



CAP.13 – STUDIO DELLA RISPOSTA DINAMICA DI UN SISTEMA LINEARE A N GRADI DI LIBERTA'

13.1 COORDINATE PRINCIPALI

Nello studio dei sistemi a N gradi di libertà, in un dato istante di tempo, la deformata è definita dalle N componenti del vettore $\{s_n\}$, dove il pedice n indica che si tratta degli spostamenti nodali del modello, creato per esempio, con il metodo degli elementi finiti. Nel seguito, per semplificare le notazioni matematiche, il vettore $\{s_n\}$ sarà indicato senza il pedice, cioè con $\{s\}$. Nel caso dei sistemi lineari, una rappresentazione molto più utile è resa possibile dai modi di vibrazione libera che rappresentano N forme di spostamento tra loro indipendenti, le cui ampiezze possono servire da coordinate generalizzate per rappresentare uno spostamento qualsiasi. I modi di vibrazione ricoprono lo stesso ruolo dei termini di uno sviluppo in serie di Fourier e presentano gli stessi vantaggi: ortogonalità e possibilità di una soddisfacente rappresentazione degli spostamenti per mezzo di un numero molto limitato di termini.

Si prenda il caso della mensola rappresentata nella Fig.13.1, la cui deformata è funzione della coordinata orizzontale. E' possibile rappresentare un qualsiasi vettore spostamento $\{s\}$ sommando i primi tre modi di vibrazione ognuno pesato da un'ampiezza adeguata, come mostrato in figura. Per ogni componente modale $\{\hat{s}\}_i$, gli spostamenti sono dati dall'autovettore $\{\phi\}_i$ moltiplicato per l'ampiezza modale Y_i :

$$\{\hat{s}\}_i = Y_i\{\phi\}_i \quad (13.1)$$

Gli spostamenti sono la somma delle componenti modali:

$$\{s\} = \sum_{i=1}^N \{\hat{s}\}_i = Y_1\{\phi\}_1 + Y_2\{\phi\}_2 + \dots + Y_N\{\phi\}_N = \sum_{i=1}^N Y_i\{\phi\}_i \quad (13.2)$$

o, in forma matriciale:

$$\{s\} = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \dots \quad \{\phi\}_N] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{Bmatrix} = [\Phi]\{Y\} \quad (13.3)$$

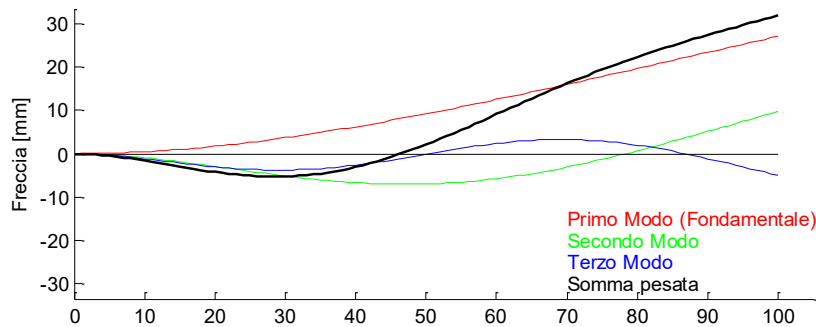


Fig.13.1 – Rappresentazione di una deformata per mezzo della somma pesata di tre componenti modali.

La matrice $[\Phi]$ permette quindi di passare dal vettore $\{Y\}$ delle coordinate generalizzate al vettore $\{s\}$ delle coordinate geometriche. Le ampiezze modali, o coordinate generalizzate, prendono il nome di coordinate principali (o normali) della struttura.

La matrice modale $[\Phi]$ di un sistema a N gradi di libertà è invertibile in quanto formata da N vettori indipendenti. E' dunque sempre possibile risolvere l'eq.(13.3) per trovare le ampiezze delle coordinate principali $\{Y\}$ associate ad un vettore spostamento qualunque $\{s\}$. In realtà, grazie alle proprietà di ortogonalità, il calcolo di $\{Y\}$ non richiede la soluzione completa del sistema di equazioni, il che rappresenta un grosso vantaggio. Per calcolare una qualunque coordinata principale Y_i , l'eq.(13.3) può essere moltiplicata per un vettore ottenuto moltiplicando il corrispondente vettore modale $\{\phi\}_i^T$ per la matrice di massa $[M]$:



$$\{\phi\}_i^T [M] \{s\} = \{\phi\}_i^T [M] [\Phi] \{Y\} \quad (13.4)$$

Se si sviluppa il secondo membro di questa equazione si ottiene:

$$\{\phi\}_i^T [M] [\Phi] \{Y\} = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_1 Y_1 + \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_2 Y_2 + \dots + \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_N Y_N \quad (13.5)$$

Grazie alla proprietà d'ortogonalità dei modi di vibrazione rispetto alla matrice di massa, tutti i termini di questa sommatoria sono nulli, tranne quello che corrisponde a $\{\phi\}_i$. Conservando questo termine, nel secondo membro dell'eq.(13.4) si ottiene:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{s\} = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i Y_i \quad (13.6)$$

da cui:

$$Y_i = \frac{\{\phi\}_i^T [M] \{s\}}{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i} \quad (13.7)$$

Ad ogni coordinata principale corrisponde un'espressione di questo tipo.

13.2 EQUAZIONI DISACCOPPATE DEL MOTO NON SMORZATO

Le proprietà di ortogonalità delle coordinate principali possono essere utilizzate per semplificare le equazioni del moto di un sistema a numerosi gradi di libertà. La forma di queste equazioni è in generale fornita dalle eq.(10.10) che per un sistema non smorzato diventa:

$$[M] \{\ddot{s}\} + [K] \{s\} = \{f(t)\} \quad (13.8)$$

Utilizzando l'eq.(13.3) e la sua derivata seconda fatta rispetto al tempo, $\{\ddot{s}\} = [\Phi] \{\ddot{Y}\}$ (in quanto i modi sono indipendenti dal tempo), si ottiene:

$$[M] [\Phi] \{\ddot{Y}\} + [K] [\Phi] \{Y\} = \{f(t)\} \quad (13.9)$$

Se l'eq.(13.9) è moltiplicata a sinistra per la trasposta dell'i-esimo autovettore $\{\phi\}_i^T$, si ottiene:

$$\{\phi\}_i^T [M] [\Phi] \{\ddot{Y}\} + \{\phi\}_i^T [K] [\Phi] \{Y\} = \{\phi\}_i^T \{f(t)\} \quad (13.10)$$

Se, come già fatto nell'eq.(13.5), si scrivono per esteso i primi due termini del primo membro, si osserva che, grazie alle proprietà d'ortogonalità dei modi, si annullano tutti i termini, tranne l'i-esimo. Si ottiene allora:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \ddot{Y}_i + \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i Y_i = \{\phi\}_i^T \{f(t)\} \quad (13.11)$$

Definite le seguenti variabili:

$$\mathcal{M}_i \equiv \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \quad (13.12a)$$

$$\mathcal{K}_i \equiv \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i \quad (13.12b)$$

$$\mathcal{F}_i(t) \equiv \{\phi\}_i^T \{f(t)\} \quad (13.12c)$$

chiamate rispettivamente *coordinate principali* della massa generalizzata, della rigidità generalizzata e del carico generalizzato per l'i-esimo modo, la loro sostituzione nell'eq.(13.11) conduce alla seguente equazione:

$$\mathcal{M}_i \ddot{Y}_i + \mathcal{K}_i Y_i = \mathcal{F}_i(t) \quad (13.13)$$

che rappresenta l'equazione del moto di un sistema ad un solo grado di libertà corrispondente all'i-esimo modo. Se l'equazione:

$$[K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 [M] \{\phi\}_i$$

è moltiplicata a sinistra per $\{\phi\}_i^T$, la rigidità generalizzata dell'i-esimo modo è il prodotto della massa generalizzata per la frequenza di vibrazione:

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i$$

o anche



$$\mathcal{K}_i = \omega_i^2 \mathcal{M}_i \quad (13.12d)$$

Questa procedura può essere utilizzata per ottenere l'equazione del sistema ad un grado di libertà corrispondente ad ogni modo di vibrazione della struttura. Così l'uso delle coordinate principali permette di trasformare le equazioni del moto, che costituiscono un sistema di N equazioni differenziali, accoppiato dai termini non diagonali delle matrici di massa e di rigidezza, in un sistema di N equazioni indipendenti espresso in coordinate principali. La risposta dinamica si può dunque ottenere calcolando separatamente le risposte di ogni modo e nell'inserirle nell'eq.(13.3) per ottenere la risposta nelle coordinate iniziali. Questa procedura prende il nome di **metodo di sovrapposizione modale**.

13.3 EQUAZIONI DISACCOPIATE DEL MOTO SMORZATO

Verranno esaminate le condizioni che consentono di disaccoppiare le equazioni del moto smorzato espresse in coordinate principali. Le equazioni sono le seguenti:

$$[M]\{\ddot{s}\} + [C]\{\dot{s}\} + [K]\{s\} = \{f(t)\} \quad (13.14)$$

Utilizzando l'espressione in coordinate principali dell'eq.(13.3) e le sue derivate rispetto al tempo e moltiplicando a sinistra per la trasposta dell' i -esimo autovettore $\{\phi\}_i^T$ si ottiene:

$$\{\phi\}_i^T [M] [\Phi] \{\ddot{Y}\} + \{\phi\}_i^T [C] [\Phi] \{\dot{Y}\} + \{\phi\}_i^T [K] [\Phi] \{Y\} = \{\phi\}_i^T \{f(t)\} \quad (13.15)$$

Le condizioni di ortogonalità:

$$\left. \begin{aligned} \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j &= 0 \\ \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ con } i \neq j$$

permettono di annullare tutti i termini, tranne quello che corrisponde all' i -esimo modo, nelle matrici di massa e di rigidezza dell'eq.(13.15). Se si suppone che alla matrice di smorzamento si possano applicare delle condizioni di ortogonalità simili, si potranno semplificare nello stesso modo i termini di smorzamento. Ciò equivale ad affermare che si suppone valida la seguente relazione:

$$\{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{con } i \neq j \quad (13.16)$$

In questo caso, l'eq.(13.15) può essere scritta nel modo seguente:

$$\mathcal{M}_i \ddot{Y}_i + \mathcal{C}_i \dot{Y}_i + \mathcal{K}_i Y_i = \mathcal{F}_i(t) \quad (13.17)$$

o anche:

$$\ddot{Y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{\mathcal{F}_i(t)}{\mathcal{M}_i} \quad (13.18)$$

dove:

$$\mathcal{M}_i \equiv \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \quad (13.19a)$$

$$\mathcal{K}_i \equiv \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 \mathcal{M}_i \quad (13.19b)$$

$$\mathcal{C}_i \equiv \{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i = 2\xi_i \omega_i \mathcal{M}_i \quad (13.19c)$$

$$\mathcal{F}_i(t) \equiv \{\phi\}_i^T \{f(t)\} \quad (13.19d)$$

Le masse, le rigidezze ed i carichi generalizzati espressi in coordinate principali sono identiche a quelle relative al moto non smorzato. Lo smorzamento generalizzato dell' i -esimo modo fornito dall'eq.(13.19c) ha un'espressione simile. L'ultimo termine di questa equazione rappresenta una definizione del coefficiente di smorzamento ξ_i corrispondente all' i -esimo modo; gli altri termini di questa equazione sono noti. Come è stato messo in evidenza precedentemente, in generale è molto più comodo e ragionevole da un punto di vista fisico, definire lo smorzamento per mezzo del fattore di smorzamento di ogni modo, piuttosto che provare ad esplicitare i coefficienti della matrice di smorzamento $[C]$.

**13.3.1 CONDIZIONI PER L'ORTOGONALITÀ DELLO SMORZAMENTO**

Nelle equazioni che precedono, si è supposto che la trasformazione in coordinate principali permettesse di disaccoppiare le forze di smorzamento così come le forze d'inerzia e di richiamo elastico. I modi del sistema smorzato saranno allora gli stessi dei modi del sistema senza smorzamento. Arrivati a questo punto conviene studiare le condizioni che consentono questo disaccoppiamento, cioè determinare la forma della matrice di smorzamento alla quale si applica l'eq.(13.16).

Lo smorzamento nelle strutture è dovuto principalmente a fenomeni di isteresi e/o di attrito negli elementi di collegamento. Questi fenomeni sono però difficili da modellare e da inserire nelle equazioni di dinamica strutturale, per cui il fenomeno dello smorzamento è generalmente approssimato dallo smorzamento viscoso, attraverso il rapporto di smorzamento ξ . Il valore di ξ dipende dal materiale e dal livello di sforzo e per gli acciai può variare da circa 0.5% per bassi livelli di sforzo, a circa il 5% per alti livelli di sforzo. Per strutture imbullonate o rivettate ξ può variare dal 2% al 15%.

Uno dei modelli di smorzamento viscoso più utilizzati è lo smorzamento proporzionale, o di Rayleigh, secondo il quale la matrice di smorzamento $[C]$ è una combinazione lineare della matrice di rigidezza e della matrice di massa, cioè:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (13.20)$$

con α e β costanti di smorzamento di Rayleigh. La matrice di smorzamento $[C]$ così ottenuta è ortogonale e permette di semplificare notevolmente l'analisi. In termini modali, indicando con $[\Phi]$ la matrice degli autovettori, si ha:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \omega_i^2 & i = j \end{cases} \quad (13.21)$$

da cui:

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \alpha [\Phi]^T [M] [\Phi] + \beta [\Phi]^T [K] [\Phi] = \alpha [I] + \beta [\Lambda] \quad (13.22)$$

dove $[I]$ è la matrice identità e $[\Lambda]$ è una matrice la cui diagonale contiene il quadrato delle frequenze ω_i^2 .

La relazione tra α , β ed il fattore di smorzamento ξ è:

$$2\xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2$$

da cui

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (13.23)$$

La fig.13.2 illustra un andamento tipico dello smorzamento proporzionale ξ in funzione della frequenza. In pratica è stato riscontrato che lo smorzamento M-proporzionale può rappresentare uno smorzamento dovuto ad attrito, mentre lo smorzamento K-proporzionale può rappresentare lo smorzamento interno del materiale.

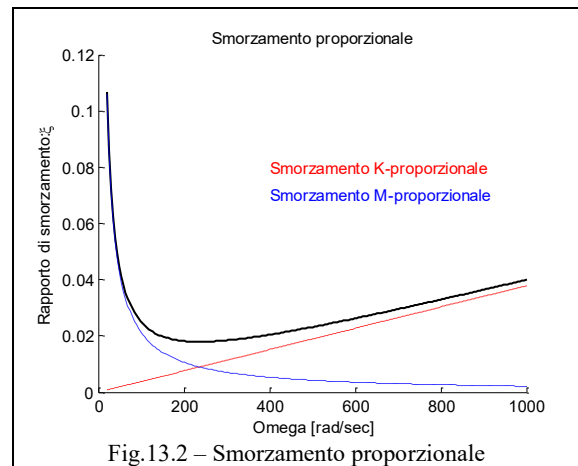


Fig.13.2 - Smorzamento proporzionale

Le costanti α e β possono essere ricavate a partire dalla conoscenza sperimentale di due coppie di valori (ω_1, ξ_1) e (ω_2, ξ_2) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta \omega_1^2 = 2\xi_1 \omega_1 \\ \alpha + \beta \omega_2^2 = 2\xi_2 \omega_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 \\ 1 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 \\ 2\xi_2 \omega_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \begin{bmatrix} \omega_2^2 & -\omega_1^2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 \\ 2\xi_2 \omega_2 \end{Bmatrix}$$

da cui

$$\alpha = 2 \frac{\omega_1 \omega_2 (\omega_2 \xi_1 - \omega_1 \xi_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad \beta = 2 \frac{\omega_2 \xi_2 - \omega_1 \xi_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (13.24)$$

**13.4 METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE MODALE (SINTESI)**

Alla base di questo metodo si trova la trasformazione in coordinate principali che permette di sostituire un sistema di N equazioni accoppiate con un sistema di N equazioni disaccoppiate. E' quindi possibile calcolare la risposta dinamica di un qualsiasi sistema lineare i cui spostamenti possono essere espressi per mezzo di N coordinate discrete ed il cui smorzamento può essere modellato per mezzo dei fattori di smorzamento modali. La procedura può essere scomposta nel modo seguente:

- 1) **Equazioni del moto.** Per la classe di sistemi considerati, le equazioni del moto sono:

$$[M]\{\ddot{s}\} + [C]\{\dot{s}\} + [K]\{s\} = \{f(t)\}$$

- 2) **Calcolo delle frequenze e dei modi propri.** Per delle vibrazioni libere non smorzate, l'equazione matriciale precedente si riduce al problema agli autovalori:

$$\{[K] - \omega^2[M]\}\{\hat{s}\} = \{0\}$$

E' quindi possibile determinare la matrice modale $[\Phi]$ e il vettore delle frequenze $[\Lambda]$.

- 3) **Massa e carico generalizzato.** Usando successivamente ogni autovettore, si calcola la massa ed il carico generalizzato relativo ad ogni modo:

$$\mathcal{M}_i \equiv \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \qquad \mathcal{F}_i(t) \equiv \{\phi\}_i^T \{f(t)\}$$

- 4) **Equazioni disaccoppiate del moto.** L'equazione del moto di ogni modo può scriversi combinando la massa ed il carico generalizzato del modo con la frequenza angolare propria (o modale) ω_i ed il valore del fattore di smorzamento modale ξ_i :

$$\ddot{Y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{\mathcal{F}_i(t)}{\mathcal{M}_i} \qquad (13.25)$$

- 5) **Risposta modale al carico imposto.** Il passo precedente conduce ad un sistema di N equazioni del moto indipendenti, ognuna corrispondente ad un modo di vibrazione. Queste equazioni rappresentano altrettanti sistemi ad un solo grado di libertà e si risolvono con un qualsiasi metodo adeguato al tipo di carico. L'espressione generale della risposta è data per ogni modo dall'integrale di Duhamel:

$$Y_i(t) = \frac{1}{\mathcal{M}_i\omega_{Di}} \int_0^t \mathcal{F}_i(\tau) e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)} \sin[\omega_{Di}(t-\tau)] d\tau \qquad (13.26)$$

- 6) **Vibrazioni modali libere.** L'integrale di Duhamel eq.(6.14) è applicabile ai sistemi che sono fermi al tempo iniziale ($t = 0$). Se la velocità e gli spostamenti iniziali non sono nulli, è necessario aggiungere all'espressione fornita dall'integrale di Duhamel una risposta in vibrazione libera per ogni modo. L'espressione più generale possibile della risposta in vibrazione libera smorzata è data per ogni modo dalla seguente equazione:

$$Y_i(t) = e^{-\xi_i\omega_i t} \left[\frac{\dot{Y}_i(0) + Y_i(0)\xi_i\omega_i}{\omega_{Di}} \sin(\omega_{Di}t) + Y_i(0)\cos(\omega_{Di}t) \right] \qquad (13.27)$$

$Y_i(0)$ e $\dot{Y}_i(0)$ rappresentano gli spostamenti e le velocità iniziali per ogni modo. Si possono ottenere, per ogni modo, seguendo la seguente procedura, a partire dagli spostamenti iniziali imposti $\{s(0)\}$ e delle velocità iniziali imposte $\{\dot{s}(0)\}$ espresse nelle coordinate geometriche di partenza:

$$Y_i(0) = \frac{\{\phi\}_i^T [M] \{s(0)\}}{\mathcal{M}_i} \qquad (13.28)$$

$$\dot{Y}_i(0) = \frac{\{\phi\}_i^T [M] \{\dot{s}(0)\}}{\mathcal{M}_i} \qquad (13.29)$$



- 7) **Risposta in coordinate geometriche.** Una volta calcolate le risposte $Y_i(t)$ dei diversi modi, è possibile ottenere gli spostamenti espressi in coordinate geometriche:

$$\{s(t)\} = [\Phi]\{Y(t)\} = \sum_{i=1}^N \{\phi\}_i Y_i(t) \quad (13.30)$$

Questa equazione rappresenta semplicemente la sovrapposizione pesata dei contributi di ogni modo, da cui il nome del metodo. E' importante notare che nella maggior parte dei casi, i contributi dei modi a cui sono associate le frequenze più basse sono più importanti di quelli associati ad alte frequenze. Ne risulta che generalmente nella sovrapposizione non è necessario includere i modi di vibrazione ad alta frequenza: la serie può essere interrotta quando la risposta è stata ottenuta con un grado di precisione sufficiente. Bisogna ricordare che la modellazione matematica di un sistema complesso conduce a risultati poco precisi per i modi ad alta frequenza: questo è un altro motivo che suggerisce di limitare il numero di modi da considerare nel calcolo della risposta dinamica.

- 8) **Calcolo delle forze elastiche durante la risposta.** La variazione nel tempo degli spostamenti della struttura può considerarsi come la misura fondamentale della sua risposta ad un carico dinamico. In generale è possibile calcolare direttamente gli altri elementi della risposta, come gli sforzi o le forze prodotte in certe parti della struttura, a partire dagli spostamenti. Per esempio le forze elastiche f_S che si oppongono alla deformazione della struttura sono date direttamente dall'equazione:

$$\{f_S(t)\} = [K]\{s(t)\} = [K][\Phi]\{Y(t)\} \quad (13.31)$$

Come già sottolineato, quando il sistema dinamico contiene un numero molto elevato di gradi di libertà, il calcolo di tutte le soluzioni del problema agli autovalori diventa proibitivo. In molte situazioni, specie nei problemi di dinamica strutturale, i modi ad alta frequenza hanno poca influenza sulla risposta della struttura e perciò è sufficiente calcolare un numero molto ridotto di modi a bassa frequenza. Quindi è necessario risolvere solo le prime m equazioni dell'eq.(13.25), dove normalmente $m \ll N$; di conseguenza l'eq.(13.30) viene sostituita da:

$$\{s(t)\} = \sum_{i=1}^m \{\phi\}_i Y_i(t) \quad (13.32)$$

Per stimare l'errore al tempo t si può utilizzare la formula seguente:

$$err(t) \equiv \frac{\|[M]\{\ddot{s}\} + [C]\{\dot{s}\} + [K]\{s\} - \{f\}\|}{\|f\|} \quad (13.33)$$

dove $\{s\}$ e le sue derivate fatte rispetto al tempo si calcolano con l'eq.(13.32) e $\|\cdot\|$ indica una norma vettoriale, spesso quella euclidea. Nell'eq.(13.33) si è ipotizzato che al tempo t la norma della forza esterna non sia nulla. Per un'analisi precisa, $err(t)$ dovrebbe essere inferiore all'1% per l'intera durata dell'analisi.

Quando il carico esterno è di tipo impulsivo, capita che le frequenze sollecitate appartengano ad uno spettro molto ampio: in tal caso il metodo della sovrapposizione modale non è più consigliabile ed è bene rivolgersi ai metodi d'integrazione diretta.



ESEMPIO E13.1 - Qui di seguito si illustrerà il metodo della sovrapposizione modale applicato alla struttura a tre piani dell'esempio E12.1. Le caratteristiche della struttura sono qui di seguito riportate per comodità:

$$[K] = 120\,000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kN \\ m \end{bmatrix} \quad [M] = 200 \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix} [t] \quad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.52 \\ 31.05 \\ 46.1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} rad \\ s \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 0.649 & -0.607 & -2.542 \\ 0.302 & -0.679 & 2.44 \end{bmatrix}$$

Si ipotizzi che le condizioni iniziali non siano le seguenti:

$$\{s(t=0)\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix} [mm] \quad \{\dot{s}(t=0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 90 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} mm \\ s \end{bmatrix}$$

Per iniziare si supponga che la struttura non sia smorzata e si calcolino le vibrazioni libere. Le ampiezze modali associate agli spostamenti iniziali si ottengono utilizzando l'eq.(13.7). Se si scrive il sistema completo in forma matriciale si ottiene:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{Y\} = [\mathcal{M}] \{Y\} = [\Phi]^T [M] \{s\}$$

dove

$$[\mathcal{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi]$$

è la matrice di massa generalizzata. Di conseguenza:

$$\{Y\} = [\mathcal{M}]^{-1} [\Phi]^T [M] \{s\}$$

Sostituendo i valori delle caratteristiche dell'esercizio si ottiene:

$$[\mathcal{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.649 & 0.302 \\ 1.000 & -0.607 & -0.679 \\ 1.000 & -2.542 & 2.440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 0.649 & -0.607 & -2.542 \\ 0.302 & -0.679 & 2.440 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$[\mathcal{M}] = 200 \begin{bmatrix} 1.813 & 0 & 0 \\ 0 & 2.474 & 0 \\ 0 & 0 & 22.596 \end{bmatrix}$$

Se si esegue il prodotto $[\mathcal{M}]^{-1} [\Phi]^T [M]$ si ottiene:

$$[\mathcal{M}]^{-1} [\Phi]^T [M] = \begin{bmatrix} 0.5516 & 0.5365 & 0.3329 \\ 0.4042 & -0.3678 & -0.5489 \\ 0.0443 & -0.1687 & 0.2159 \end{bmatrix}$$

Le ampiezze $\{Y\}$ delle coordinate modali iniziali sono date dal prodotto di questa matrice per il vettore degli spostamenti iniziali:

$$\{Y(t=0)\} = [\mathcal{M}]^{-1} [\Phi]^T [M] \{s(t=0)\} = [\mathcal{M}]^{-1} [\Phi]^T [M] \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.903 \\ -1.097 \\ 0.194 \end{Bmatrix} [mm] \quad (\text{E13.1.1})$$

Le derivate rispetto al tempo delle coordinate modali si ottengono moltiplicando questa matrice per il vettore delle velocità iniziali:

$$\{\dot{Y}(t=0)\} = [\mathcal{M}]^{-1} [\Phi]^T [M] \{\dot{s}(t=0)\} = [\mathcal{M}]^{-1} [\Phi]^T [M] \begin{Bmatrix} 0 \\ 90 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 58.289 \\ -33.101 \\ -15.187 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} mm \\ s \end{bmatrix} \quad (\text{E13.1.2})$$

La risposta in vibrazione libera di ogni coordinata modale in assenza di smorzamento assume la forma seguente:



$$Y_i(t) = \frac{\dot{Y}_i(t=0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + Y_i(t=0) \cos(\omega_i t)$$

Utilizzando le condizioni iniziali E13.1.1 e E13.1.2 e le frequenze modali si ottiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{58.289}{14.52} \sin(\omega_1 t) \\ -33.101 \sin(\omega_2 t) \\ \frac{31.05}{46.1} \sin(\omega_3 t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5.903 \cos(\omega_1 t) \\ -1.097 \cos(\omega_2 t) \\ 0.194 \cos(\omega_3 t) \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 3.325 \sin(\omega_1 t) \\ -1.066 \sin(\omega_2 t) \\ -0.329 \sin(\omega_3 t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5.903 \cos(\omega_1 t) \\ -1.097 \cos(\omega_2 t) \\ 0.194 \cos(\omega_3 t) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Una volta calcolati questi risultati, è possibile determinare il movimento di ogni piano in vibrazione libera a partire dalla relazione di sovrapposizione $\{s(t)\} = [\Phi]\{Y(t)\}$. E' evidente che il movimento di ogni piano dipende dal contributo di tutte le frequenze naturali della struttura.

ESEMPIO E13.2 - Si calcoli la risposta della struttura precedente ad un impulso sinusoidale creato da un'esplosione. Il carico si può esprimere nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} = 2500 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi t}{t_1}\right) [kN] \quad \text{dove} \quad \begin{cases} t_1 = 0.02 \text{ s} \\ -\frac{t_1}{2} < t < \frac{t_1}{2} \end{cases}$$

Per questo carico di breve durata si può supporre che la risposta di ogni modo sia una vibrazione libera la cui ampiezza è definita dall'impulso sinusoidale rappresentato nella fig.5.6. All'inizio della risposta è possibile trascurare lo smorzamento e la risposta modale può essere espressa con la seguente equazione:

$$Y_i(t) = D_i \frac{F_i}{\mathcal{K}_i} \sin(\omega_i t) \quad (\text{E13.2.1})$$

dove

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{M}_i \omega_i^2 \quad \{\mathcal{F}_i(t)\} = \{\phi\}_i^T \{F(t)\} = \{\phi\}_i^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} 2500 [kN]$$

Utilizzando i valori riassunti nell'esempio E13.1 si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{K}_1 \\ \mathcal{K}_2 \\ \mathcal{K}_3 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 1.813 & 0 & 0 \\ 0 & 2.474 & 0 \\ 0 & 0 & 22.596 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 14.52^2 \\ 31.05^2 \\ 46.1^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 76500 \\ 477000 \\ 9603900 \end{bmatrix} \left[\frac{kN}{m} \right] \quad (\text{E13.2.2})$$

$$\{F(t)\} = [\Phi]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} 2500 [kN] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.649 & 0.302 \\ 1.000 & -0.607 & -0.679 \\ 1.000 & -2.542 & 2.440 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2500 \\ 5000 \\ 5000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7252 \\ -3928 \\ 1989 \end{Bmatrix} [kN] \quad (\text{E13.2.3})$$

I rapporti tra la durata dell'impulso t_1 ed i periodi T_i valgono:

$$\begin{Bmatrix} \frac{t_1}{T_1} \\ \frac{t_1}{T_2} \\ \frac{t_1}{T_3} \end{Bmatrix} = \frac{t_1}{2\pi} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \frac{0.02}{2\pi} \begin{Bmatrix} 14.52 \\ 31.05 \\ 46.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0462 \\ 0.0988 \\ 0.1467 \end{Bmatrix}$$



Poiché la frequenza $\bar{\omega}$ del carico applicato vale:

$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{t_1} = 157.08$$

i rapporti delle frequenze valgono:

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \bar{\omega} \begin{Bmatrix} 1/\omega_1 \\ 1/\omega_2 \\ 1/\omega_3 \end{Bmatrix} = 157.08 \begin{Bmatrix} 1/14.52 \\ 1/31.05 \\ 1/46.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.818 \\ 5.059 \\ 3.407 \end{Bmatrix}$$

Per questo tipo di carico i fattori modali d'amplificazione dinamica si trovano con l'eq.(5.6b):

$$D = \left| \frac{2\beta}{(1 - \beta^2)} \cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) \right| \quad (5.6b)$$

da cui:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1845 \\ 0.3917 \\ 0.5752 \end{Bmatrix} \quad (E13.2.4)$$

Sostituendo le eq.(E13.2.2) e (E13.2.4) nell'eq.(E13.2.1) si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1 \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{K}_1} \sin(\omega_1 t) \\ D_2 \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{K}_2} \sin(\omega_2 t) \\ D_3 \frac{\mathcal{F}_3}{\mathcal{K}_3} \sin(\omega_3 t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17.5 \cdot \sin(14.52 t) \\ -3.23 \cdot \sin(31.05 t) \\ 0.12 \cdot \sin(46.1 t) \end{Bmatrix} [mm] \quad (E13.2.5)$$

Si noterà che lo spostamento dell'ultimo piano è semplicemente la somma dei contributi modali della eq.(E13.2.5) perché ogni modo ha un'ampiezza unitaria nella sommità della struttura:

$$\{s(t)\} = [\Phi]\{Y(t)\} = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 0.649 & -0.607 & -2.542 \\ 0.302 & -0.679 & 2.440 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{Bmatrix}$$

Viceversa, per il secondo piano, è necessario considerare lo spostamento modale relativo: l'espressione di sovrapposizione modale diventa quindi:

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{2j} Y_j(t) = 0.649 \cdot Y_1(t) - 0.607 \cdot Y_2(t) - 2.542 \cdot Y_3(t) = \\ &= 0.649 \cdot 17.5 \sin(14.52 t) + 0.607 \cdot 3.23 \sin(31.05 t) - 2.542 \cdot 0.12 \sin(46.1 t) = \\ &= 11.349 \sin(14.52 t) + 1.957 \sin(31.05 t) - 0.303 \sin(46.1 t) [mm] \end{aligned} \quad (E13.2.6)$$

Per quanto riguarda le forze elastiche prodotte nella struttura dal carico in esame, esse sono date dall'eq.(13.26) e per questo sistema a masse concentrate possono essere calcolate per il secondo piano come segue:

$$\begin{aligned} f_{s_2}(t) &= \sum_{j=1}^3 m_2 \omega_j^2 Y_j(t) \phi_{2j} = \\ &= 300 \cdot [14.52^2 \cdot 17.5 \sin(14.52 \cdot t) \cdot 0.649 + 31.05^2 \cdot 3.23 \sin(31.05 \cdot t) \cdot 0.607 - 46.1^2 \\ &\quad \cdot 0.12 \sin(46.1 \cdot t) \cdot 2.542] = \\ &= \{718 \cdot \sin(14.52 \cdot t) + 567 \cdot \sin(31.1 \cdot t) - 194 \cdot \sin(46.1 \cdot t)\} [kN] \end{aligned} \quad (E13.2.7)$$



Un confronto delle eq.(E13.2.6) e (E13.2.7) mostra che il contributo dei modi di ordine superiore è più importante per le forze che per gli spostamenti.

ESEMPIO E13.3 - Per la struttura dell'esempio E12.1 si può definire esplicitamente una matrice di smorzamento in modo che i fattori di smorzamento del 1° e del 3° modo siano uguali al 5% dello smorzamento critico. Supponendo uno smorzamento di Rayleigh $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$, si possono calcolare i fattori di proporzionalità α e β utilizzando i dati dell'esempio E13.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 \\ 1 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\xi_1\omega_1 \\ 2\xi_2\omega_2 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\alpha \cong 1.10$$

$$\beta \cong 0.00165$$

Quindi: $[C] = 1.1[M] + 0.00165[K]$. Se si utilizzano le matrici dell'esercizio si ottiene:

$$[C] = \begin{bmatrix} 419 & -198 & 0 \\ -198 & 925 & -396 \\ 0 & -396 & 1432 \end{bmatrix} \left[kN \frac{s}{m} \right]$$

Si calcoli il fattore di smorzamento che questa matrice fornisce al 2° modo. Utilizzando la formula:

$$\alpha + \beta\omega_2^2 = 2\xi_2\omega_2$$

si ottiene:

$$\xi_2 = \frac{\alpha + \beta\omega_2^2}{2\omega_2} = \frac{1.10 + 0.00165 \cdot 31.05^2}{2 \cdot 31.05} = 4.34\%$$

Quindi, non ostante siano stati specificati solo i coefficienti di smorzamento del 1° e del 3° modo, anche per il 2° modo si trova un valore di smorzamento ragionevole.