Dr. Jorge Vitória
Università degli Studi di Cagliari, 2020/2021
Corso di Laurea in Matematica

Esercizi per il Corso di ALGEBRA 2 - PARTE 2

Foglio 1
30 aprile 2021

Cominciamo con qualche esercizi di revisione del materiale precedente sugli anelli.

1. Sia A un anello e x un elemento di A. Si dimostri che se esistono y e z in A tali che $xy = 1_A = zx$, allora $y = z$.

2. Si dimostri che:

   (a) qualsiasi elemento invertibile di un anello A non è un divisore di zero;

   (b) un anello di divisione non ha divisori di zero;

   (c) un campo è un dominio di integrità.

3. Per ogni n in $\mathbb{Z}$ si consideri il seguenti sotto insieme di $\mathbb{C}$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{x \in \mathbb{C} \colon x = a + b\sqrt{n},\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

   (a) Si dimostri che $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$ e che, quindi, è un dominio di integrità.

   (b) Per $n = -1$ abbiamo l'anello $\mathbb{Z}[i]$: gli interi di Gauss.

      i. Si dimostri che se un elemento $a + bi$ di $\mathbb{Z}[i]$ è invertibile, allora $a^2 + b^2 = 1$;

      ii. Si determinino tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$.

4. Sia A un anello commutativo. Dato x in A si consideri l'insieme

$$\langle x \rangle = \{y \in A \colon \exists a \in A \colon y = xa\}$$

   (a) Si dimostri che $\langle x \rangle$ è il più piccolo ideale che contiene x (detto *l'ideale generato da* x).

   (b) Si dimostri che x è invertibile se e solo se $\langle x \rangle = A$.

   (c) Si dimostri che A è un campo se e solo se gli unici ideali di A sono 0 e A.

Adesso ci rivolgiamo ai nuovi contenuti.

5. Si dimostri che, dato un dominio A, si ha che $A[x]^* = A^*$.

6. Si dimostri che, comunque, per ogni anello commutativo B, abbiamo la disuguaglianza $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$ per ogni f e ogni g in B.

7. Si trovi un'esempio di un esempio di un anello commutativo A e un elemento f di $A[x]$ tale che $\deg(f) \geq 1$ e f è invertibile.

8. Si dimostri che

   (a) $(\mathbb{Z}, \delta = |-|)$ è un dominio euclideo, dove $|-|$ è la funzione che ad un intero associa il suo valore assoluto.

   (b) Un anello A con una valutazione euclidea costante $\delta \colon A^* \longrightarrow \mathbb{N}_0$ è un dominio euclideo se e solo se A è un campo.

9. Si calcoli la divisione di f per g:
   (a) $f = 2x^5 + 3x^4x + 1$, $g = 3x^3 + x - 3$ su $\mathbb{Q}[x]$;
   (b) $f = 2x^5 + 3x^4x + 1$, $g = 3x^3 + x - 3$ su $\mathbb{Z}_5[x]$;
   (c) $f = 2x^4 - x + 1$, $g = -x^2 + 2x - 1$ su $\mathbb{Z}_3[x]$.

10. Sia A un dominio e f, g due polinomi in $A[x]$. Si dimostri che se il coefficiente direttivo di g è invertibile, allora esistono polinomi q e r in $A[x]$ tali che $f = qg + r$, dove $r = 0$ oppure $\deg(r) < \deg(g)$.

11. Sia A un dominio euclideo con valutazione δ e sia I un ideale di A. Si consideri la funzione

$$\theta\colon \{x \in A\colon x = 0 \vee (\delta(x) < \delta(y),\ \forall y \in I)\} \longrightarrow A/I$$

   definata da $\theta(x) = x + I$.
   (a) Si dimostri che θ è suriettiva.
   (b) Si dimostri che se $A = \mathbb{K}[x]$ e $\delta = \deg$, dove $\mathbb{K}$ è un campo, allora θ è una biiezione.

12. Si calcoli la cardinalità dei seguenti anelli:
   (a) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3 - x^2\rangle$;
   (b) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^6 + x^2 - 2\rangle$;
   (c) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^7 - 2\rangle$.

13. Sia A un anello commutativo.
   (a) Si verifichi che la relazione di associazione fra gli elementi di A è una relazione di equivalenza;
   (b) Si dimostri che, se A è un dominio, allora due elementi a e b di A sono associati se e solo se esiste una unità u di A tale che $a = bu$.
   (c) Si dimostri che, se A è un dominio e $\delta\colon A \setminus \{0\}$ è una funzione che soddisfa l'assioma (3) nella definizione di dominio euclideo, allora la funzione $\gamma\colon A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definita da $\gamma(a) = \min_{x \in A\setminus\{0\}} \delta(xa)$ è una valutazione euclidea su A.
   (d) Si dimostri che, se A è un dominio euclideo con una valutazione δ, per due elementi a e b di A si ha che se $a|b$ e $\delta(a) = \delta(b)$ allora a è associato a b.