



CAP.11 – DETERMINAZIONE DELLE MATRICI CHE CARATTERIZZANO LE PROPRIETÀ DI UNA STRUTTURA.

11.1 MATRICI DI RIGIDEZZA

In questo paragrafo si richiamerà la procedura per il calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento piano di tipo "trave" a due nodi sviluppato seguendo la teoria di Eulero-Bernoulli che trascura l'effetto del taglio. La matrice sarà utilizzata in seguito per eseguire alcuni esercizi di dinamica strutturale costruendo modelli con pochi gradi di libertà.

Per la formulazione dell'elemento si ipotizza che l'asse della trave giaccia nel piano $x - y$ e sia allineato con l'asse x , come rappresentato nella fig.11.1.

L'elemento unisce due nodi in ognuno dei quali si trovano tre gradi di libertà: lo spostamento assiale u in direzione x , quello trasversale v in direzione y e la rotazione ϑ_z intorno all'asse z . La lunghezza della trave è pari a L , l'area della sua sezione trasversale è pari ad A e la sua rigidezza flessionale è pari a EI_z .

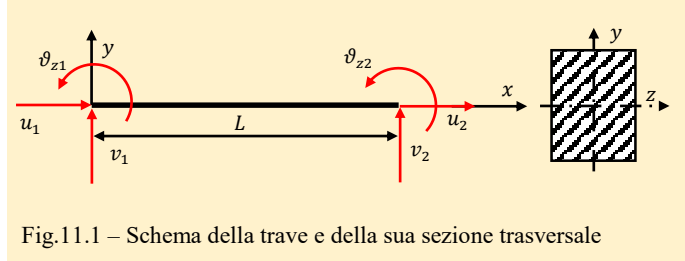


Fig.11.1 – Schema della trave e della sua sezione trasversale

Gli spostamenti dei punti appartenenti all'asse della trave si possono esprimere in funzione degli spostamenti nodali utilizzando delle funzioni polinomiali $N(x)$ che prendono il nome di funzioni di forma. Per descrivere lo spostamento assiale $u(x, t)$ si utilizza la seguente equazione:

$$u(x, t) = N_1^L(x)u_1(t) + N_2^L(x)u_2(t) = \{N_1^L(x) \quad N_2^L(x)\} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \quad (11.1)$$

dove le funzioni di forma sono i polinomi lineari di Lagrange:

$$N_1^L(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2^L(x) = \frac{x}{L} \quad (11.2)$$

Per descrivere gli spostamenti trasversali $v(x)$ e le rotazioni $\vartheta_z(x)$ intorno all'asse z si utilizzano i polinomi cubici di Hermite:

$$N_1^H(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad N_2^H(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad N_3^H(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad N_4^H(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (11.3)$$

Gli spostamenti trasversali $v(x, t)$ si trovano applicando la formula seguente:

$$v(x, t) = \{N_1^H(x) \quad N_2^H(x) \quad N_3^H(x) \quad N_4^H(x)\} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \vartheta_{z1}(t) \\ v_2(t) \\ \vartheta_{z2}(t) \end{Bmatrix} \quad (11.4)$$

mentre le rotazioni $\vartheta_z(x)$ si trovano derivando la relazione precedente rispetto alla coordinata x :

$$\vartheta(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \left\{ \frac{dN_1^H(x)}{dx} \quad \frac{dN_2^H(x)}{dx} \quad \frac{dN_3^H(x)}{dx} \quad \frac{dN_4^H(x)}{dx} \right\} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \vartheta_{z1}(t) \\ v_2(t) \\ \vartheta_{z2}(t) \end{Bmatrix} \quad (11.5)$$

L'energia elastica accumulata nel sistema può essere divisa in due contributi, π_E^N dovuto solo alle azioni normali e π_E^F prodotto dalla flessione. Ipotizzando la trave prismatica e ricordando che lo stato di sforzo è monoassiale si ottiene:

$$\pi_E = \int_{vol} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \cdot dVol = \pi_E^N + \pi_E^F = \int_0^L \frac{1}{2} (E \varepsilon_N) \varepsilon_N \cdot A dx + \int_{vol} \frac{1}{2} \left(\frac{M_z(x, t)y}{I_z} \right) \left(\frac{M_z(x, t)y}{EI_z} \right) \cdot dVol \quad (11.6)$$



dove E è il modulo di Young del materiale, $\varepsilon_N = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ è la deformazione assiale causata dall'azione normale, I_z è il momento principale d'inerzia della sezione trasversale della trave calcolato rispetto all'asse z , $M_z(x, t)$ è il momento flettente intorno all'asse z (in generale funzione della posizione x e del tempo t), $\sigma_x(x, y, t) = \frac{M_z(x,t)y}{I_z}$ è lo sforzo assiale causato dal momento flettente (la così detta formula di Navier).

Ricordando le formule seguenti:

$$I_z = \int_A y^2 dA \qquad EI_z \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = -M_z(x, t)$$

l'energia elastica flessionale π_E^F assume la forma:

$$\pi_E = \int_{Vol} \frac{1}{2} \left(\frac{M_z y}{I_z} \right) \left(\frac{M_z y}{EI_z} \right) dVol = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{M_z^2}{EI_z^2} \right) \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{M_z^2}{EI_z} \right) dx = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

In definitiva l'energia elastica accumulata nella trave vale:

$$\pi_E = \pi_E^N + \pi_E^F = \frac{EA}{2} \int_0^L \varepsilon_N^2 dx + \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \qquad (11.7)$$

Si ricorda che il campo di spostamento è rappresentato nelle formule (11.1), (11.4) e (11.5), quindi si ottiene:

$$\varepsilon_N(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \left\{ \frac{dN_1^L(x)}{dx} \quad \frac{dN_2^L(x)}{dx} \right\} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = [B_N(x)] \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \qquad (11.8)$$

Poiché gli spostamenti nodali sono funzione solo del tempo, la loro espressione si può portare fuori dall'integrale; di conseguenza si ottiene:

$$\pi_E^N = \frac{EA}{2} \int_0^L \varepsilon_N^2 dx = \{u_1 \quad u_2\} \frac{EA}{2} \int_0^L [B_N]^T [B_N] dx \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Poiché in questo caso specifico il vettore $[B_N]$ non dipende dalla coordinata x si ottiene:

$$\pi_E^N = \{u_1 \quad u_2\} \frac{EA}{2L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{u_1 \quad u_2\} \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (11.9)$$

Per quanto riguarda la parte flessionale è necessario calcolare la curvatura:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \left\{ \frac{d^2 N_1^H(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2^H(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3^H(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4^H(x)}{dx^2} \right\} \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \vartheta_{z1}(t) \\ v_2(t) \\ \vartheta_{z2}(t) \end{Bmatrix} = [B_F(x)] \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ \vartheta_{z1}(t) \\ v_2(t) \\ \vartheta_{z2}(t) \end{Bmatrix} \qquad (11.10)$$

La matrice $[B_F]$ risulta quindi:

$$[B_F(x)] = \left\{ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right\} \qquad (11.11)$$

Poiché gli spostamenti nodali dipendono solo dal tempo, la loro espressione si può portare fuori dall'integrale; di conseguenza l'energia elastica flessionale π_E^F assume la forma:

$$\pi_E^F = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \{v_1 \quad \vartheta_{z1} \quad v_2 \quad \vartheta_{z2}\} \frac{EI_z}{2} \int_0^L [B_F]^T [B_F] dx \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix} \qquad (11.12)$$



La matrice di rigidezza si trova calcolando la derivata dell'energia elastica rispetto ai parametri nodali; di conseguenza si ottiene:

$$\frac{\partial \pi_E^N}{\partial \{s_n^N\}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [k_N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [k_N] \cdot \{s_n^N\} \quad \text{dove} \quad \{s_n^N\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial \pi_E^F}{\partial \{s_n^F\}} = EI_z \int_0^L [B_F]^T [B_F] dx \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix} = [k_F] \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix} = [k_F] \cdot \{s_n^F\} \quad \text{dove} \quad \{s_n^F\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (11.14)$$

Eseguendo l'integrale indicato nell'eq.(11.14) risulta che la matrice di rigidezza flessionale è la seguente:

$$[k_F] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (11.15)$$

Le due matrici possono essere assemblate in modo da formare la matrice di rigidezza dell'elemento trave:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

Il vettore degli spostamenti nodali corrispondente è quindi: $\{s_n\} = \{u_1 \quad v_1 \quad \vartheta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \vartheta_{z2}\}^T$.

Per calcolare la matrice di rigidezza di un elemento "trave" disposto nel piano xy ma ruotato di un angolo α intorno all'asse z è necessario seguire la seguente procedura.

Per passare dal sistema di riferimento locale (ruotato in senso antiorario dell'angolo α) a quello globale è necessario pre-moltiplicare il vettore delle coordinate globali per la matrice di rotazione $[R]$:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_L = [R] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_G \quad (11.17)$$

Indicando con $\{s_i\}_L$ e $\{s_i\}_G$ il vettore degli spostamenti generalizzati relativi al nodo i -esimo espressi rispettivamente nel sistema di riferimento locale e globale, si può scrivere la seguente relazione:

$$\{s_i\}_L = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vartheta_{zi} \end{Bmatrix}_L = [R] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vartheta_{zi} \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vartheta_{zi} \end{Bmatrix}_G = [R] \{s_i\}_G \quad (11.18)$$

Per ruotare l'intero vettore degli spostamenti generalizzati è necessario il seguente prodotto:



$$\{s\}_L = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_{z1} \end{Bmatrix}_G \\ [R] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix}_G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \{s\}_G \quad (11.19)$$

dove [0] indica una matrice nulla di dimensione 3×3 . Una relazione simile si può scrivere per il vettore delle forze generalizzate espresse nel sistema di riferimento locale $\{F_e\}_L$ e globale $\{F_e\}_G$:

$$\{F_e\}_L = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \{F_e\}_G = \begin{Bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix}_G \\ [R] \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}_G \end{Bmatrix} \quad (11.20)$$

Indicando con $[k_e]_L$ la matrice di rigidezza elementare espressa dall'eq.(11.16) nel sistema di riferimento locale, si può scrivere:

$$[k_e]_L \{s\}_L = \{F_e\}_L \quad (11.21)$$

Utilizzando le eq.(11.19) e (11.20) si ottiene:

$$[k_e]_L \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \{s\}_G = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \{F_e\}_G$$

Premoltiplicando entrambe i membri dell'ultima equazione per l'inversa della matrice di rotazione si ottiene:

$$\begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix}^{-1} [k_e]_L \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \{s\}_G = [k_e]_G \{s\}_G = \{F_e\}_G$$

E' possibile partizionare la matrice $[k_e]_L$ nel modo seguente:

$$[k_e]_L = \begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix}_L$$

le cui sotto matrici K_{ij}^* hanno dimensione 3×3 . In questo modo risulta che la matrice di rigidezza nel sistema di riferimento globale vale:

$$[k_e]_G = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix}_L \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]^{-1} K_{11}^* [R] & [R]^{-1} K_{12}^* [R] \\ [R]^{-1} K_{21}^* [R] & [R]^{-1} K_{22}^* [R] \end{bmatrix}_G$$

Poiché per le matrici di rotazione è valida la proprietà: $[R]^{-1} = [R]^T$, si ottiene:

$$[k_e]_G = \begin{bmatrix} [R]^T K_{11}^* [R] & [R]^T K_{12}^* [R] \\ [R]^T K_{21}^* [R] & [R]^T K_{22}^* [R] \end{bmatrix}_G$$

Una volta calcolate le singole matrici di rigidezza elementari, queste devono essere assemblate in modo da formare la matrice di rigidezza dell'intero modello. Ogni singola trave può essere divisa in tanti elementi di tipo "trave" specie quando il suo asse non è rettilineo, quando la sezione trasversale varia lungo l'asse o quando i carichi applicati hanno un andamento complesso. Nel seguito verranno proposti degli esercizi molto semplici allo scopo di studiare la dinamica strutturale: i modelli verranno realizzati con pochi elementi per limitare i gradi di libertà e poter condurre degli esempi numerici in modo relativamente semplice.



ESEMPIO 11.1 – Si calcoli la matrice di rigidezza del telaio rappresentato nella Fig.E11.1. Per semplicità si supponrà che la rigidezza assiale delle tre travi sia molto grande rispetto a quella flessionale e consenta quindi di trascurare le deformazioni assiali. In sostanza si suppone che le travi non possano allungarsi, ma possano solo inflettersi nel piano $x - y$; di conseguenza il modello possiede solo tre gradi di libertà: $u_2, \vartheta_{z2}, \vartheta_{z3}$

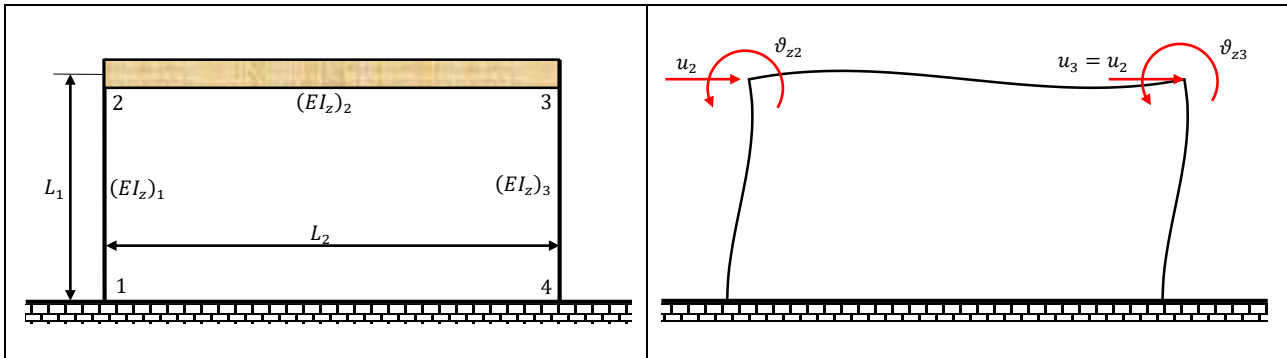


Fig.E11.1 – Modello del telaio e campo di spostamento consentito.

Nel sistema di riferimento locale (il cui asse x va dal nodo n.1 al nodo n.2) la matrice di rigidezza della colonna 1 – 2 vale:

$$[k_1]_L = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E_1 I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & -\frac{12 E_1 I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & \frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{4 E_1 I_{z1}}{L_1} & 0 & -\frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{2 E_1 I_{z1}}{L_1} \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 E_1 I_{z1}}{L_1^3} & -\frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{12 E_1 I_{z1}}{L_1^3} & -\frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & \frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{2 E_1 I_{z1}}{L_1} & 0 & -\frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{4 E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix}$$

Poiché la trave è ruotata di 90° (angolo positivo se in senso antiorario) rispetto al sistema di riferimento globale, la matrice di rotazione è la seguente:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza dell'elemento n.1 rispetto al sistema di riferimento globale vale dunque:

$$[k_1]_G = \begin{bmatrix} [R]^T K_{11}^* [R] & [R]^T K_{12}^* [R] \\ [R]^T K_{21}^* [R] & [R]^T K_{22}^* [R] \end{bmatrix}_G$$

Eseguendo il prodotto delle sotto-matrici $[R]^T K_{11}^* [R]$, $[R]^T K_{12}^* [R]$ e $[R]^T K_{22}^* [R]$ si osserva che:

$$[R]^T K_{11}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E_1 I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & \frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{4 E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 E_1 I_{z1}}{L_1^3} & 0 & -\frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{6 E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{4 E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix}$$



$$[R]^T K_{12}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{2E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & 0 & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{2E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$[R]^T K_{22}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{4E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & 0 & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{4E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza nel sistema di riferimento globale la matrice di rigidezza del primo elemento e il corrispondente vettore degli spostamenti valgono:

$$[k_1]_G = \begin{bmatrix} \frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & 0 & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & -\frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & 0 & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{4E_1 I_{z1}}{L_1} & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{2E_1 I_{z1}}{L_1} \\ -\frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & 0 & 0 & \frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & 0 & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} \\ 0 & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{2E_1 I_{z1}}{L_1} & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & \frac{4E_1 I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix} \quad \{s_1\}_G = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix}_G$$

La matrice di rigidezza dell'elemento n.2 che unisce il nodo n.2 al nodo n.3 rispetto al sistema di riferimento globale è identica a quella nel sistema di riferimento locale e vale dunque:

$$[k_2]_G = \begin{bmatrix} \frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 & 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & 0 & -\frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} \\ 0 & \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{4E_2 I_{z2}}{L_2} & 0 & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{2E_2 I_{z2}}{L_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 & 0 & \frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & 0 & \frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} \\ 0 & \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{2E_2 I_{z2}}{L_2} & 0 & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{4E_2 I_{z2}}{L_2} \end{bmatrix} \quad \{s_2\}_G = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \vartheta_{z3} \end{Bmatrix}_G$$

La matrice di rigidezza della colonna 3 – 4 (il cui asse x va dal nodo n.3 al nodo n.4) nel sistema di riferimento locale vale:

$$[k_3]_L = \begin{bmatrix} \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & -\frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} & 0 & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{2E_3 I_{z3}}{L_3} \\ -\frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 & \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{2E_3 I_{z3}}{L_3} & 0 & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix}$$

Poiché la trave è ruotata di -90° rispetto al sistema di riferimento globale, la matrice di rotazione è la seguente:



$$[R_3] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza dell'elemento n.3 rispetto al sistema di riferimento globale vale dunque:

$$[k_3]_G = \begin{bmatrix} [R]^T K_{11}^* [R] & [R]^T K_{12}^* [R] \\ [R]^T K_{21}^* [R] & [R]^T K_{22}^* [R] \end{bmatrix}_G$$

Eseguendo il prodotto delle sotto-matrici $[R]^T K_{11}^* [R]$, $[R]^T K_{12}^* [R]$ e $[R]^T K_{22}^* [R]$ si osserva che:

$$[R]^T K_{11}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & 0 & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 \\ \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix}$$

$$[R]^T K_{12}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{2E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & 0 & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 \\ -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{2E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix}$$

$$[R]^T K_{22}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & 0 & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 \\ -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza nel sistema di riferimento globale la matrice di rigidezza del terzo elemento ed il corrispondente vettore degli spostamenti nodali valgono:

$$[k_3]_G = \begin{bmatrix} \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & 0 & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & -\frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & 0 & \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 \\ \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{2E_3 I_{z3}}{L_3} \\ -\frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & 0 & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & \frac{12E_3 I_{z3}}{L_3^3} & 0 & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} \\ 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 & 0 & \frac{E_3 A_3}{L_3} & 0 \\ \frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{2E_3 I_{z3}}{L_3} & -\frac{6E_3 I_{z3}}{L_3^2} & 0 & \frac{4E_3 I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix} \quad \{s_3\}_G = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \vartheta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \vartheta_{z4} \end{Bmatrix}$$

Assemblando le matrici elementari espresse nel sistema di riferimento globale si ottiene la matrice di rigidezza globale che risulta di dimensione 12×12 in quanto in ognuno dei 4 nodi si trovano 3 gradi di libertà.

$$[K] = [k_1]_G + [k_2]_G + [k_3]_G =$$

K_{11}^1	K_{12}^1	K_{13}^1	K_{14}^1	K_{15}^1	K_{16}^1	0	0	0	0	0	0
K_{21}^1	K_{22}^1	K_{23}^1	K_{24}^1	K_{25}^1	K_{26}^1	0	0	0	0	0	0
K_{31}^1	K_{32}^1	K_{33}^1	K_{34}^1	K_{35}^1	K_{36}^1	0	0	0	0	0	0
K_{41}^1	K_{42}^1	K_{43}^1	$K_{44}^1 + K_{11}^2$	$K_{45}^1 + K_{12}^2$	$K_{46}^1 + K_{13}^2$	K_{14}^2	K_{15}^2	K_{16}^2	0	0	0
K_{51}^1	K_{52}^1	K_{53}^1	$K_{54}^1 + K_{21}^2$	$K_{55}^1 + K_{22}^2$	$K_{56}^1 + K_{23}^2$	K_{24}^2	K_{25}^2	K_{26}^2	0	0	0
K_{61}^1	K_{62}^1	K_{63}^1	$K_{64}^1 + K_{31}^2$	$K_{65}^1 + K_{32}^2$	$K_{66}^1 + K_{33}^2$	K_{34}^2	K_{35}^2	K_{36}^2	0	0	0
0	0	0	K_{41}^2	K_{42}^2	K_{43}^2	$K_{44}^2 + K_{11}^3$	$K_{45}^2 + K_{12}^3$	$K_{46}^2 + K_{13}^3$	K_{14}^3	K_{15}^3	K_{16}^3
0	0	0	K_{51}^2	K_{52}^2	K_{53}^2	$K_{54}^2 + K_{21}^3$	$K_{55}^2 + K_{22}^3$	$K_{56}^2 + K_{23}^3$	K_{24}^3	K_{25}^3	K_{26}^3
0	0	0	K_{61}^2	K_{62}^2	K_{63}^2	$K_{64}^2 + K_{31}^3$	$K_{65}^2 + K_{32}^3$	$K_{66}^2 + K_{33}^3$	K_{34}^3	K_{35}^3	K_{36}^3
0	0	0	0	0	0	K_{41}^3	K_{42}^3	K_{43}^3	K_{44}^3	K_{45}^3	K_{46}^3
0	0	0	0	0	0	K_{51}^3	K_{52}^3	K_{53}^3	K_{54}^3	K_{55}^3	K_{56}^3
0	0	0	0	0	0	K_{61}^3	K_{62}^3	K_{63}^3	K_{64}^3	K_{65}^3	K_{66}^3



Nella precedente matrice i simboli K_{ij}^n rappresentano i coefficienti che nella n -esima matrice elementare occupano la posizione i, j . Il rettangolo rosso racchiude i coefficienti appartenenti alla matrice di rigidezza del primo elemento; quello verde racchiude la matrice di rigidezza del secondo elemento; quello blu racchiude la matrice di rigidezza del terzo elemento.

Calcolata la matrice globale è necessario vincolarla: poiché il nodo n.1 e il nodo n.4 sono incastrati, i rispettivi gradi di libertà sono nulli e possono essere eliminati. La dimensione della matrice di rigidezza diventa 6×6 e quella dei corrispondenti gradi di libertà 6×1 :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{44}^1 + K_{11}^2 & K_{45}^1 + K_{12}^2 & K_{46}^1 + K_{13}^2 & K_{14}^2 & K_{15}^2 & K_{16}^2 \\ K_{54}^1 + K_{21}^2 & K_{55}^1 + K_{22}^2 & K_{56}^1 + K_{23}^2 & K_{24}^2 & K_{25}^2 & K_{26}^2 \\ K_{64}^1 + K_{31}^2 & K_{65}^1 + K_{32}^2 & K_{66}^1 + K_{33}^2 & K_{34}^2 & K_{35}^2 & K_{36}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 + K_{11}^3 & K_{45}^2 + K_{12}^3 & K_{46}^2 + K_{13}^3 \\ K_{51}^2 & K_{52}^2 & K_{53}^2 & K_{54}^2 + K_{21}^3 & K_{55}^2 + K_{22}^3 & K_{56}^2 + K_{23}^3 \\ K_{61}^2 & K_{62}^2 & K_{63}^2 & K_{64}^2 + K_{31}^3 & K_{65}^2 + K_{32}^3 & K_{66}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix} \quad \{S\}_G = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_{22} \\ u_3 \\ v_3 \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix}$$

Come detto nel testo dell'esercizio, per semplificare la matrice si suppone che la rigidezza assiale degli elementi sia molto elevata e di conseguenza che le travi non possano allungarsi. Ciò significa che si impongono i seguenti vincoli:

- 1) $v_2 = v_3 = 0$ (perché le colonne 1 - 2 e 3 - 4 non devono allungarsi);
- 2) $u_2 = u_3$ (perché l'asta orizzontale 2 - 3 non deve allungarsi).

Il primo vincolo comporta l'eliminazione della 2° e 5° riga e della 2° e 5° colonna:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{44}^1 + K_{11}^2 & K_{46}^1 + K_{13}^2 & K_{14}^2 & K_{16}^2 \\ K_{64}^1 + K_{31}^2 & K_{66}^1 + K_{33}^2 & K_{34}^2 & K_{36}^2 \\ K_{41}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 + K_{11}^3 & K_{46}^2 + K_{13}^3 \\ K_{61}^2 & K_{63}^2 & K_{64}^2 + K_{31}^3 & K_{66}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix} \quad \{S\}_G = \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ u_3 \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix}$$

Per esprimere il secondo vincolo, cioè $u_2 = u_3$ si scrive la seguente relazione:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ u_3 \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix}$$

Allora la relazione:

$$[K] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ u_3 \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \quad \text{diventa} \quad [K][T] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix}$$

Pre-moltiplicando entrambe i membri dell'equazione per $[T]^T$ si ottiene:

$$[T]^T [K][T] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix} = [K]_v \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{23} \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \{F\}_v$$

dove $[K]_v$ rappresenta la matrice di rigidezza globale vincolata:

$$[K]_v = [T]^T [K][T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{44}^1 + K_{11}^2 & K_{46}^1 + K_{13}^2 & K_{14}^2 & K_{16}^2 \\ K_{64}^1 + K_{31}^2 & K_{66}^1 + K_{33}^2 & K_{34}^2 & K_{36}^2 \\ K_{41}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 + K_{11}^3 & K_{46}^2 + K_{13}^3 \\ K_{61}^2 & K_{63}^2 & K_{64}^2 + K_{31}^3 & K_{66}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{44}^1 + K_{11}^2 + K_{14}^2 & K_{46}^1 + K_{13}^2 & K_{16}^2 \\ K_{64}^1 + K_{31}^2 + K_{34}^2 & K_{66}^1 + K_{33}^2 & K_{36}^2 \\ K_{41}^2 + K_{44}^2 + K_{11}^3 & K_{43}^2 & K_{46}^2 + K_{13}^3 \\ K_{61}^2 + K_{64}^2 + K_{31}^3 & K_{63}^2 & K_{66}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(K_{44}^1 + K_{11}^2 + K_{14}^2) & K_{46}^1 + K_{13}^2 + K_{43}^2 & K_{16}^2 + K_{46}^2 + K_{13}^3 \\ K_{64}^1 + K_{31}^2 + K_{34}^2 & K_{66}^1 + K_{33}^2 & K_{36}^2 \\ K_{61}^2 + K_{64}^2 + K_{31}^3 & K_{63}^2 & K_{66}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix}$$

e $\{F\}_v$ il corrispondente vettore dei carichi esterni:



$$\{F\}_v = [T]^T \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} + F_{x3} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \end{Bmatrix}$$

Sostituendo i coefficienti delle tre matrici di rigidezza si ottiene:

$$[K]_v = \begin{bmatrix} 2(K_{44}^1 + K_{11}^2 + K_{14}^2) & K_{46}^1 + K_{13}^2 + K_{43}^2 & K_{16}^2 + K_{46}^2 + K_{13}^3 \\ K_{64}^1 + K_{31}^2 + K_{34}^2 & K_{66}^1 + K_{33}^2 & K_{36}^2 \\ K_{61}^2 + K_{64}^2 + K_{31}^3 & K_{63}^2 & K_{66}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24E_1I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6E_1I_{z1}}{L_1^2} & \frac{6E_3I_{z3}}{L_3^2} \\ \frac{6E_1I_{z1}}{L_1^2} & \frac{4E_1I_{z1}}{L_1} + \frac{4E_2I_{z2}}{L_2} & \frac{2E_2I_{z2}}{L_2} \\ \frac{6E_3I_{z3}}{L_3^2} & \frac{2E_2I_{z2}}{L_2} & \frac{4E_2I_{z2}}{L_2} + \frac{4E_3I_{z3}}{L_3} \end{bmatrix}$$

Infatti poiché $K_{11}^2 = \frac{E_2A_2}{L_2}$ e $K_{14}^2 = -\frac{E_2A_2}{L_2}$ risulta che $K_{11}^2 + K_{14}^2 = 0$; inoltre $K_{31}^2 = K_{34}^2 = 0$ e $K_{64}^2 = K_{31}^3 = 0$.

Se inoltre si pone $L = L_1 = L_3$, $L_2 = 2L$, $EI_z = E_1I_{z1} = E_3I_{z3}$ e $E_2I_{z2} = 4EI_z$ si ottiene:

$$[K]_v = \begin{bmatrix} \frac{24E_1I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6E_1I_{z1}}{L_1^2} & \frac{6E_1I_{z1}}{L_1^2} \\ \frac{6E_1I_{z1}}{L_1^2} & \frac{12E_1I_{z1}}{L_1} & \frac{4E_1I_{z1}}{L_1} \\ \frac{6E_1I_{z1}}{L_1^2} & \frac{4E_1I_{z1}}{L_1} & \frac{12E_1I_{z1}}{L_1} \end{bmatrix} = \frac{2EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}$$

11.2 MATRICI DI MASSA

La matrice (10.9) è detta matrice di massa congruente (*consistent mass matrix*) in quanto per il suo calcolo si utilizza lo stesso modello di spostamento (le stesse funzioni di forma) usato per ottenere la matrice di rigidezza.

La matrice a masse concentrate (*lumped mass matrix*) è di formulazione più semplice in quanto gli unici coefficienti diversi da zero si trovano sulla diagonale in corrispondenza dei gradi di libertà di traslazione; si ottiene concentrando la massa m_i in corrispondenza del grado di libertà i -esimo, in modo che la sommatoria delle singole masse rappresenti la massa totale dell'elemento. E' anche possibile assegnare valori non nulli in corrispondenza di gradi di libertà rotazionali, come ad esempio nel caso delle travi.

La formulazione a masse concentrate, essendo diagonale, non considera gli effetti dinamici di mutua influenza tra i vari gradi di libertà dell'elemento. D'altro canto anche le matrici di massa congruenti sono approssimate poiché si ottengono utilizzando le funzioni di forma per gli spostamenti usate nel caso statico ed utilizzate poi per risolvere il problema dinamico.

Qualsiasi sia la formulazione utilizzata, quando $\{\ddot{s}_n\}$ rappresenta l'accelerazione di un corpo rigido il prodotto $[m]\{\ddot{s}_n\}$ deve fornire la forza corretta; questo è infatti il comportamento di un elemento infinitesimo quando la suddivisione in elementi è piccola.

Le frequenze proprie calcolate utilizzando matrici di massa congruenti, qualora si abbiano elementi compatibili¹ e si utilizzi uno schema d'integrazione esatto, costituiscono un limite superiore alle frequenze naturali esatte, mentre quelle calcolate utilizzando matrici a masse concentrate forniscono valori inferiori a quelli corretti.

La costruzione della matrice di massa di tipo consistente è completamente definita dalla scelta delle funzioni di forma. Al contrario, la costruzione della matrice di massa *Lumped* (cioè a masse concentrate) non è una procedura unica, tranne nel caso di elementi molto semplici. Una conseguenza di questa ambiguità è che in letteratura sono stati proposti diversi metodi di costruzione, come quello HRZ, che prende il nome dalle iniziali dei suoi autori (Hinton, Rock, Zienkiewicz, "A note on mass lumping and related processes in the finite element method", in EARTHQUAKE ENGINEERING AND STRUCTURAL DYNAMICS, VOL. 4, 245-249, 1976).

¹ Gli elementi finiti compatibili sono formulati in modo da garantire la congruenza degli spostamenti, impedendo possibili compenetrazioni o strappi all'interno del modello continuo.

**11.2.1 METODO HRZ.**

Data la matrice di massa di tipo consistente, questo metodo consente il calcolo della matrice a masse concentrate. L'idea consiste nell'utilizzare solo gli elementi diagonali della matrice di massa di tipo consistente, ma scalandoli in modo da preservare la massa totale dell'elemento. La procedura è la seguente:

- 1) Si calcola solo la diagonale della matrice di massa di tipo consistente;
- 2) Si calcola la massa totale dell'elemento M_e ;
- 3) Si calcola un numero s sommando i coefficienti diagonali m_{ii} della matrice di massa di tipo consistente associati ai soli gradi di libertà di spostamento tra loro paralleli e nella stessa direzione;
- 4) Ad ogni termine sulla diagonale della matrice *Lumped*, si assegna il coefficiente: $m_{ii} \frac{M_e}{s}$

La procedura non è rigorosa, ma è molto utilizzata nella pratica grazie a tre vantaggi: è facile da spiegare e da implementare; è applicabile a qualsiasi tipo di elemento purché sia disponibile la relativa matrice di massa consistente; la matrice risulta non negativa. Quest'ultimo attributo è molto importante perché indica che la matrice è fisicamente ammissibile ed evita l'instabilità numerica.

11.2.2 FORMULAZIONE DI ALCUNE MATRICI DI MASSA**11.2.2.1 MATRICE DI MASSA DELL'ELEMENTO TIRANTE/PUNTONE**

In questo caso le funzioni di forma sono le (11.2). Ipotizzando il materiale omogeneo ($\rho = \text{costante}$) e l'asta prismatica ($A = \text{costante}$), la matrice di massa congruente vale:

$$\begin{aligned}
 [m_e] &= \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dvol = \rho A \int_0^L [N]^T [N] dx = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \\
 &= \rho A \begin{bmatrix} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx & \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \\ \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx & \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \end{bmatrix} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.22}$$

La matrice a masse concentrate ha diversi da zero solo i termini sulla diagonale principale:

$$[m_e] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.23}$$

11.2.2.2 MATRICE DI MASSA DELL'ELEMENTO TRAVE

Si consideri un elemento piano monodimensionale di tipo "trave" che unisce due nodi in ognuno dei quali i gradi di libertà siano lo spostamento verticale v e la rotazione ϑ_z intorno all'asse z . Se l'elemento è formulato secondo la teoria di Eulero-Bernoulli le funzioni di forma sono i polinomi di Hermite riportati nell'eq.(11.3). Se la trave è prismatica ed è realizzata con un materiale omogeneo, la matrice di massa congruente risulta:

$$[m_e] = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

Sviluppando gli integrali si ottiene:



$$[m_e] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

La matrice a masse concentrate è:

$$[m_e] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

La matrice è stata ottenuta assegnando ai gradi di libertà di spostamento l'intera massa della trave. Poiché l'unico spostamento possibile è quello verticale v ed i gradi di libertà sono 2 (v_1 e v_2), i coefficienti diagonali diversi da zero sono $m_{11} = m_{33}$ e ad ognuno di essi si assegna metà della massa totale.

Gli effetti dell'inerzia associata ai gradi di libertà rotazionali sono stati considerati nulli; volendoli prendere in considerazione, si può calcolare il momento d'inerzia di massa di ciascuna metà trave rispetto all'estremità. Nel caso di trave uniforme si ottiene:

$$J = \int_{Vol} x^2 dm = \int_{Vol} \rho x^2 dvol = \int_0^{L/2} \rho A x^2 dx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_0^{L/2} = \rho A \frac{L^3}{24} = \left(\frac{\rho AL}{2} \right) \frac{L^2}{12}$$

e la matrice di massa diventa:

$$[m_e] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2/12 \end{bmatrix} \quad (11.26)$$

Usando il metodo HRZ, data la matrice di massa di tipo consistente, è possibile calcolare la matrice a masse concentrate. L'unica direzione da prendere in considerazione è quella trasversale all'asse della trave, cioè l'asse y , ma è presente anche un grado di libertà di rotazione che contribuisce agli spostamenti in direzione y . A parte il termine comune $\frac{\rho AL}{420}$, i coefficienti sulla diagonale della matrice (11.24) sono 156, $4L^2$, 156 e $4L^2$. Sommando i coefficienti relativi ai gradi di libertà di traslazione in direzione y si ottiene: $S = 156 + 156 = 312$. Distribuendo la massa complessiva dell'elemento $M_e = \rho AL$ tra i quattro gradi di libertà, usando come pesi i coefficienti sulla diagonale della matrice di massa consistente divisa la somma S , si ottiene:

$$w_1 = \frac{m_{11}}{S} = \frac{156}{312} = \frac{1}{2} \quad w_2 = \frac{m_{22}}{S} = \frac{4L^2}{312} = \frac{L^2}{78} \quad w_3 = \frac{m_{33}}{S} = \frac{156}{312} = \frac{1}{2} \quad w_4 = \frac{m_{44}}{S} = \frac{4L^2}{312} = \frac{L^2}{78}$$

Il risultato è la seguente matrice a masse concentrate:

$$[m_e] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2/39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2/39 \end{bmatrix} = \frac{\rho AL}{78} \begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

che, come si può osservare, differisce dalla (11.26) nelle inerzie di rotazione. Le matrici di massa elementari espresse nel sistema di riferimento locale devono essere ruotate nel sistema di riferimento globale.

11.2.2.3 MATRICE DI MASSA DELL'ELEMENTO PIANO ISOPARAMETRICO A QUATTRO NODI

Nel caso di un elemento piano isoparametrico a quattro nodi le funzioni di forma sono:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \quad N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

dove ξ ed η sono le coordinate naturali dell'elemento. La matrice $[N]$ in questo caso assume la forma:



$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

e la matrice di massa congruente risulta:

$$[m_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot t \cdot dArea$$

La matrice, simmetrica e di dimensione 8×8 , può essere integrata per via numerica in 2×2 punti di Gauss. Per esempio, il coefficiente della matrice in posizione (3,5) vale:

$$m(3,5) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 N_2(\xi_i, \eta_j) \cdot N_3(\xi_i, \eta_j) \cdot \rho_{ij} \cdot t_{ij} \cdot \det(J_{ij}) \cdot w_i \cdot w_j$$

dove:

- ξ_i, η_i rappresentano le coordinate dei punti di Gauss (in questo caso $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$),
- $N_2(\xi_i, \eta_j)$ ed $N_3(\xi_i, \eta_j)$ rappresentano i valori assunti dalle funzioni di forma N_2 ed N_3 nei punti di Gauss (ξ_i, η_j) ;
- $\rho_{ij} = \sum_{n=1}^4 N_n(\xi_i, \eta_j) \rho_n$ è la densità del materiale nel punto di Gauss (ξ_i, η_j) e ρ_n è la densità nel nodo $n - esimo$;
- $t_{ij} = \sum_{n=1}^4 N_n(\xi_i, \eta_j) t_n$ è lo spessore dell'elemento nel punto di Gauss (ξ_i, η_j) e t_n è lo spessore dell'elemento nel nodo $n - esimo$;
- $\det(J_{ij})$ è il determinante dello Jacobiano J_{ij} valutato nel punto di Gauss (ξ_i, η_j) ;
- w_i, w_j sono i pesi di Gauss: nel caso d'integrazione in 2×2 punti valgono uno;

Una volta calcolate, le matrici di massa elementari devono essere assemblate per formare la matrice di massa globale.

<p>ESEMPIO 11.2 – Si calcoli la matrice di massa di tipo “Consistente” e di tipo “Lumped” del telaio rappresentato nella Fig.E11.1. La massa per unità di lunghezza delle singole aste vale rispettivamente \bar{m}_1, \bar{m}_2 e \bar{m}_3. Le matrici di massa di tipo consistente nel sistema di riferimento locale ad ogni trave si possono calcolare utilizzando le eq.(11.22) e (11.24).</p>	
--	--

Assemblandole in un'unica matrice rappresentativa dell'elemento “trave” a 6 gradi di libertà si ottiene:

$$[m_e]_L = \frac{\bar{m}_e L_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



Le matrici elementari devono essere ruotate nel sistema di riferimento globale e poi assemblate:

$$[m_1]_G = \frac{\bar{m}_1 L_1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & -22L_1 & 54 & 0 & 13L_1 \\ 0 & 140 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ -22L_1 & 0 & 4L_1^2 & -13L_1 & 0 & -3L_1^2 \\ 54 & 0 & -13L_1 & 156 & 0 & 22L_1 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ 13L_1 & 0 & -3L_1^2 & 22L_1 & 0 & 4L_1^2 \end{bmatrix}$$

$$[m_2]_G = \frac{\bar{m}_2 L_2}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L_2 & 0 & 54 & -13L_2 \\ 0 & 22L_2 & 4L_2^2 & 0 & 13L_2 & -3L_2^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L_2 & 0 & 156 & -22L_2 \\ 0 & -13L_2 & -3L_2^2 & 0 & -22L_2 & 4L_2^2 \end{bmatrix}$$

$$[m_3]_G = \frac{\bar{m}_3 L_3}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 22L_3 & 54 & 0 & -13L_3 \\ 0 & 140 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 22L_3 & 0 & 4L_3^2 & 13L_3 & 0 & -3L_3^2 \\ 54 & 0 & 13L_3 & 156 & 0 & -22L_3 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ -13L_3 & 0 & -3L_3^2 & -22L_3 & 0 & 4L_3^2 \end{bmatrix}$$

Assemblando le matrici elementari espresse nel sistema di riferimento globale si ottiene la matrice di massa globale: eliminando le righe e le colonne legate ai gradi di libertà dei nodi incastrati si ottiene:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{44}^1 + M_{11}^2 & M_{45}^1 + M_{12}^2 & M_{46}^1 + M_{13}^2 & M_{14}^2 & M_{15}^2 & M_{16}^2 \\ M_{54}^1 + M_{21}^2 & M_{55}^1 + M_{22}^2 & M_{56}^1 + M_{23}^2 & M_{24}^2 & M_{25}^2 & M_{26}^2 \\ M_{64}^1 + M_{31}^2 & M_{65}^1 + M_{32}^2 & M_{66}^1 + M_{33}^2 & M_{34}^2 & M_{35}^2 & M_{36}^2 \\ M_{41}^2 & M_{42}^2 & M_{43}^2 & M_{44}^2 + M_{11}^3 & M_{45}^2 + M_{12}^3 & M_{46}^2 + M_{13}^3 \\ M_{51}^2 & M_{52}^2 & M_{53}^2 & M_{54}^2 + M_{21}^3 & M_{55}^2 + M_{22}^3 & M_{56}^2 + M_{23}^3 \\ M_{61}^2 & M_{62}^2 & M_{63}^2 & M_{64}^2 + M_{31}^3 & M_{65}^2 + M_{32}^3 & M_{66}^2 + M_{33}^3 \end{bmatrix}$$

Inoltre imponendo i vincoli indicati nel testo dell'esercizio, e cioè:

- 1) $v_2 = v_3 = 0$ (perché le colonne 1 – 2 e 3 – 4 non devono allungarsi);
- 2) $u_2 = u_3$ (perché l'asta orizzontale 2 – 3 non deve allungarsi).

e seguendo la stessa procedura vista nello sviluppo della matrice di rigidezza si ottiene:

$$[M]_v = \begin{bmatrix} 2(M_{44}^1 + M_{11}^2 + M_{14}^2) & M_{46}^1 + M_{13}^2 + M_{43}^2 & M_{16}^2 + M_{46}^2 + M_{13}^3 \\ M_{64}^1 + M_{31}^2 + M_{34}^2 & M_{66}^1 + M_{33}^2 & M_{36}^2 \\ M_{61}^2 + M_{64}^2 + M_{31}^3 & M_{63}^2 & M_{66}^2 + M_{33}^3 \end{bmatrix}$$

Se inoltre si pone $L = L_1 = L_3$, $L_2 = 2L$, $\bar{m} = \bar{m}_1 = \bar{m}_3$ e $\bar{m}_2 = 1.5\bar{m}$ si ottiene:

$$[M]_v = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L^2 \\ 11L & -18L^2 & 26L^2 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo della matrice di massa diagonale la procedura è simile a quella appena descritta. Si parte dalle matrici elementari espresse nel sistema di riferimento locale; poiché sono diagonali le si può esprimere in forma vettoriale:

$$[m_e]_L = \{m_{11} \quad m_{22} \quad m_{33} \quad m_{44} \quad m_{55} \quad m_{66}\}$$

Si tratta di ruotare le matrici nel sistema globale. Partizionandole nel modo seguente:

$$[m_e]_L = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* \end{bmatrix}_L$$



la loro espressione nel sistema di riferimento globale diventa:

$$[m_e]_G = \begin{bmatrix} [R]^T m_{11}^* [R] & [0] \\ [0] & [R]^T m_{22}^* [R] \end{bmatrix}_G$$

Eseguendo il prodotto della sotto-matrice $[R]^T m_{11}^* [R]$ si osserva che:

$$[R]^T m_{11}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m_{11} & 0 \\ -m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza la matrice di massa del primo elemento nel sistema di riferimento globale è la seguente:

$$[m_1]_G = \{m_{22}^1 \quad m_{11}^1 \quad m_{33}^1 \quad m_{55}^1 \quad m_{44}^1 \quad m_{66}^1\}$$

La matrice di massa del 2° elemento è già allineata con il sistema di riferimento globale. Invece la matrice del terzo elemento deve essere ruotata nel modo seguente:

$$[R]^T m_{11}^* [R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -m_{11} & 0 \\ m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso si ottiene:

$$[m_3]_G = \{m_{22}^3 \quad m_{11}^3 \quad m_{33}^3 \quad m_{55}^3 \quad m_{44}^3 \quad m_{66}^3\}$$

L'assemblaggio delle tre matrici dà origine alla seguente matrice globale:

$$[M] = \{m_{22}^1 \quad m_{11}^1 \quad m_{33}^1 \quad m_{55}^1 + m_{11}^2 \quad m_{44}^1 + m_{22}^2 \quad m_{66}^1 + m_{33}^2 \quad m_{44}^2 + m_{22}^3 \quad m_{55}^2 + m_{11}^3 \quad m_{66}^2 + m_{33}^3 \quad m_{55}^3 \quad m_{44}^3 \quad m_{66}^3\}$$

La matrice deve essere vincolata per tenere conto degli incastri presenti nei nodi n.1 e n.4. di conseguenza si ottiene:

$$[M] = \{m_{55}^1 + m_{11}^2 \quad m_{44}^1 + m_{22}^2 \quad m_{66}^1 + m_{33}^2 \quad m_{44}^2 + m_{22}^3 \quad m_{55}^2 + m_{11}^3 \quad m_{66}^2 + m_{33}^3\}$$

Poiché come detto gli spostamenti verticali dei nodi n.2 e n.3 sono impediti è possibile eliminare i corrispondenti coefficienti, cioè la seconda e la quinta colonna:

$$[M] = \{m_{55}^1 + m_{11}^2 \quad m_{66}^1 + m_{33}^2 \quad m_{44}^2 + m_{22}^3 \quad m_{66}^2 + m_{33}^3\}$$

Poiché si è imposto che $u_2 = u_3$ anche in questo caso è possibile applicare la trasformazione esaminata in occasione dello sviluppo della matrice di rigidezza:

$$[M]_v = [T]^T [M] [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{55}^1 + m_{11}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{66}^1 + m_{33}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{44}^2 + m_{22}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{66}^2 + m_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{55}^1 + m_{11}^2 + m_{44}^2 + m_{22}^3 & 0 & 0 \\ 0 & m_{66}^1 + m_{33}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{66}^2 + m_{33}^3 \end{bmatrix}$$

A differenza delle matrici di massa di tipo consistente che per ogni tipo di elemento sono uniche, le matrici di massa diagonali possono assumere diverse forme. Per quanto riguarda l'elemento trave ne sono state proposte tre, l'eq.(11.25), l'eq.(11.26) e l'eq.(11.27) alle quali è necessario aggiungere i termini relativi ai gradi di libertà assiali, l'eq.(11.24). Posto $\rho A = \bar{m}$, si ottiene:

$$[m_e] = \frac{\bar{m}L}{2} \{1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0\} \quad [m_e] = \frac{\bar{m}L}{2} \left\{ 1 \quad 1 \quad \frac{L^2}{12} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{L^2}{12} \right\} \quad [m_e] = \frac{\bar{m}L}{2} \left\{ 1 \quad 1 \quad \frac{L^2}{39} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{L^2}{39} \right\}$$

Utilizzando la prima espressione (che trascura le inerzie rotazionali) si ottiene:

$$[M]_v = \begin{bmatrix} \frac{\bar{m}_1 L_1}{2} + 2 \frac{\bar{m}_2 L_2}{2} + \frac{\bar{m}_3 L_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Utilizzando la seconda espressione si ottiene:

$$[M]_v = \begin{bmatrix} \frac{\bar{m}_1 L_1}{2} + 2 \frac{\bar{m}_2 L_2}{2} + \frac{\bar{m}_3 L_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{m}_1 L_1^3}{24} + \frac{\bar{m}_2 L_2^3}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{m}_2 L_2^3}{24} + \frac{\bar{m}_3 L_3^3}{24} \end{bmatrix}$$

Utilizzando la terza espressione (quella ottenuta con il metodo HRZ) si ottiene:

$$[M]_v = \begin{bmatrix} \frac{\bar{m}_1 L_1}{2} + 2 \frac{\bar{m}_2 L_2}{2} + \frac{\bar{m}_3 L_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{m}_1 L_1^3}{78} + \frac{\bar{m}_2 L_2^3}{78} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{m}_2 L_2^3}{78} + \frac{\bar{m}_3 L_3^3}{78} \end{bmatrix}$$

Posto $L = L_1 = L_3, L_2 = 2L, \bar{m} = \bar{m}_1 = \bar{m}_3$ e $\bar{m}_2 = 1.5\bar{m}$ nei tre casi si ottiene:

$$[M]_v = \bar{m}L \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [M]_v = \bar{m}L \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13L^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13L^2}{24} \end{bmatrix} \quad [M]_v = \bar{m}L \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{6} \end{bmatrix}$$

11.3 CARATTERISTICHE DI SMORZAMENTO

Se si conoscessero quantitativamente le forze di smorzamento che agiscono sulla struttura, si potrebbe utilizzare il metodo degli elementi finiti per definire i coefficienti di smorzamento del sistema. Per esempio questi coefficienti potrebbero assumere la forma seguente:

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) N_i N_j dx \tag{11.28}$$

dove $c(x)$ rappresenta lo smorzamento viscoso distribuito lungo l'elemento ed N_i e N_j sono rispettivamente l'i-esimo e j-esimo elemento del vettore che raccoglie le funzioni di forma dell'elemento. Una volta determinati i coefficienti di smorzamento di ogni elemento, le matrici elementari potrebbero essere assemblate in una matrice di smorzamento globale seguendo la stessa procedura utilizzata con le matrici di rigidezza e di massa. Tuttavia in pratica è molto difficile determinare la funzione $c(x)$: questo è il motivo per cui si preferisce in generale esprimere lo smorzamento attraverso una procedura che verrà descritta in un prossimo capitolo.

11.4 AZIONE DELLE FORZE ESTERNE

Se le forze sono direttamente applicate ai nodi del modello, il vettore delle forze $\{f_{ext}\}$ che compare nell'eq.(10.10) è semplicemente il vettore delle forze applicate orientate secondo il sistema di riferimento globale. Se viceversa sul modello agiscono anche delle forze distribuite sulle superfici e delle forze di volume, allora il vettore delle forze sarà il vettore delle forze generalizzate equivalenti applicate ai nodi, al quale corrisponderà un vettore di spostamenti generalizzati.

Si consideri, per esempio, la trave utilizzata a proposito della matrice di massa coerente, sottoposta ad un insieme di forze dinamiche esterne. Se si applica uno spostamento virtuale δv_1 come indicato nella fig.11.2, e si esprime l'uguaglianza dei lavori delle forze interne e quello delle

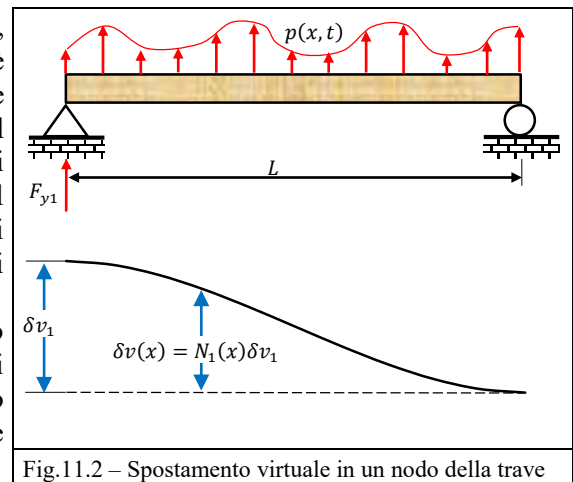


Fig.11.2 – Spostamento virtuale in un nodo della trave



forze esterne, è possibile dedurre la forza generalizzata corrispondente a v_1 :

$$F_{y1}(t) = \int_0^L p(x, t) N_1(x) dx \quad (11.29)$$

Infatti in generale l'uguaglianza dei lavori delle forze interne e quello delle forze esterne si può scrivere nel modo seguente:

$$\mathcal{L}_{est} = \{\delta s_n\}^T \{F_e\} = \{\delta v_1 \quad \delta \vartheta_{z1} \quad \delta v_2 \quad \delta \vartheta_{z2}\} \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \int_0^L \{\delta s\}^T \{\Phi(x, t)\} dx = \mathcal{L}_{int} \quad (11.30)$$

dove $\{\delta s_n\}$ è il vettore degli spostamenti virtuali nodali, $\{F_e\}$ è il vettore delle forze nodali equivalenti, $\{\delta s\}$ è lo spostamento virtuale di un punto interno alla trave e $\{\Phi(x, t)\}$ è il vettore delle forze superficiali che in questo caso coincidono con $p(x, t)$. Ricordando che:

$$\delta s(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{Bmatrix} \delta v_1 \\ \delta \vartheta_{z1} \\ \delta v_2 \\ \delta \vartheta_{z2} \end{Bmatrix} = [N] \{\delta s_n\}$$

l'eq.(11.30) assume la forma:

$$\{\delta v_1 \quad \delta \vartheta_{z1} \quad \delta v_2 \quad \delta \vartheta_{z2}\} \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \{\delta v_1 \quad \delta \vartheta_{z1} \quad \delta v_2 \quad \delta \vartheta_{z2}\} \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix} p(x, t) dx$$

Quindi se l'unico spostamento virtuale diverso da zero è δv_1 l'equazione diventa:

$$\delta v_1 F_{y1}(t) = \delta v_1 \int_0^L N_1(x) p(x, t) dx$$

da cui si deduce la (11.29). La forza generalizzata $M_{z1}(t)$ corrispondente allo spostamento generalizzato $\vartheta_{z1}(t)$ è un momento esterno applicato nel nodo n.1. Il senso positivo delle forze generalizzate è lo stesso del senso positivo degli assi.

Perché le forze generalizzate possano chiamarsi coerenti, devono essere calcolate con le stesse funzioni di forma utilizzate per definire la rigidezza. Se si utilizza l'interpolazione lineare:

$$N_1^L(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2^L(x) = \frac{x}{L} \quad (11.2)$$

e il carico distribuito $p(x, t)$ non dipende dalla posizione x , l'eq. (11.29) fornisce il seguente risultato:

$$F_{y1}(t) = p(t) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{p(t)L}{2} \quad F_{y2}(t) = p(t) \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) dx = \frac{p(t)L}{2}$$

In alcuni casi la funzione di carico può assumere la seguente forma particolare:

$$p(x, t) = \chi(t) q(x) \quad (11.31)$$

per cui l'intensità $\chi(t)$ del carico cambia nel tempo durante il quale rimane costante la sua distribuzione spaziale. In questo caso le forze generalizzate valgono:

$$F_i(t) = \chi(t) \int_0^L q(x) N_i(x) dx \quad (11.32)$$



Si può osservare che la forza generalizzata $F_i(t)$ varia in funzione del tempo nello stesso modo $\chi(t)$ del carico distribuito.

Una volta che le forze generalizzate di ogni elemento sono state calcolate rispetto al sistema di riferimento locale, queste vengono ruotate nel sistema di coordinate globali e quindi vengono assemblate a formare il vettore delle forze nodali equivalenti dell'intera struttura.

11.5 SCELTA DEL TIPO DI FORMULAZIONE

Quando è stato illustrato il metodo per il calcolo delle matrici di massa si è evidenziato che sono possibili due livelli di approssimazione:

- 1) Un metodo elementare che prende in considerazione solo i gradi di libertà di traslazione;
- 2) Un metodo "coerente" che tiene conto sia delle traslazioni che delle rotazioni.

Il primo metodo è molto più semplice del secondo: non solo le caratteristiche sono più facili da calcolare, ma anche il numero d'incognite è nettamente inferiore. In teoria il metodo "coerente" dovrebbe condurre a risultati migliori, ma in pratica il miglioramento è spesso trascurabile. Risulta in effetti che i gradi di libertà di rotazione sono molto meno importanti di quelli di traslazione. Il vantaggio principale del secondo metodo sta nel fatto che i contributi energetici alla risposta della struttura sono calcolati in modo "coerente", il che consente di determinare i limiti superiori che possono assumere le frequenze di vibrazione della struttura. D'altra parte questo vantaggio raramente giustifica la mole di calcoli necessari.

Se le matrici di massa diagonali sono state calcolate trascurando i gradi di libertà di rotazione è necessario eliminare tali gradi di libertà anche dalla matrice di rigidezza. Il metodo che consente questa operazione si chiama "condensazione statica". Si supponga di avere separato i gradi di libertà di rotazione da quelli di traslazione in modo che la matrice di rigidezza possa scriversi nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} K_{tt} & K_{t\vartheta} \\ K_{\vartheta t} & K_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_t \\ s_\vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_t \\ M_\vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.33)$$

dove il pedice t indica le traslazioni e l'indice ϑ le rotazioni. Se i gradi di libertà di rotazione sono assenti, è evidente che anche le forze elastiche di rotazione devono annullarsi, cioè $M_\vartheta = 0$. Se si introduce questa condizione nell'eq.(11.33), è possibile esprimere le rotazioni in funzione delle traslazioni:

$$K_{\vartheta t}s_t + K_{\vartheta\vartheta}s_\vartheta = 0 \quad \text{da cui:} \quad s_\vartheta = -K_{\vartheta\vartheta}^{-1} K_{\vartheta t}s_t \quad (11.34)$$

da cui, utilizzando sempre l'eq.(11.33), si ottiene:

$$K_{tt}s_t + K_{t\vartheta}s_\vartheta = (K_{tt} - K_{t\vartheta}K_{\vartheta\vartheta}^{-1}K_{\vartheta t})s_t = F_t$$

Posto:

$$K_t = K_{tt} - K_{t\vartheta}K_{\vartheta\vartheta}^{-1}K_{\vartheta t} \quad (11.35)$$

si può scrivere:

$$K_t s_t = F_t \quad (11.36)$$

dove K_t è la rigidezza elastica associata alle componenti di traslazione.

ESEMPIO 11.3 – Si consideri l'esempio E11.1 dal quale è risultato che la matrice di rigidezza del sistema ed il corrispondente vettore dei gradi di libertà sono i seguenti:

$$[K] = \frac{2EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} \quad \{s_n\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_{z2} \\ \vartheta_{z3} \end{Bmatrix}$$

Si desidera utilizzare la "condensazione statica" per eliminare i due gradi di libertà di rotazione; la matrice di rigidezza che ne risulterà potrà poi essere usata con la matrice di massa diagonale sviluppata nell'esercizio E11.2:



$$[M] = \bar{m}L \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La sottomatrice di rigidezza dell'esempio 11.1 che corrisponde ai gradi di libertà di rotazione è la seguente:

$$K_{\vartheta\vartheta} = \frac{2EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} = \frac{4EI_z}{L} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La sua inversa vale:

$$K_{\vartheta\vartheta}^{-1} = \frac{L}{32EI_z} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Utilizzando l'eq.(11.35) si ottiene la matrice di rigidezza condensata (in questo caso di dimensione 1×1):

$$\begin{aligned} K_t &= K_{tt} - K_{t\vartheta}K_{\vartheta\vartheta}^{-1}K_{\vartheta t} = \frac{24EI_z}{L^3} - \frac{2EI_z}{L^3} [3L \quad 3L] \frac{L}{32EI_z} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{2EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} \\ &= \frac{2EI_z}{L^3} \left(12 - \frac{L}{32EI_z} \frac{2EI_z}{L^3} [3L \quad 3L] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{2EI_z}{L^3} \left(12 - \frac{1}{16L^2} [3L \quad 3L] \begin{bmatrix} 6L \\ 6L \end{bmatrix} \right) = \frac{2EI_z}{L^3} \left(12 - \frac{36L^2}{16L^2} \right) = \frac{39EI_z}{2L^3} \end{aligned}$$

Nota lo spostamento u_2 è possibile determinare le rotazioni usando l'eq.(11.34):

$$\begin{Bmatrix} \vartheta_{z2} \\ \vartheta_{z3} \end{Bmatrix} = -K_{\vartheta\vartheta}^{-1} K_{\vartheta t} u_2 = -\frac{L}{32EI_z} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{2EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} = -\frac{3}{8L} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} u_2$$