

La selezione minimale e una sua applicazione al problema della parametrizzazione

Luca Bressan

con la supervisione del Prof. Antonio Iannizzotto

Università degli Studi di Cagliari — Teoria dei Giochi

Introduzione

In questo breve testo verrà trattato il problema della ricerca di un procedimento esplicito per costruire una selezione continua per multifunzioni a valori compatti e convessi in \mathbb{R}^n , fino ad arrivare alla dimostrazione del *teorema di selezione minimale*. Nella sezione finale si vedrà un'applicazione del teorema volta a fornire una parametrizzazione continua, generale e canonica per questa stessa classe di multifunzioni.

Indice

1	Continuità per multifunzioni e altre nozioni preliminari	2
1.1	La distanza di Hausdorff	2
1.2	Continuità nel senso della metrica	3
1.3	Il proiettore su un chiuso convesso di \mathbb{R}^n	3
2	La selezione minimale	5
2.1	Il teorema di selezione minimale	5
3	Il problema della parametrizzazione	6
3.1	Costruzione di una parametrizzazione continua a partire dalla selezione minimale	7

1 Continuità per multifunzioni e altre nozioni preliminari

Mettiamo a confronto due nozioni di continuità per multifunzioni, e per farlo iniziamo col dare alcune definizioni. Data una multifunzione $F : X \rightarrow 2^Y$ diciamo che:

Definizione 1.1. *Semicontinuità inferiore.* F è semicontinua inferiormente (s.c.i.) in x se per ogni $A \subseteq Y$ aperto t.c. $F(x) \cap A \neq \emptyset$ esiste $U \in U_X(x)$ t.c. $F(x_0) \cap A \neq \emptyset$ per ogni $x_0 \in U$;

Definizione 1.2. *Semicontinuità superiore.* F è semicontinua superiormente (s.c.s.) in x se per ogni $A \subseteq Y$ aperto t.c. $F(x) \subseteq A$ esiste $U \in U_X(x)$ t.c. $F(x_0) \subseteq A$ per ogni $x_0 \in U$;

Definizione 1.3. *Continuità nel senso degli aperti.* F è continua in x se è s.c.i. e s.c.s in x ;

1.1 La distanza di Hausdorff

Per introdurre il secondo tipo di continuità abbiamo bisogno di richiamare alcuni concetti:

Definizione 1.4. *Distanza punto-insieme.* In uno spazio euclideo \mathbb{R}^n , dato $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ diremo che $d(x, S) := \inf_{s \in S} \{d(x, s)\}$

Definizione 1.5. *Eccedenza.* In uno spazio euclideo \mathbb{R}^n , dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che $e(A, B) := \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$

Definizione 1.6. *Distanza di Hausdorff.* In uno spazio euclideo \mathbb{R}^n , dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che $\delta(A, B) := \max \{e(A, B), e(B, A)\}$

La distanza di Hausdorff può essere usata per costruire strutture topologiche rilevanti nel seguito di questa trattazione. Sempre limitandoci al caso euclideo finito-dimensionale enunciamo il seguente

Teorema 1.1. *Sia $\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutti i compatti non vuoti di \mathbb{R}^n . Allora $(\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n), \delta)$ è uno spazio metrico.*

Dimostrazione. Chiaramente δ è positiva e simmetrica, mentre la limitatezza è una conseguenza del teorema di Heine-Borel sui compatti di \mathbb{R}^n . Verifichiamo la proprietà triangolare: Fissati $\{M, N, P\} \subseteq \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$ e $y \in M, x \in N, z \in P$ abbiamo che

$$d(y, N) \leq d(y, z) + d(z, N) \leq e(P, N) + d(y, z) \quad (1.1)$$

Passando sotto il segno di estremo inferiore al variare di z in P si ha

$$d(y, N) \leq e(P, N) + d(y, P) \quad (1.2)$$

e passando sotto il segno di estremo superiore al variare di y in M si ha

$$e(M, N) \leq e(P, N) + e(M, P) \quad (1.3)$$

Analogamente è possibile maggiorare $e(N, M)$, per cui la proprietà triangolare è verificata. Verifichiamo che

$$\delta(M, N) = 0 \iff M = N \quad (1.4)$$

Se $M = N$, banalmente $\delta(M, N) = 0$; viceversa, supponendo che $\delta(M, N) = 0$ e dopo aver fissato un $y \in M$, si ottiene $e(M, N) = 0$. Questo implica che $d(y, N) = 0$, ovvero che y è nella chiusura di N . Tuttavia N è chiuso, quindi $y \in N$. Analogamente si mostra la seconda inclusione, per cui $M = N$. \square



Nota: Rimuovendo l'ipotesi di limitatezza degli insiemi, otteniamo una *pseudometrica*. Rimuovendo l'ipotesi di chiusura viene meno l'ultima condizione che abbiamo verificato: si pensi al fatto $\delta([0, 1], (0, 1]) = 0$ ma $[0, 1] \neq (0, 1]$. Nondimeno la distanza di Hausdorff può ancora darci qualche informazione: infatti si verifica facilmente che $\delta(A, B) = 0 \iff \bar{A} = \bar{B}$.

1.2 Continuità nel senso della metrica

Alla luce di quanto esposto nella sezione precedente esponiamo una nuova idea di continuità ed esaminiamo il suo rapporto con quella già nota:

Definizione 1.7. *Continuità nel senso della metrica.* Una multifunzione F , definita su uno spazio metrico X , a valori in $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ è continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0 : d(x_0, y) < \delta \Rightarrow \mathfrak{d}(F(x_0), F(y)) < \epsilon \quad (1.5)$$

La definizione di continuità appena data è equivalente a quella esposta all'inizio di questa parte introduttiva? Effettivamente sì, e i seguenti ragionamenti ci fanno vedere come, usando in modo forte la nozione di compattezza.

Proposizione 1.1. *Sia F definita su uno spazio metrico a valori in $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Allora F è s.c.s in x se e solo se è vero che*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : e(F(y), F(x)) \leq \epsilon \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Supponiamo che F sia s.c.s. in x . Poichè F è s.c.s. e $F(x) \subseteq B_\epsilon(F(x))$ allora $\exists \delta > 0 : F(y) \subseteq B_\epsilon(F(x)) \quad \forall y \in B_\delta(x)$. Dunque, $\forall u \in F(y)$, $d(u, F(x)) \leq \epsilon$, da cui $e(F(y), F(x)) \leq \epsilon$.

Mostriamo l'implicazione inversa: fissato $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall y \in B_\delta(x)$, $\forall u \in F(y)$ si ha $d(u, F(x)) \leq e(F(y), F(x)) \leq \frac{\epsilon}{2}$, da cui $F(y) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(F(x))$. Ciò implica che $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto tale che $F(x) \subseteq A$, $\exists \delta > 0 : F(y) \subseteq A \quad \forall y \in B_\delta(x)$, ovvero F è s.c.s. in x . \square

Proposizione 1.2. *Sia F definita su uno spazio metrico a valori in $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Allora F è s.c.i in x se e solo se è vero che*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : e(F(x), F(y)) \leq \epsilon \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Supponiamo che F sia s.c.i. in x . Poichè $F(x)$ è compatto, dal ricoprimento aperto dato dalle palle di raggio $\frac{\epsilon}{2}$ centrate nei suoi punti si può estrarre un sottoricoprimento aperto, finito e minimale, ovvero esistono $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ tali che $F(x) \subseteq \cup_{i=1}^m B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_i)$, $F(x) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_i) \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Poichè F è s.c.i. in x , $\forall i \in \{1, \dots, m\} \exists \tilde{\delta}_i > 0 : \forall y \in B_{\tilde{\delta}_i}(x) : F(y) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_i) \neq \emptyset$. Sia ora $\delta = \inf_{i \in \{1, \dots, m\}} \tilde{\delta}_i$, cosicchè abbiamo $\forall y \in B_\delta(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, F(y) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_i) \neq \emptyset$. Sia $u \in F(x) : u \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\tilde{i}})$ per qualche $\tilde{i} \in \{1, \dots, m\}$. Ma $\forall i \in \{1, \dots, m\}, F(y) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_i) \neq \emptyset$, quindi $\exists v \in F(y) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(u_{\tilde{i}})$. Quindi $d(u, F(y)) \leq d(u, v) \leq \epsilon$, da cui $e(F(x), F(y)) \leq \epsilon$.

Mostriamo l'implicazione inversa: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : e(F(x), F(y)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall y \in B_\delta(x)$, da cui $F(x) \subseteq B_{\frac{2\epsilon}{3}}(F(y))$. Dunque $\forall u \in F(x), y \in B_\delta(x)$ si ha $d(u, F(y)) < \epsilon$, ovvero $\exists v \in F(y) : d(u, v) < \epsilon$. Allora $F(x) \cap F(y) \neq \emptyset$ e F è s.c.i. in X . \square

Mettendo insieme i due risultati si ha

Teorema 1.2. *Sia F definita su uno spazio metrico a valori in $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Allora F è continua nel senso della metrica se e solo se è continua nel senso degli aperti.*

1.3 Il proiettore su un chiuso convesso di \mathbb{R}^n

Tornerà utile più avanti il seguente risultato:

Teorema 1.3. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e convesso, e $x \in \mathbb{R}^n$. Esiste l'insieme $P = \arg \min_{y \in C} \{d(x, y)\}$ ed è un singolo.*

Dimostrazione. Che l'insieme sia ben definito discende dalla chiusura di C e dalle proprietà di uno spazio metrico. Resta da dimostrare che è un singolo. Si mostra con un calcolo diretto che

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} = \|a\|^2 + \|b\|^2 - \frac{\|a-b\|^2}{2} \quad (1.8)$$

Siano x_1 e x_2 elementi distinti di P e poniamo nell'equazione precedente $a = x_1 - x$ e $b = x_2 - x$. Allora si ha

$$\frac{\|x_1 - x + x_2 - x\|^2}{2} = \|x_1 - x\|^2 + \|x_2 - x\|^2 - \frac{\|x_1 - x - x_2 + x\|^2}{2} \quad (1.9)$$

da cui

$$\frac{\|x_1 - x + x_2 - x\|^2}{2} < \frac{\|x_1 - x\|^2}{2} + \frac{\|x_2 - x\|^2}{2} \quad (1.10)$$

e sfruttando la definizione di x_1 e x_2 si ha

$$\frac{\|x_1 + x_2 - 2x\|^2}{2} < \|x_1 - x\|^2 \quad (1.11)$$

Per la convessità di C questa è una contraddizione, dunque P è un singoletto \square

Ora possiamo dare una nuova definizione:

Definizione 1.8. *Proiettore su un chiuso convesso di \mathbb{R}^n .* Definiamo per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ il proiettore su $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e convesso $\pi_C(x)$ come l'unico elemento di $\arg \min_{y \in C} \{d(x, y)\}$.

Il proiettore ammette una seconda definizione, del tutto equivalente, in termini variazionali:

Teorema 1.4. *Teorema sulla caratterizzazione variazionale del proiettore.* Si ha

$$v^* = \pi_C(x) \iff \langle (x - v^*), (v - v^*) \rangle \leq 0 \forall v \in C \quad (1.12)$$

Dimostrazione. Se $x \in C$ abbiamo concluso. Altrimenti supponiamo che $v^* = \pi_C(x)$ e consideriamo un $v \neq v^*$. Sia $\alpha \in (0, 1)$. Per convessità abbiamo

$$(1 - \alpha)v^* + \alpha v \in C. \quad (1.13)$$

Segue dalle ipotesi che

$$\|x - v^*\|^2 \leq \|x - ((1 - \alpha)v^* + \alpha v)\|^2 \quad (1.14)$$

e siccome

$$\|x - v^*\|^2 \leq \|x - v^*\|^2 + \alpha^2 \|v - v^*\|^2 - 2\alpha \langle (x - v^*), (v - v^*) \rangle \quad (1.15)$$

abbiamo

$$\langle (x - v^*), (v - v^*) \rangle \leq \frac{\alpha}{2} \|v - v^*\|^2 \quad (1.16)$$

Passando al limite per α che tende a 0 abbiamo la tesi. Supponiamo invece vero che

$$\langle (x - v^*), (v - v^*) \rangle \leq 0 \forall v \in C \quad (1.17)$$

Sia $v \in C, v \neq v^*$. Abbiamo

$$\|x - v\|^2 - \|x - v^*\|^2 = \|v - v^*\|^2 - 2 \langle (x - v^*), (v - v^*) \rangle \quad (1.18)$$

e quindi

$$\|x - v\|^2 \geq \|x - v^*\|^2 \quad (1.19)$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Terminiamo questa introduzione presentando il *protagonista* del resto di questa trattazione:

Definizione 1.9. *Funzione elemento minimale.* Definiamo per ogni $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e convesso la funzione elemento minimale $m(C)$ come

$$m(C) = \pi_C(\mathbf{0}) \quad (1.20)$$

2 La selezione minimale

Iniziamo col definire cos'è una selezione:

Definizione 2.1. Siano X, Y insiemi non vuoti e sia $F : X \rightarrow 2^Y$ una multifunzione. $f : X \rightarrow Y$ è una selezione di F se

$$f(x) \in F(x) \quad \forall x \in X \quad (2.1)$$

L'esistenza di una selezione segue immediatamente dall'assioma della scelta. Ne ricordiamo qui il contenuto:

Assioma. *Assioma della scelta.* Data una famiglia non vuota di insiemi non vuoti esiste una funzione che ad ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.

Discende immediatamente questo risultato:

Teorema 2.1. Siano X, Y insiemi non vuoti e sia $F : X \rightarrow 2^Y$ una multifunzione a valori non vuoti. Allora F ammette una selezione.

Il seguente risultato sulla continuità di una selezione copre casi abbastanza generali:

Teorema 2.2. *Teorema di Michael.* Se (X, τ) è uno spazio topologico paracompatto, $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, $F : X \rightarrow 2^Y$ s.c.i. a valori non vuoti, chiusi e convessi, allora F ammette una selezione continua.

Dimostrazione. [1] □

2.1 Il teorema di selezione minimale

Possiamo metterci sotto condizioni più restrittive di quelle del teorema di Michael, ottenendo un metodo per definire esplicitamente una selezione continua:

Teorema 2.3. *Teorema di selezione minimale.* Sia X uno spazio metrico e sia $F : X \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ una multifunzione continua a valori compatti e convessi. Allora la mappa $x \rightarrow m(F(x))$ è continua.

Dimostrazione. Fissiamo un $\epsilon > 0$. Per la continuità di F , quando x e x^* sono sufficientemente vicini, si ha che

$$\|m(F(x))\|^2 \leq \|m(F(x^*))\|^2 + \epsilon \quad (2.2)$$

Infatti x^2 è una funzione continua, in particolare è continua in $\|m(F(x))\|$. Allora

$$\exists \delta > 0 : d(\|m(F(x))\|, \|m(F(x^*))\|) < \delta \Rightarrow d(\|m(F(x))\|^2, \|m(F(x^*))\|^2) < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.3)$$

Mostriamo che $d(\|m(F(x))\|, \|m(F(x^*))\|) < \delta$: se non fosse vero che $\|m(F(x^*))\| < \|m(F(x))\| + \delta$, allora $F(x^*)$ non intersecherebbe $B_\delta(m(F(x)))$, contro il fatto che F è s.c.i.. Se invece non fosse vero che $\|m(F(x^*))\| > \|m(F(x))\| - \delta$, si avrebbe $m(F(x^*)) \notin B_\delta(m(F(x)))$, contro il fatto che F è s.c.s.. Questo conclude la dimostrazione qualora $m(F(x^*)) = \mathbf{0}$ in quanto significa che $m(F(x)) \in B(\mathbf{0}, \sqrt{\epsilon})$. Se invece $m(F(x^*)) \neq \mathbf{0}$, per la continuità di F abbiamo che se x e x^* sono sufficientemente vicini esiste un $y_x \in F(x^*)$ tale che $\|m(F(x)) - y_x\| \leq \frac{\epsilon}{\|m(F(x^*))\|}$. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, dopo opportune maggiorazioni, abbiamo che

$$\langle m(F(x)), m(F(x^*)) \rangle \geq \langle y_x, m(F(x^*)) \rangle - \epsilon \quad (2.4)$$

Ricordiamo che $m(\cdot)$ è definito in termini di una proiezione, e per il teorema di caratterizzazione (Teorema 1.4) abbiamo che

$$\langle y_x, m(F(x^*)) \rangle \geq \langle m(F(x^*)), m(F(x^*)) \rangle \quad (2.5)$$

Combinando (2.4) e (2.5) otteniamo

$$\langle m(F(x^*)), m(F(x)) - m(F(x^*)) \rangle \geq -\epsilon \quad (2.6)$$

D'altro canto abbiamo che

$$\|m(F(x))\|^2 = \|m(F(x^*))\|^2 + \|m(F(x^*)) - m(F(x))\|^2 + \langle m(F(x^*)), m(F(x)) - m(F(x^*)) \rangle \quad (2.7)$$

Mettendo insieme le informazioni ottenute in (2.2) e (2.7) abbiamo

$$\|m(F(x^*)) - m(F(x))\|^2 \leq 3\epsilon \quad (2.8)$$

il che conclude la dimostrazione. □

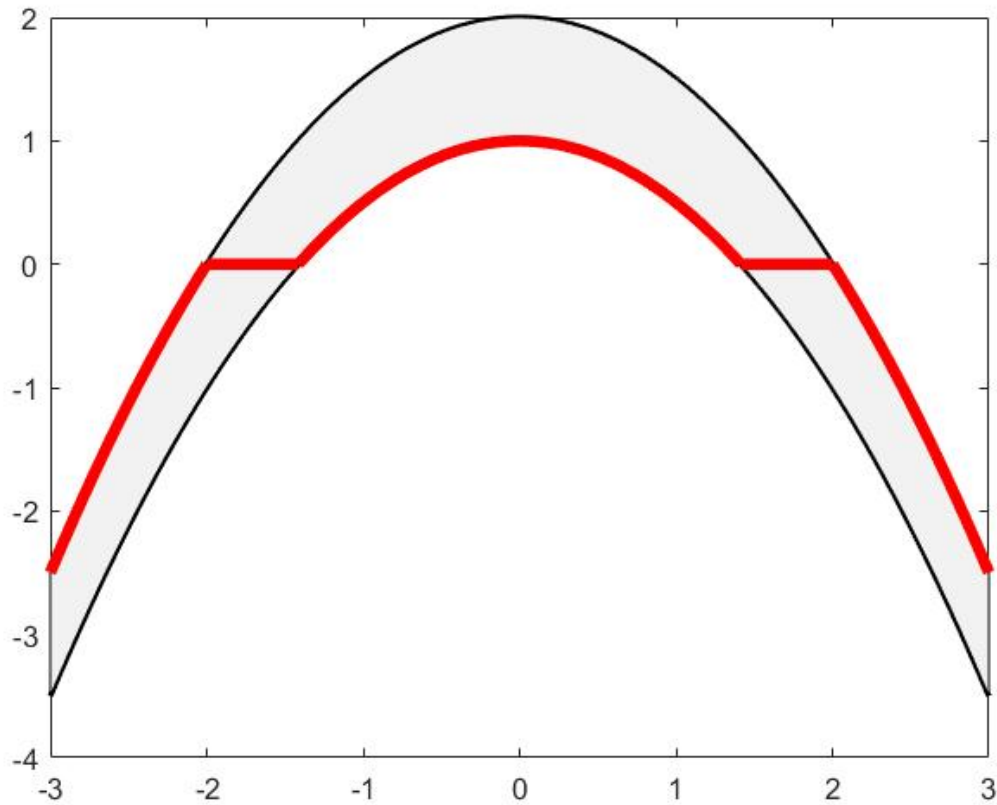


Figura 1: una porzione del grafico di $F(x) = \left\{ y \in \mathbb{R} : 1 - \frac{x^2}{2} \leq y \leq 2 - \frac{x^2}{2} \right\}$ e la sua selezione minima. In \mathbb{R} effettuare una selezione minima corrisponde intuitivamente a "stare il più possibile vicini allo zero"

3 Il problema della parametrizzazione

Non è difficile immaginare come la manipolazione di multifunzioni presenti numerose difficoltà: per questo si cercano modi di semplificarne la rappresentazione, riconducendosi per quanto possibile allo studio di funzioni monodrome. Un modo di fare questo è *parametrizzare* la multifunzione. Diamo ora la definizione di multifunzione parametrizzata:

Definizione 3.1. Multifunzione parametrizzata. Si dirà che una multifunzione $F : X \rightarrow 2^Y$ è parametrizzata da U se esiste $f : X \times U \rightarrow Y$ tale che

$$F(x) = \{f(x, u_0)\}_{u_0 \in U} \quad \forall x \in X$$

In questo contesto U prende il nome di *insieme controllo*.

Anche questa volta l'esistenza di una parametrizzazione è garantita dall'assioma della scelta:

Teorema 3.1. Sia $F : X \rightarrow 2^Y$ una multifunzione a valori non vuoti. Allora ammette una parametrizzazione.

Dimostrazione. Sia $g : X \rightarrow Y$ una selezione per F , la cui esistenza è garantita da Teorema 2.1. Consideriamo $f : X \times Y \rightarrow Y$ data da

$$f(x, u) = \begin{cases} u & \text{se } u \in F(x) \\ g(x) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.1)$$

Chiaramente $f(x, u)$ è una parametrizzazione di F . □

3.1 Costruzione di una parametrizzazione continua a partire dalla selezione minimale

L'ultimo risultato esposto ha una natura fortemente astratta: non risponde all'esigenza di avere un algoritmo esplicito per costruire la parametrizzazione, né ci dà garanzie di regolarità sulla parametrizzazione trovata. Possiamo, ad esempio, richiedere che f sia continua, qualora questo sia possibile. Difatti l'esistenza di una tale parametrizzazione è subordinata al fatto che la multifunzione da parametrizzare ammetta selezioni continue. Infatti se f è continua, $f(x, u_0)$ con u_0 è fissato, è una selezione continua per F . Nei casi in cui è richiesto un metodo esplicito per costruire f , si vorrebbe che l'algoritmo fosse sia abbastanza *generale* da fornire una selezione passante per un punto fissato $y_0 \in F(x)$, sia *canonico*, ovvero che l'algoritmo dipenda dal punto di valutazione solo negli aspetti *quantitativi* e quindi che la scelta del punto non influisca sugli aspetti *procedurali*. La *selezione minimale* consente sotto opportune ipotesi di ottenere parametrizzazioni con tutte queste proprietà.

Lemma 3.1. *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto e sia $\mathfrak{C}(K)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi compatti e convessi di K . Sia $\pi(H, x) = \pi_H(x) \forall H \in \mathfrak{C}(K)$. Si consideri lo spazio metrico $(\mathfrak{C}(K), \delta)$. Allora $\pi(H, x)$ definita su $(\mathfrak{C}(K), \delta) \times K$ a valori in K è continua.*

Nota. (Distanze indotte da p-norme sul prodotto) È possibile verificare che dato un prodotto finito di spazi metrici $X_1 \times \dots \times X_n$, la funzione

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \|(d_{X_1}(x_1, y_1), \dots, d_{X_n}(x_n, y_n))\|_{(\mathbb{R}^n, p)}$$

costituisce metrica.

Dimostrazione. Adottiamo su K la metrica indotta dalla norma euclidea, e sul prodotto $(\mathfrak{C}(K), \delta) \times K$ adottiamo la metrica indotta dalla 1-norma, ovvero $d((H, x), (M, y)) = \delta(H, M) + \|x - y\|$. Definiamo per ogni $(H, x) \in \mathfrak{C}(K) \times K$ la funzione $F(H, x) = H - x$. Mostriamo che F è continua:

$$\begin{aligned} \delta(F(H, x), F(M, y)) &= \delta(H - x, M - y) \leq \\ &\leq \delta(H - x, H - y) + \delta(H - y, M - y) \\ &\leq \|x - y\| + \delta(H, M) = d((H, x), (M, y)) \end{aligned}$$

Questo mostra che F è lipschitziana, dunque continua. Per Teorema 2.3, $m(F) : \mathfrak{C}(K) \times K \rightarrow K$ è continua. Infine osserviamo che $\forall (H, x) \in \mathfrak{C}(K) \times K$, se $\pi(H, x) = u$ allora si ha $\forall v \in H$

$$\|u - x\| \leq \|v - x\| \Rightarrow u - x = m(H - x) = m(F(H, x)) \Rightarrow \pi(H, x) = m(F(H, x)) + x \quad (3.2)$$

dunque π è continua. \square

Definizione 3.2. Norma di un compatto convesso. Sia K un compatto convesso di \mathbb{R}^n . Allora si definisce

$$\|K\| := \max_{v \in K} \|v\| \quad (3.3)$$

Proposizione 3.1. $\|\cdot\| : \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Dimostrazione. Per opportuni $u \in K$ e $v \in H$ si ha

$$(\|K\| = \|u\|) \wedge (\|H\| = \|v\|) \Rightarrow \|\|K\| - \|H\|\| = \|\|u\| - \|v\|\| \leq \|u - v\| \leq \delta(H, K)$$

\square

Teorema 3.2. *Sia X uno spazio metrico e $F : X \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ continua a valori compatti, convessi e non vuoti. Allora F ammette una parametrizzazione continua dove $B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ è l'insieme controllo.*

Dimostrazione. Per il Teorema 1.1, $F : X \rightarrow \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ è continua. Definiamo $p(x) := \max\{1, \|F(x)\|\} \forall x \in X$: p è continua. Definiamo anche, $\forall (x, r) \in X \times B_1(\mathbf{0})$, la funzione

$$f(x, r) = \pi(F(x), p(x)r) \quad (3.4)$$

che per Lemma 3.1 è continua. Resta da mostrare che f è una parametrizzazione. Abbiamo che $\forall x \in X$:

- $\forall r \in B_1(\mathbf{0}), f(x, r) = \pi(F(x), p(x)r) \in F(x) \Rightarrow f(x, B_1(\mathbf{0})) \subseteq F(x)$
- $\forall u \in F(x), \|u\| \leq p(x) \Rightarrow \exists r \in B_1(\mathbf{0}) : u = p(x)r \Rightarrow f(x, r) = \pi(F(x), u) = u \Rightarrow F(x) \subseteq f(x, B_1(\mathbf{0}))$

da cui $f(x, B_1(\mathbf{0})) = F(x)$. \square

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Iannizzotto, *Introduzione alla Teoria dei Giochi*, 2015, pagg. 12-14.
<https://people.unica.it/antonioiannizzotto/files/2013/01/Teoria-dei-Giochi-1.pdf>
- [2] J-P. Aubin - A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, 1984.