolarità: in questi casi sono da preferirsi gli elementi di ordine elevato che sono anche i più adatti quando l'obiettivo dell'analisi si limita al calcolo delle frequenze naturali e dei relativi modi.

Un problema dinamico può richiedere più elementi che un analogo problema statico. Per esempio, nel problema della fig.(15.1) per la soluzione statica è sufficiente un solo elemento mentre per ricostruire con precisione la risposta dinamica ne sono necessari numerosi.



Nella mesh la dimensione degli elementi non deve cambiare in modo improvviso: se ciò dovesse capitare la matrice di massa rappresenterebbe in modo poco adeguato la reale distribuzione della massa della struttura. Ciò produrrebbe la riflessione artificiale delle onde che quando attraversano i confini tra elementi di dimensioni notevolmente diverse, danno origine ad ulteriore rumore numerico.

Con i metodi espliciti le matrici di massa diagonali sono da preferirsi sia per la precisione che per aumentare la velocità di calcolo. Con i metodi impliciti, per la precisione dei risultati, si preferisce usare le matrici di massa di tipo consistente anche se il calcolo può richiedere più tempo.