



Esercitazione di Analisi e Controllo dei Sistemi Multivariabili – n°4

Si consideri un motore in corrente continua a magneti permanenti, calettato ad un carico meccanico mediante un riduttore con rapporto di trasmissione 43:1. La misura dell'angolo di rotazione del motore è rilevata mediante un encoder con risoluzione 1/500 di giro.

La tensione di alimentazione del motore è fornita da un alimentatore saturato a ± 24 V e caratterizzato da una amplificazione $K_A = 50 \div 500$ V/rad.

Al fine di limitare gli effetti del rumore sulla misura e le discontinuità dovute alla risoluzione dell'encoder, la uscita di quest'ultimo è filtrata con un filtro passa basso con costante di tempo $\tau_f = 50$ ms.

Le caratteristiche del motore, comprese quelle del carico associato sono riportate di seguito:

- Tensione nominale, $V_n = 24$ V
- Resistenza ai morsetti, $R_a = 0.4$ W
- Induttanza ai morsetti, $L_a = 0.8$ mH
- Costante di tensione indotta, $k_e = 0.31$ V s rad⁻¹
- Costante di coppia, $k_t = 0.32$ Nm A⁻¹
- Inerzia del motore e del carico, $J_m = 0.13$ kg m²
- Coefficiente di attrito newtoniano sui cuscinetti, $B_m = 0.06$ Nm s rad⁻¹

Il comportamento del motore è rappresentato dal sistema dinamico sotto riportato

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-B_m}{J_m} & \frac{k_t}{J_m} \\ 0 & \frac{-k_e}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

$x_1 = \theta_m \quad x_2 = \omega_m \quad x_3 = i_a \quad u = v_a$

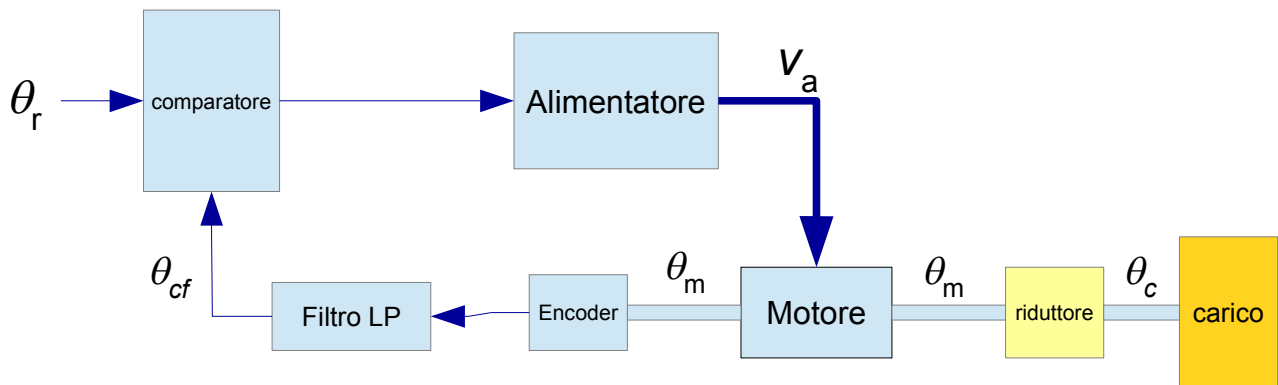
Valutare qualitativamente attraverso il “*Criterio del cerchio*” e della “*Funzione Descrittiva*” le proprietà di stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare dell'amplificazione K_A ;

Il motore ha calettato il carico, attraverso il riduttore ad ingranaggi, da un lato dell'albero e l'encoder dall'altro lato.

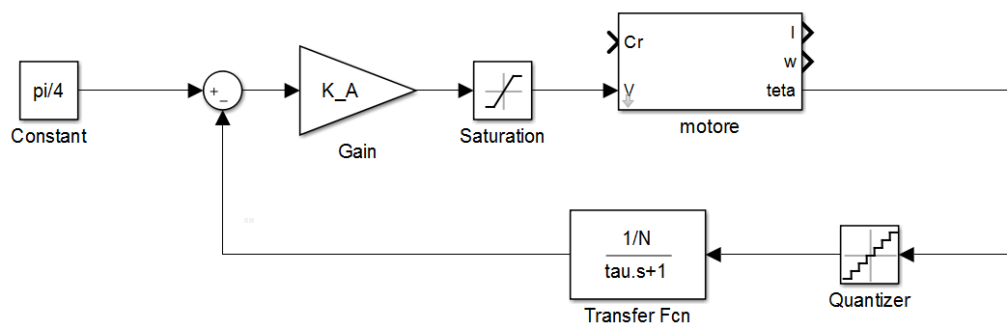
La misura dell'encoder viene filtrata da un filtro passa-basso che, oltre a ridurre l'influenza delle frequenze non di interesse provvede anche all'adattamento del valore dell'angolo misurato sull'albero del motore per riportarlo al valore dell'angolo sull'asse del carico.

L'uscita del filtro viene confrontata con il valore di riferimento dell'angolo dell'asse del carico per valutare l'errore di posizione angolare con cui viene pilotato l'alimentatore.

Lo schema di riferimento è sotto riportato

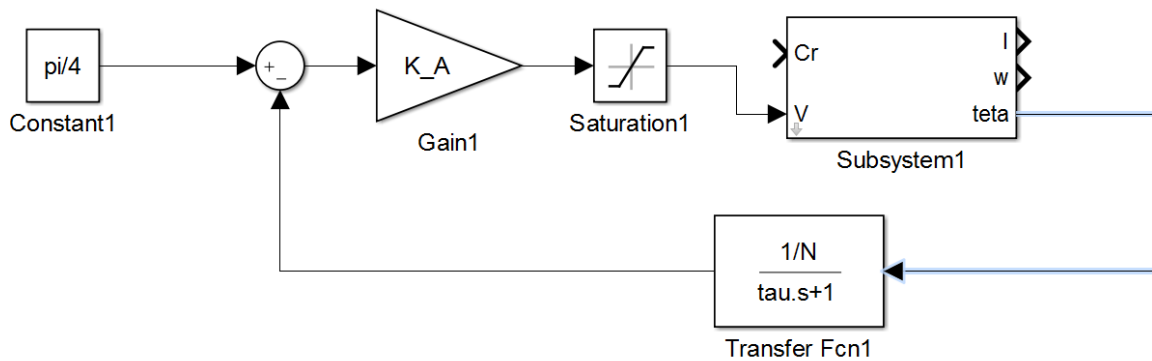


Il sistema di controllo della posizione del carico può essere schematizzato con lo schema a blocchi Simulink



Il sistema presenta due non linearità statiche e concentrate. I fenomeni energetici sono associati al solo alimentatore (Gain + Saturation) e gli effetti di quantizzazione sulla misura della posizione angolare del carico, tenendo conto del riduttore ad ingranaggi, sono pari a $1/(500 N)$, ovvero $0,29 \text{ m rad}$.

Si può quindi, in prima approssimazione, trascurare l'effetto di quantizzazione e analizzare il sistema di controllo secondo lo schema



La presenza di un riferimento costante comporta una traslazione dell'equilibrio in un punto di lavoro non nullo. Considerando la traslazione si può assimilare lo schema a quello di un sistema di Lur'é, analizzabile con le metodologie della stabilità assoluta e della funzione descrittiva.

La saturazione è una non linearità settoriale compresa tra le rette di coefficiente angolare $k_1=0$ e $k_2=K_A$; pertanto il cerchio degenera in un semipiano limitato a destra in $-1/k_2$. Il semiasse reale a sinistra del punto $-1/k_2$ è il diametro del cerchio degenerare.

Tenendo conto della variabilità di K_A , $-0,02 \leq -1/k_2 \leq -0,002$.

La stabilità assoluta del punto di funzionamento può essere analizzata mediante il criterio del cerchio, tracciando il diagramma di Nyquist del blocco dinamico lineare nel piano complesso e valutando la sua relazione con il cerchio degenerare ed il suo diametro.

Comandi MATLAB

Definizione del modello del motore

```
>> syms Ra La ke kt Jm Bm N tau
>> A=[0 1 0; 0 -Bm/Jm kt/Jm; 0 -ke/La -Ra/La]
```

```
A =
[ 0, 1, 0 ]
[ 0, -Bm/Jm, kt/Jm]
[ 0, -ke/La, -Ra/La]
```

```
>> B=[0;0; 1/La]
```

```
B =
0
0
```

```
1/La
>> C=[1 0 0];
>> D=0;
```

Calcolo della funzione di trasferimento del motore

```
>> Ra=0.4;
>> La=0.8e-3;
>> kt=0.32;
>> ke=0.31;
>> Jm=0.13;
>> Bm=0.06;
>> tau=0.05;
>> N=43;
>> Aa=eval(A)
```

```
Aa =
    0    1.0000    0
    0   -0.4615    2.4615
    0  -387.5000  -500.0000
```

```
>> Ba=eval(B)
```

```
Ba =
    0
    0
   1250
```

```
>> [Num,Den]=ss2tf(Aa,Ba,C,D);
>> G=tf(Num,Den)
```

```
G =
      3077
-----
s^3 + 500.5 s^2 + 1185 s
```

```
>> eig(Aa)
ans =
    0
   -2.3783
  -498.0832
```

```
>> roots(Den)
ans =
    0
  -498.0832
   -2.3783
```

è evidente come gli autovalori della matrice della dinamica del sistema coincidano con i poli edlla funzione di trasferimento tra tensione di alimentazione e posizione angolare del motore.

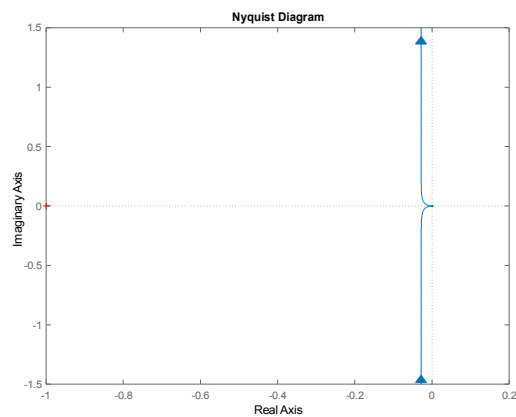
Calcolo della funzione di trasferimento del filtro

```
>> F=tf(1/N,[tau 1])
```

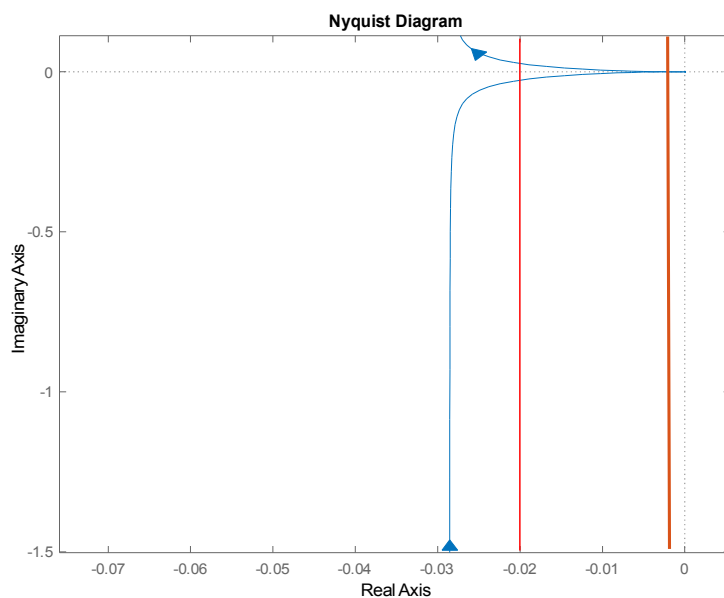
```
F =  
 0.02326  
-----  
 0.05 s + 1
```

Tracciamento del diagramma di Nyquist della dinamica lineare

```
>> nyquist(G*F)
```

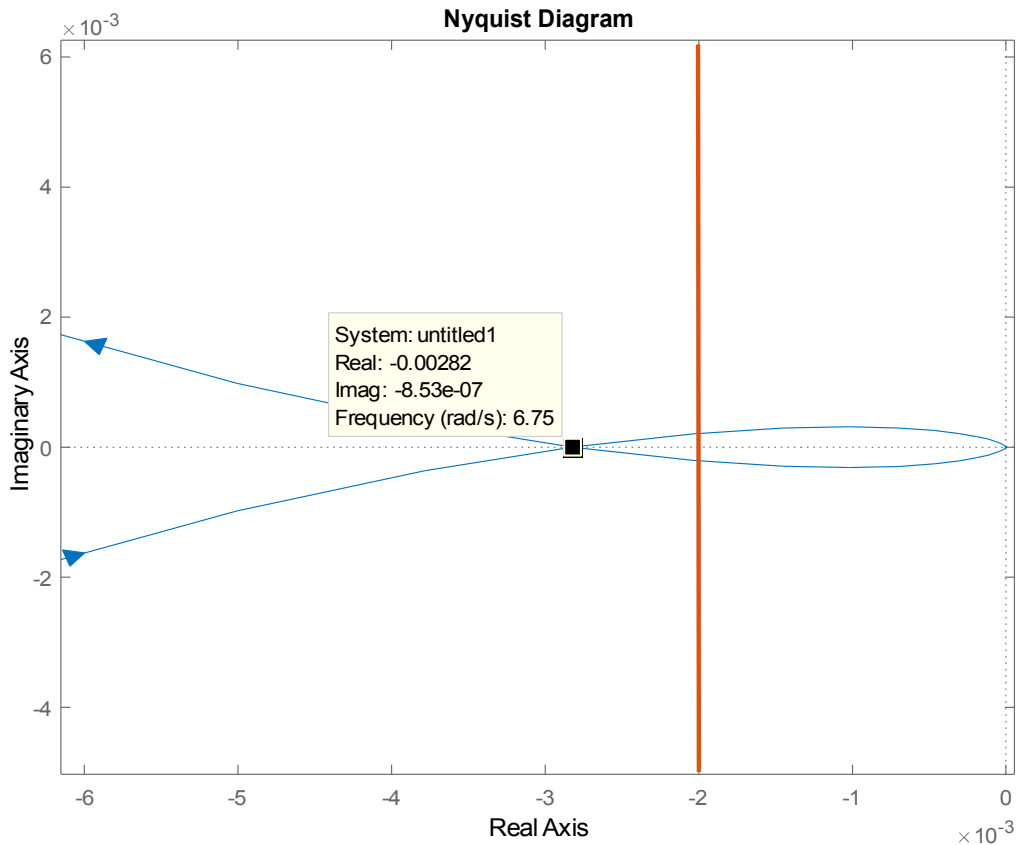


Per verificare le condizioni di stabilità è necessario confrontare il diagramma di Nyquist con le possibili posizioni del cerchio degenere.



Il diagramma di Nyquist interseca sempre il cerchio degenere e quindi non è possibile affermare in nessun caso che il punto di funzionamento sia assolutamente stabile. Affinché si possa affermare

l'assoluta stabilità (stabilità asintotica globale) sarebbe necessario che l'amplificazione dell'alimentatore fosse inferiore a 35 V/rad.

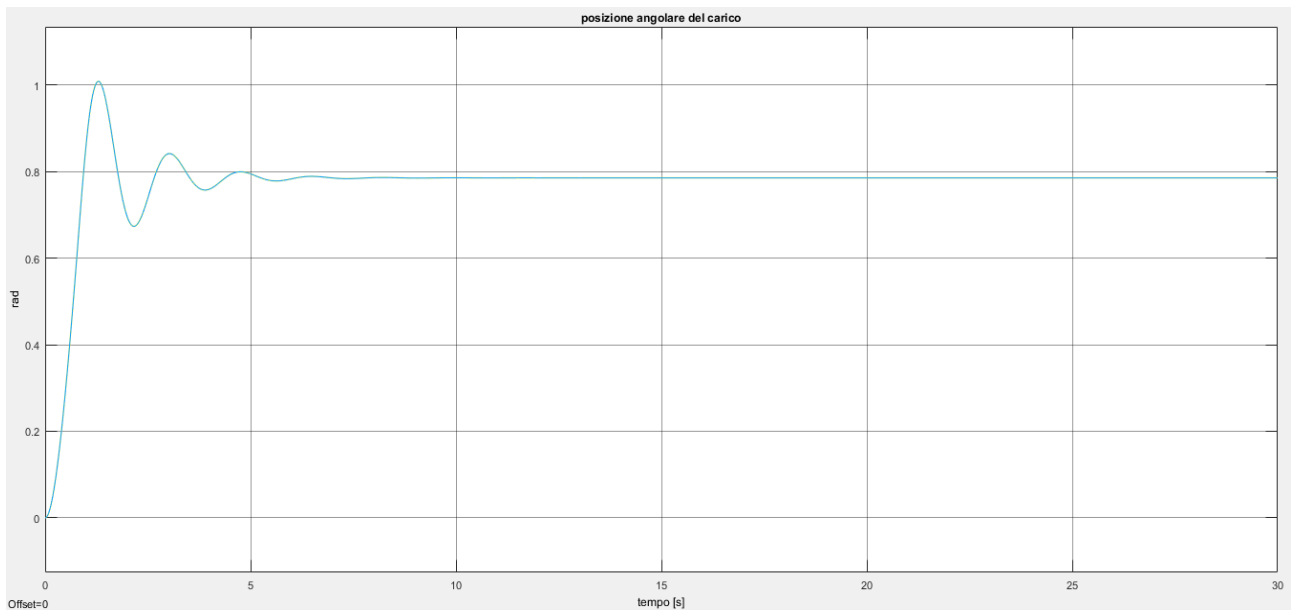


Se $KA > 1/0,00282=355$ il punto di funzionamento è sicuramente instabile in quanto è violata la condizione necessaria per l'assoluta stabilità.

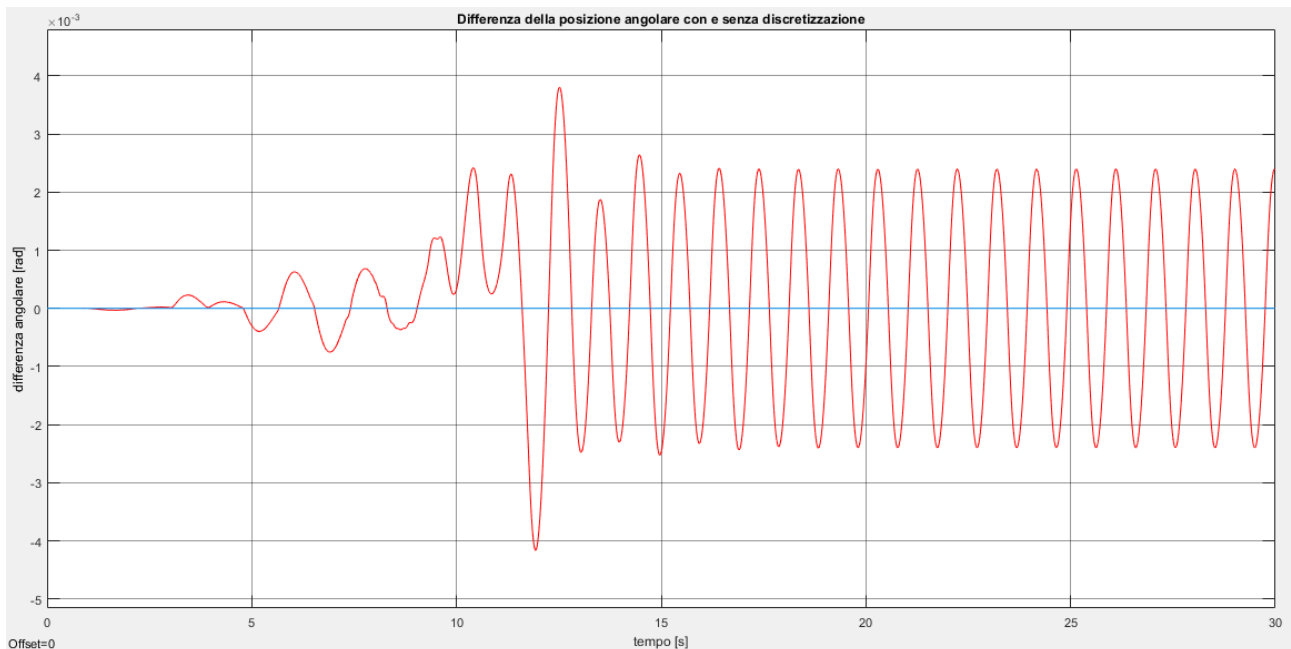
Impostando $KA = 200$, la simulazione mediante Simulink evidenzia come l'andamento della posizione dell'albero del carico sia praticamente la stessa considerando o meno l'influenza della discretizzazione della misura dovuta all'encoder.

Analizzando la differenza tra le due simulazioni si nota un errore periodico a regime che si instaura al termine del transitorio.

Bozza soluzione esercitazione n° 4 di Analisi e controllo dei sistemi multivariabili



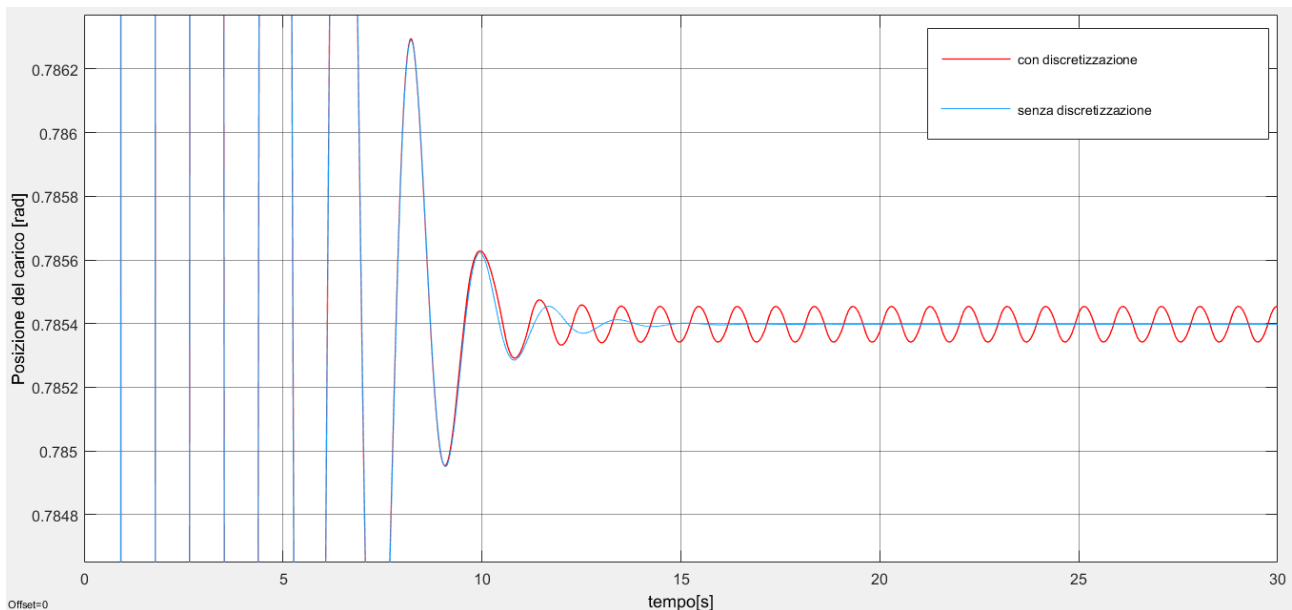
Si osserva anche, come pur non essendo soddisfatto il criterio edl cerchio in quanto il diagramma di Nyquist interseca il cerchio degenere, che il sistema tende a stabilizzarsi nel punto di funzionamento, senza oscillazioni quando si consideri il sistema in assenza della discretizzazione.



Ciò è evidente modificando la scale delle ordinate nell'andamento delle posizioni angolari del carico.

Quando l'amplificazione dell'alimentatore è bassa, l'alimentatore si comporta come un blocco lineare e quindi l'effetto delle oscillazioni dovute alla discretizzazione è evidente.

Bozza soluzione esercitazione n° 4 di Analisi e controllo dei sistemi multivariabili



Impostando $KA = 400$, la condizione necessaria per la stabilità assoluta è violata e quindi il punto di funzionamento sarà instabile.

Possiamo valutare le oscillazioni utilizzando il metodo della funzione descrittiva.

Considerando la sola saturazione come non linearità concentrata, la sua funzione descrittiva è

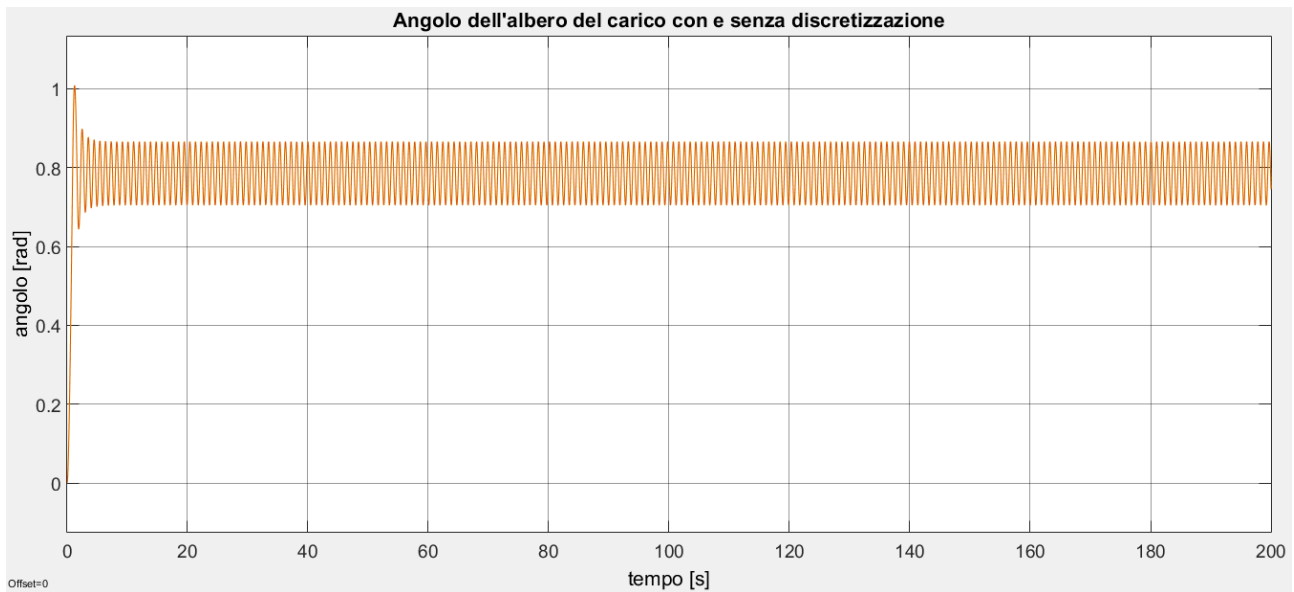
$$N(U) = \begin{cases} k & U \leq \frac{M}{k} \\ \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{M}{kU}\right) + \left(\frac{M}{kU}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{M}{kU}\right)^2} \right] & U > \frac{M}{k} \end{cases}$$

La rappresentazione dell'opposto del reciproco della funzione descrittiva della saturazione nel piano complesso è il semiasse negativo a partire dall'ascissa $-1/k$.

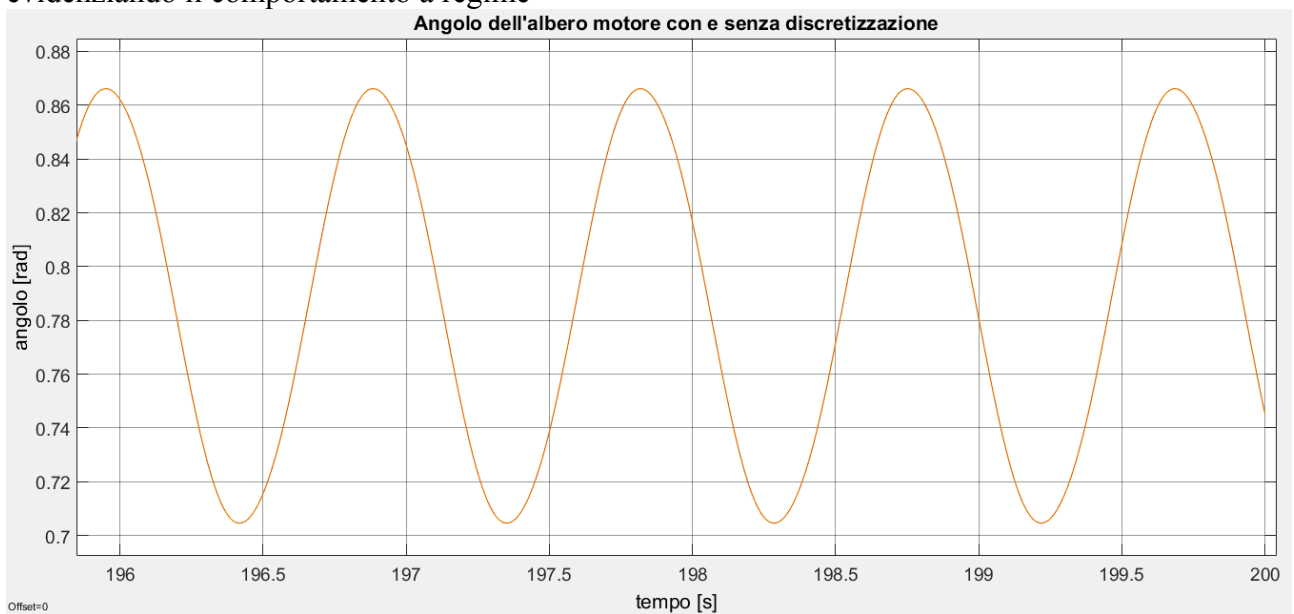
Quindi il ciclo limite che si può instaurare ha una pulsazione $\omega_c = 6,75$ rad/s ed una ampiezza che è computabile dalla relazione $\frac{-1}{N(U)} = -|P(j\omega_c)| = -0,00282$

da cui si ottiene $U = 0,0761$.

La simulazione con $KA = 400$ fornisce i seguenti diagrammi



evidenziando il comportamento a regime



Dal diagramma si osserva un periodo di circa 1 s, compatibile con la $\omega_c = 6,75$ rad/s. L'oscillazione è compresa tra 0,712 e 0,863 rad (circa), per cui l'ampiezza della sollecitazione a regime è circa 0,0755 rad, compatibile con quella calcolata mediante il metodo della funzione descrittiva, ed un valore medio di 0.7875 rad = 45.1204 deg.

Comparando l'andamento delle simulazioni con e senza discretizzazione si evidenzia una differenza dovuta alla presenza della non linearità trascurata rappresentando il sistema come un sistema di Lur'é.

Bozza soluzione esercitazione n° 4 di Analisi e controllo dei sistemi multivariabili

