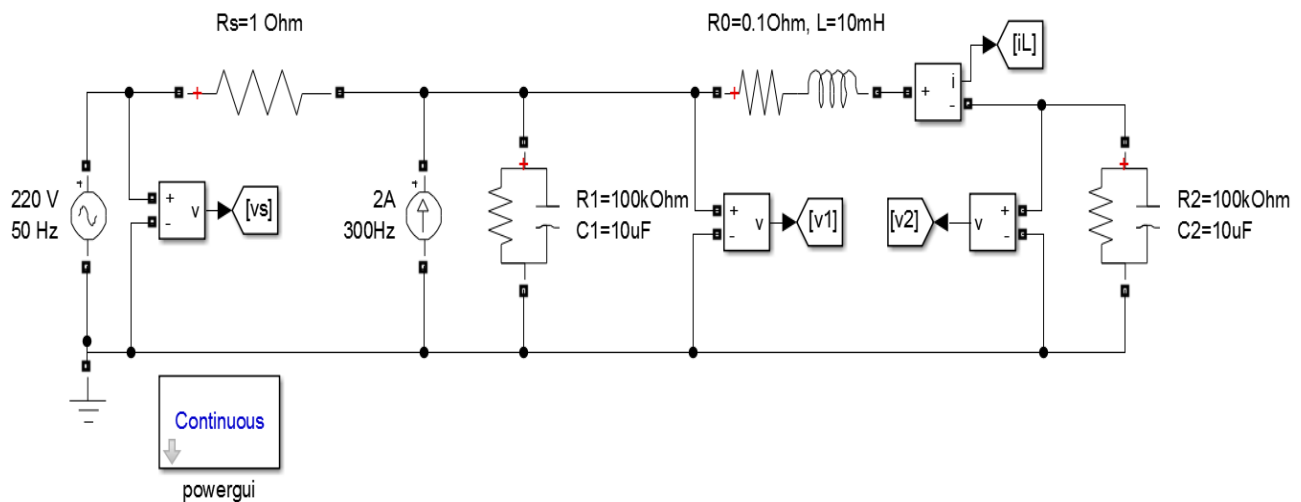


Esercitazione di Sistemi di Controllo Avanzati

Si consideri il circuito elettrico caratterizzato da un tratto di linea Π , alimentata da una prima linea il cui comportamento equivalente è rappresentato da un generatore AC di tensione efficace $V_s = 220V$, frequenza 50 Hz e resistenza interna $R_s = 1\ \Omega$.

A causa delle barre di raccordo tra linee (“*bar bus*”), correnti di accoppiamento ad alta frequenza perturbano il comportamento elettrico sulla linea. Per modellare tali distorsioni, al nodo “1” viene iniettata una corrente sinusoidale di ampiezza $I_d = 2\text{ A}$ e frequenza 300 Hz , corrispondente alla 5° armonica della frequenza fondamentale di rete. Ipotizzando misurabili esclusivamente la corrente sull’induttore $i_L(t)$, e la tensione $v_2(t)$, si richiede di calcolare per il sistema in questione:

- il modello in variabili di stato
- gli autovalori e la matrice modale del sistema
- la sua forma canonica diagonale
- la matrice risolvete, la matrice di trasferimento del sistema
- la matrice di transizione dello stato



Soluzione

1. Calcolo del modello in variabili di stato del sistema.

Il sistema in Figura è costituito da due generatori, rispettivamente di tensione e corrente, tre elementi dinamici, cioè in grado di immagazzinare energia, risp., due capacità ed una induttanza e quattro elementi statici, ovvero le resistenze. Note le relazioni costitutive per la capacità e l'induttanza

$$i_c = C \cdot \frac{dV_c}{dt} \quad , \quad v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Al fine di ricavare il modello in V.S. del sistema in figura si procede con l'applicazione della Legge di Kirchhoff delle correnti, applicata al nodo 1 e 2:

$$\text{Nodo 1: } \frac{v_s - v_1}{R_s} + i_d = \frac{v_1}{R_1} + C \cdot \frac{dv_1}{dt} + i_L \quad \rightarrow \quad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{(R_1 + R_s)}{C_1 R_1 R_s} \cdot v_1 - \frac{1}{C_1} \cdot i_L + \frac{1}{R_s C_1} \cdot v_s + \frac{1}{C_1} \cdot i_d$$

$$\text{Nodo 2: } i_L = \frac{v_2}{R_2} + C_2 \cdot \frac{dv_2}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot i_L - \frac{1}{C_2 R_2} \cdot v_2$$

Infine, applicazione della Legge di Kirchhoff delle tensioni alla maglia interna del circuito si ottiene:

$$v_1 - R_0 \cdot i_L - L \cdot \frac{di_L}{dt} - v_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_1 - \frac{R_0}{L} \cdot i_L - \frac{1}{L} \cdot v_2$$

Posto $x = [v_1, i_L, v_2]' \in \mathbb{R}^3$ si ricava

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_L \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_1 + R_s)}{C_1 R_1 R_s} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_0}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_L \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_s \\ i_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_L \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Da cui sostituendo i valori numerici risulta

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{(10^{-5} + 1)}{10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^5} & -\frac{1}{10^{-5}} & 0 \\ \frac{1}{10^{-2}} & -\frac{0.1}{10^{-2}} & -\frac{1}{10^{-2}} \\ 0 & \frac{1}{10^{-5}} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100001 & -10^5 & 0 \\ 100 & -10 & -100 \\ 0 & 10^5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10^5 & 10^5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calcolo degli autovalori ed autovettori del sistema

Per il calcolo degli autovalori del sistema è sufficiente calcolare le radici del polinomio caratteristico associato alla matrice A, ovvero:

$$P(s) = \det(sI - A) = \det \left(\begin{bmatrix} s + 100001 & 10^5 & 0 \\ -100 & s + 10 & 100 \\ 0 & -10^5 & s + 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\rightarrow (s + 1)(s + 10)(s + 100001) - (-10^7 \cdot (s + 100001) - 10^7 \cdot (s + 1)) = 0$$

$$\rightarrow (s + 1)(s + 10)(s + 100001) + 10^7 \cdot (2 \cdot s + 100002) = 0$$

$$\rightarrow s^3 + 100012 \cdot s^2 + 21100021 \cdot s + 100002,1 \cdot 10^7$$

$$\approx s^3 + 10^5 \cdot s^2 + 2.11 \cdot 10^7 \cdot s + 10^{12} = 0$$

Utilizzando matlab si ricava che il sistema è stabile ed i suoi autovalori valgono

$$\lambda_1 \approx -99901$$

$$\lambda_{2,3} \approx -56 \pm j \cdot 3163$$

Per ricavare gli autovalori del sistema, possiamo semplicemente risolvere l'equazione che definisce gli autovettori come direzioni invarianti, ovvero,

$$A \cdot u_i = \lambda \cdot u_i$$

$$\begin{bmatrix} -100001 & -10^5 & 0 \\ 100 & -10 & -100 \\ 0 & 10^5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -100001 \cdot u_1^i - 10^5 u_2^i = \lambda_i u_1^i \\ 100 u_1^i - 10 u_2^i - 100 u_3^i = \lambda_i u_2^i \\ 10^5 u_2^i = (1 + \lambda_i) u_3^i \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1 + \lambda_i) \cdot u_3^i = (100001 + \lambda_i) \cdot u_1^i \\ 100 u_1^i - 100 u_3^i = (10 + \lambda_i) \cdot u_2^i \\ u_2^i = (1 + \lambda_i) 10^{-5} \cdot u_3^i \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1 + \lambda_i) \cdot u_3^i = (100001 + \lambda_i) \cdot u_1^i \\ 100 u_1^i - 100 u_3^i = (10 + \lambda_i) \cdot (1 + \lambda_i) 10^{-5} \cdot u_3^i \\ u_2^i = (1 + \lambda_i) 10^{-5} \cdot u_3^i \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1 + \lambda_i) \cdot u_3^i = (100001 + \lambda_i) \cdot u_1^i \\ 100u_1^i = ((10 + \lambda_i) \cdot (1 + \lambda_i)10^{-5} + 100) \cdot u_3^i \\ u_2^i = (1 + \lambda_i)10^{-5} \cdot u_3^i \end{cases}$$

Sostituendo $\lambda_1 = -99901$ e posto $u_1^1 = -1$, si ricava l'autovettore associato a tale autovalore

$$\begin{cases} u_1^1 = -1 \\ u_2^1 = (1 + \lambda_1)10^{-5} \cdot u_3^1 = 0.00100008 \\ u_3^1 = \frac{100 \cdot u_1^1}{(10 + \lambda_1) \cdot (1 + \lambda_1)10^{-5} + 100} \end{cases} = -0.001001 \rightarrow \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.00100008 \\ -0.001001 \end{bmatrix}$$

Sostituendo $\lambda_2 = -56 + j \cdot 3163$ e posto $u_3^2 = -1$, si ricava l'autovettore associato a tale autovalore

$$\begin{cases} u_1^2 = \frac{u_3^2 \cdot ((10 + \lambda_i) \cdot (1 + \lambda_i)10^{-5} + 100)}{100} = -0.000456 - j \cdot 0.0316 \\ u_2^i = (1 + \lambda_i)10^{-5} \cdot u_3^2 = -0.000545 + j \cdot 0.031634 \\ u_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -0.000456 - j \cdot 0.0316 \\ -0.000545 + j \cdot 0.031634 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mentre l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_3 = -56 - j \cdot 3163$, può essere facilmente calcolato a partire da \bar{u}_2 come segue il suo complesso coniugato, oppure, al fine di ottenere una matrice modale reale come segue

$$P = [\bar{u}_1, \Re\{\bar{u}_2\}, \Im\{\bar{u}_2\}] = \begin{bmatrix} -1 & -0.000456 & -0.0316 \\ 0.001 & -0.000456 & 0.0316 \\ -0.001 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A conferma del fatto che gli autovettori di una matrice costituiscono una trasformazione invertibile per il sistema, è facile notare che il determinante associato alla matrice degli autovettori è nonnullo e pari a $\det(P) = 0.0316$.

3. Calcolare la forma canonica diagonale del sistema

Nota la matrice modale P della matrice A , definito il seguente cambio di variabile $x = P \cdot z$, la seguente sostituzione permette di riscrivere il sistema di partenza in un nuovo spazio di stato dove la matrice A_d è una matrice diagonale a blocchi di Jordan tale per cui, nel caso in questione risulta

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Re\{\lambda_2\} & \Im\{\lambda_2\} \\ 0 & -\Im\{\lambda_2\} & \Re\{\lambda_2\} \end{bmatrix}$$

dove H_2 denota il blocco di Jordan associato al modo pseudo-periodico. A valle del cambio di variabile risulta che

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_d \cdot z + B_d \cdot u \\ y &= C_d \cdot z + D \cdot u \end{aligned}$$

dove $A_d = P^{-1}AP = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $B_d = P^{-1}B$, $C_d = CP$.

4. Calcolo della matrice risolvante

Sia dato un modello in V.S.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x + D \cdot u \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^q$. Trasformando nel dominio di Laplace il precedente sistema differenziale risulta

$$\begin{aligned} s \cdot X(s) - x(0) &= A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ Y(s) &= C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \end{aligned}$$

da cui

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x(0) + (s \cdot I - A)^{-1} B \cdot U(s)$$

$$Y(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} \cdot x(0) + C((s \cdot I - A)^{-1} B + D) \cdot U(s)$$

Da tale espressione è immediato notare un termine legato all'evoluzione libera del sistema, i.e., legata alle condizioni energetiche iniziali del sistema, ed un termine di evoluzione forzata, legato all'ingresso di comando. Tale relazione è l'equivalente della formula di Lagrange nel dominio "s".

Nell'espressione precedente possiamo notare come la matrice

$$\varphi(s) = (s \cdot I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s \cdot I - A)} \cdot \text{agg}(s \cdot I - A) = \frac{1}{\det(s \cdot I - A)} \cdot \text{coff}(s \cdot I - A)^T$$

nota come Matrice Risolvante del sistema, influenzi sia l'evoluzione dello stato che dell'uscita del sistema. Questa matrice inoltre è sempre ben definita qualunque sia la matrice A del sistema.

Per il sistema considerato la matrice risolvante assume i seguenti valori

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \frac{\text{agg} \left(\begin{bmatrix} s + 100001 & 10^5 & 0 \\ -100 & s + 10 & 100 \\ 0 & -10^5 & s + 1 \end{bmatrix} \right)}{s^3 + 10^5 s^2 + 2.11 \cdot 10^7 s + 10^{12}} = \frac{\text{coff} \left(\begin{bmatrix} s + 100001 & 10^5 & 0 \\ -100 & s + 10 & 100 \\ 0 & -10^5 & s + 1 \end{bmatrix} \right)^T}{s^3 + 10^5 s^2 + 2.11 \cdot 10^7 s + 10^{12}} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} (s + 10) \cdot (s + 1) + 10^7 & -(-100(s + 1)) & 10^7 \\ -10^5(s + 1) & (s + 100001)(s + 1) & (s + 100001) \cdot 10^5 \\ 10^7 & -((s + 100001) \cdot 100) & (s + 100001)(s + 10) + 10^7 \end{bmatrix}^T}{s^3 + 10^5 s^2 + 2.11 \cdot 10^7 s + 10^{12}} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} (s + 10) \cdot (s + 1) + 10^7 & -10^5(s + 1) & 10^7 \\ 100(s + 1) & (s + 100001)(s + 1) & -((s + 100001) \cdot 100) \\ 10^7 & (s + 100001) \cdot 10^5 & (s + 100001)(s + 10) + 10^7 \end{bmatrix}}{s^3 + 10^5 s^2 + 2.11 \cdot 10^7 s + 10^{12}} = \\ &\approx \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 11s + 10^7 & -10^5(s + 1) & 10^7 \\ 100(s + 1) & (s + 100001)(s + 1) & -(100 \cdot s + 10^7) \\ 10^7 & 10^5 \cdot s + 10^7 & s^2 + 10^5 s + 1.1 \cdot 10^7 \end{bmatrix}}{(s + 9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)}\end{aligned}$$

Nota la matrice risolvete, è possibile quindi calcolare la matrice di trasferimento del sistema del sistema come segue:

$$\begin{aligned}G(s)_{m \times q} &= C((s \cdot I - A)^{-1}B + D) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 11s + 10^7 & -10^5(s + 1) & 10^7 \\ 100(s + 1) & (s + 100001)(s + 1) & -(100 \cdot s + 10^7) \\ 10^7 & 10^5 \cdot s + 10^7 & s^2 + 10^5 s + 1.1 \cdot 10^7 \end{bmatrix}}{(s + 9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)} \cdot \begin{bmatrix} 10^5 & 10^5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 10^5(s^2 + 11s + 10^7) & 10^5(s^2 + 11s + 10^7) \\ 10^7(s + 1) & 10^7(s + 1) \\ 10^{12} & 10^{12} \end{bmatrix}}{(s + 9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 10^7(s + 1) & 10^7(s + 1) \\ 10^{12} & 10^{12} \end{bmatrix}}{(s + 9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)}\end{aligned}$$

Da cui risultano le seguenti funzioni di trasferimento SISO, rispettivamente:

$$G_{11}(s)[\Omega^{-1}] = \frac{I_L(s)}{V_s(s)} = \frac{10^7(s+1)}{(s+9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)}, \quad G_{12}(s)[-] = \frac{I_L(s)}{I_d(s)} = \frac{10^7(s+1)}{(s+9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)}$$

$$G_{21}(s)[-] = \frac{V_2(s)}{V_s(s)} = \frac{10^{12}}{(s+9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)}, \quad G_{22}(s)[\Omega] = \frac{V_2(s)}{I_d(s)} = \frac{10^{12}}{(s+9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)}$$

da notare che il fatto che le $G_{i1}(s) = G_{i2}(s)$ per $i = 1, 2$, è una coincidenza numerica legata al fatto che la resistenza del generatore di tensione è pari a $R_s = 1\Omega$. Ad ogni modo si rimarca che le quattro f.d.t. sono dimensionalmente diverse, così come diverso è il loro significato fisico.

5. Calcolo della matrice di transizione dello stato

Per definizione, la matrice di transizione dello stato costituisce l'antitrasformata della matrice risolvete, ovvero:

$$\varphi(t) = e^{A \cdot t} = L^{-1}\{(s \cdot I - A)^{-1}\}$$

Questo concetto si dimostra facilmente dalle formule di Lagrange

$$\begin{cases} x(t) = e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ y(t) = C e^{A \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0) + C \cdot \int_{t_0}^t e^{A \cdot (t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D \cdot u(t) \end{cases}$$

antitrasformando il termine autonomo della trasformata di Laplace dello stato del sistema

$$x_\ell(t) = L^{-1}\{(s \cdot I - A)^{-1} \cdot x(0)\} = e^{A \cdot t} \cdot x(0)$$

Esistono diversi metodi per calcolare la matrice di transizione dello stato, tra questi ad esempio è possibile antitrasformare la matrice risolvete del sistema come segue

$$L^{-1} \left\{ \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 11s + 10^7 & -10^5(s+1) & 10^7 \\ 100(s+1) & (s+100001)(s+1) & -(100 \cdot s + 10^7) \\ 10^7 & 10^5 \cdot s + 10^7 & s^2 + 10^5 s + 1.1 \cdot 10^7 \end{bmatrix}}{(s+9.99 \cdot 10^4)(s^2 + 111s + 1.001 \cdot 10^7)} \right\} =$$

Ad ogni modo, quest'approccio risulta essere abbastanza macchinoso. In alternativa è possibile notare come, dallo sviluppo in serie della funzione esponenziale, risulta

$$e^{A \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} + \frac{(A \cdot t)^n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!}$$

Dove, per il Teorema di Cayley Hamilton, posto $Q(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot s^k$ il polinomio caratteristico di una matrice A , risulta che:

$$A^n + \sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot a_k = 0$$

Ovvero, la matrice A risolve il suo polinomio caratteristico, da cui risulta

$$\begin{aligned} e^{A \cdot t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} + \frac{t^n}{n!} \cdot \left[- \sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot a_k \right] + A \cdot A^n \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left(\frac{t^k}{k!} - \frac{a_k t^n}{n!} \right) + A \cdot A^n \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left(\frac{t^k}{k!} - \frac{a_k t^n}{n!} \right) + A \cdot \left[- \sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot a_k \right] \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left(\frac{t^k}{k!} - \frac{a_k t^n}{n!} - \frac{a_k A t^{n+1}}{(n+1)!} \right) + A^2 \cdot A^n \cdot \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} + \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^k}{k!} \end{aligned}$$

Dalla quale risulta che

$$e^{A \cdot t} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left(\frac{t^k}{k!} - \frac{a_k t^n}{n!} - \frac{a_k A t^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{a_k A^2 t^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \right)$$

Quindi, se sviluppassi sino ad infinito il precedente sviluppo in serie, otterrei la seguente serie di potenze della matrice A

$$\varphi(t) = e^{A \cdot t} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot \alpha_i(t)$$

Dove i coefficienti $\alpha_i(t)$ sono tempo-varianti e costituiti da un infinità di termini.

A questo punto, sia $P = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice modale del sistema, e sia $A_d = P^{-1}AP$, la forma diagonale della matrice di stato a valle del cambio di variabili $x = P \cdot z$, e sia

$$\varphi_d(t) = e^{A_d \cdot t} = \sum_{k=0}^{n-1} A_d^k \cdot \alpha_i^d(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^{-1}AP)^k \cdot \alpha_i^d(t)$$

la matrice risolvante associata al sistema in forma diagonale, poiché risulta che

$$(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}A^{k-1}P) \cdot (P^{-1}A^{k-1}P) = P^{-1}A^kP$$

allora

$$\varphi_d(t) = e^{A_d \cdot t} = \sum_{k=0}^{n-1} P^{-1}A^kP \cdot \alpha_i^d(t) = P^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot \alpha_i^d(t) \right] P$$

Dalla precedente, è immediato dedurre come i coefficienti scalari α_i^d della forma diagonale coincidono con quelli del sistema nella sua forma originale, ovvero

$$\varphi_d(t) = e^{A_d \cdot t} = P^{-1}\varphi(t)P = P^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot \alpha_i(t) \right] P$$

da cui, possiamo esplicitare

$$\varphi(x) = P \cdot \varphi_d(t) \cdot P^{-1} = P \cdot e^{A_d \cdot t} \cdot P^{-1}$$

A valle di queste considerazioni, possiamo quindi ricavare la matrice di trasferimento del sistema $\varphi(t)$ direttamente dalla $\varphi_d(t)$, una volta noti gli autovalori della matrice A . Nello specifico sia il set di autovalori

$$\lambda_1 \approx -99901$$

$$\lambda_{2,3} \approx \beta_2 \pm j \cdot \omega_2 = -56 \pm j \cdot 3163$$

A questi, può essere associata la forma diagonale

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -99901 & 0 & 0 \\ 0 & -56 & 3163 \\ 0 & -3163 & -56 \end{bmatrix}$$

Da cui risulta che

$$\varphi_d(t) = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_i \cdot t) & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) \\ 0 & -e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \end{bmatrix}$$

Infine nota la matrice modale

$$P = [\vec{u}_1, \Re\{\vec{u}_2\}, \Im\{u_2\}] = \begin{bmatrix} -1 & -0.0005 & -0.0316 \\ 0.001 & -0.0005 & 0.0316 \\ -0.001 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

associata alla matrice A, risulta

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_i \cdot t) & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) \\ 0 & -e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \end{bmatrix} P^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -0.0005 & -0.0316 \\ 0.001 & -0.0005 & 0.0316 \\ -0.001 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_i \cdot t) & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) \\ 0 & -e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) & e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} -1.0010 & -1.0011 & -0.0010 \\ -0.0010 & -0.0010 & 1 \\ 0.0316 & 31.6433 & 0.0173 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Infine è possibile citare un ultimo metodo per calcolare la matrice di transizione dello stato, che consiste nell'applicare direttamente lo Sviluppo di Sylvester, ovvero:

$$\varphi(t) = e^{A \cdot t} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot \alpha_k(t) = \alpha_0(t) \cdot I + \alpha_1(t) \cdot A + \dots + \alpha_{n-1}(t) \cdot A^{n-1}$$

Dove i coefficienti tempo-varianti $\alpha_i(t)$ possono essere ricavati per mezzo della matrice di Vandermonde V e sfruttando i risultati del Teorema di Caley-Hamilton, nello specifico, risolvendo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_0(t) + \lambda_1 \cdot \alpha_1(t) + \lambda_1^2 \cdot \alpha_2(t) = e^{\lambda_1 \cdot t} \\ \alpha_0(t) + \Re\{\lambda_2\} \cdot \alpha_1(t) + \Re\{\lambda_2^2\} \cdot \alpha_2(t) = e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) \\ \Im\{\lambda_2\} \cdot \alpha_1(t) + \Im\{\lambda_2^2\} \cdot \alpha_2(t) = e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) \end{cases}$$

dove $\beta_2 = \Re\{\lambda_2\}$ e $\omega_2 = \Im\{\lambda_2\}$. Ne consegue che:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \Re\{\lambda_2\} & \Re\{\lambda_2^2\} \\ 0 & \Im\{\lambda_2\} & \Im\{\lambda_2^2\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \\ e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) \\ e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) \end{bmatrix}$$

dove

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \Re\{\lambda_2\} & \Re\{\lambda_2^2\} \\ 0 & \Im\{\lambda_2\} & \Im\{\lambda_2^2\} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -99901 & 99802 \cdot 10^5 \\ 1 & -56 & -1.0004 \cdot 10^7 \\ 0 & 3163 & -3.5116 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Da cui risulta

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} = V^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \\ e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) \\ e^{\beta_2 \cdot t} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) \end{bmatrix}$$

Da cui, noti i coefficienti, possiamo ricavare la matrice di transizione dello stato in forma esplicita come segue:

$$\varphi(t) = e^{A \cdot t} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot \alpha_k(t) = \alpha_0(t) \cdot I + \alpha_1(t) \cdot A + \alpha_2(t) \cdot A^2$$

6. Codice matlab esercitazione

```
clc, clear all, close all
%% Parametri del Sistema
Rs=1;
C1=10e-6; R1=100e3;
C2=10e-6; R2=100e3
L=10e-3; R0=0.1

%% Modello in V.S.
A=[-(1/(R1*C1)+1/(Rs*C1)), -1/C1, 0; 1/L, -R0/L, -1/L; 0, 1/C2, -1/(R2*C2)]
B=[1/(Rs*C1) 1/C1; 0, 0; 0, 0]
C=[0 1 0; 0 0 1]
D=[ 0, 0; 0 0]

R=[A B;C D]

rank(ctrb(A,B)) % Sistema Controllabile
rank(observ(A,C)) % Sistema Osservabile

%% Calcolo Polinomio Caratteristico in forma simbolica
syms s real
sI_A=s*eye(3)-A
det(sI_A)
autovalori_metodo1=roots([1 100012 0.21100021*10^8 0.100002100001*10^13])

% Calcolo Autovalori ed Autovettori con il comando "eig"
[autoVett, autoVal_M]=eig(A)
% Autovalori
l1=autoVal_M(1,1)
l2=autoVal_M(2,2)
l3=autoVal_M(3,3)
% Autovettori
u1=autoVett(:,1)
u2=autoVett(:,2)
u3=autoVett(:,3)
% Verifica equazione agli autovalori
A*u1-l1*u1
A*u2-l2*u2
A*u3-l3*u3

%% Calcolo a mano dell'autovettore associato a l1
u11=-1
u31=100*u11/((10+l1)*(1+l1)*10^-5+100)
u21=(1+l1)*10^-5*u31

v1=[u11; u21; u31]
%% Calcolo a mano dell'autovettore associato a l2
u32=1;
u12=1/(100/((10+l2)*(1+l2)*10^-5+100))*u32
u22=(1+l2)*10^-5*u32
v2=[u12;u22;u32]

%% Matrice degli autovettori del sistema, o matrice modale.
P=[v1 real(v2) imag(v2)]
det(P)
%% Calcolo Matrice di trasferimento per il sistema MIMO
% W(s)=C(sI-A)^-1B
F=ss(A,B,C,D)
Ws=tf(F)
```

```
%% Calcolo Matrice risolvente:
% Phi(s)=(sI-A)^-1
phi=tf(ss(A,eye(3),eye(3),zeros(3,3)))
% Elementi matrice risolvente
phi11=phi(1,1); phi12=phi(1,2); phi13=phi(1,3);
phi21=phi(2,1); phi22=phi(2,2); phi23=phi(2,3);
phi31=phi(3,1); phi32=phi(3,2); phi33=phi(3,3);

%% Dalla W(s) risulta 4 f.d.t. SISO
Fdt_IL_Vs=Ws(1,1)
Fdt_IL_Id=Ws(1,2)
Fdt_V2_Vs=Ws(2,1)
Fdt_V2_Id=Ws(2,2)

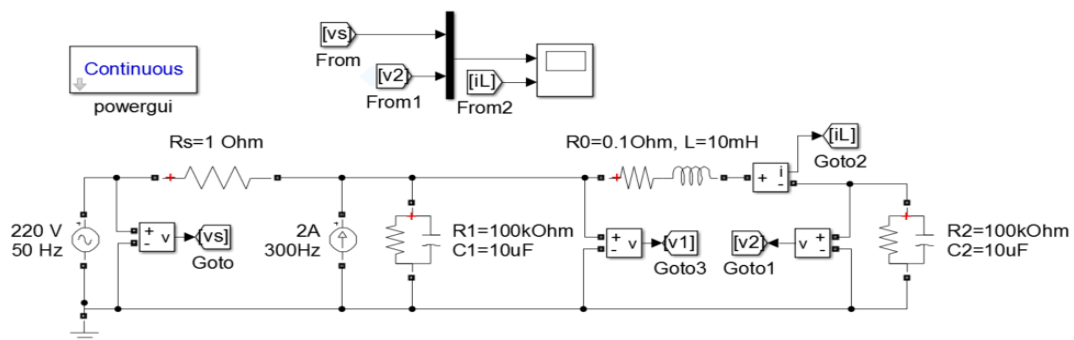
%% Calcolo sistema in forma diagonale
Ad=P^-1*A*P;
Bd=P^-1*B;
Cd=C*P
Dd=D
format long
% Calcolo matrice di Vandermonde
V=[1 11 11^2;
    1 real(12) real(12^2);
    0 imag(12) imag(12^2)]
% Calcolo matrice di Vandermonde con matlab
Vmatlab=fliplr(vander([11 12 13]))
```

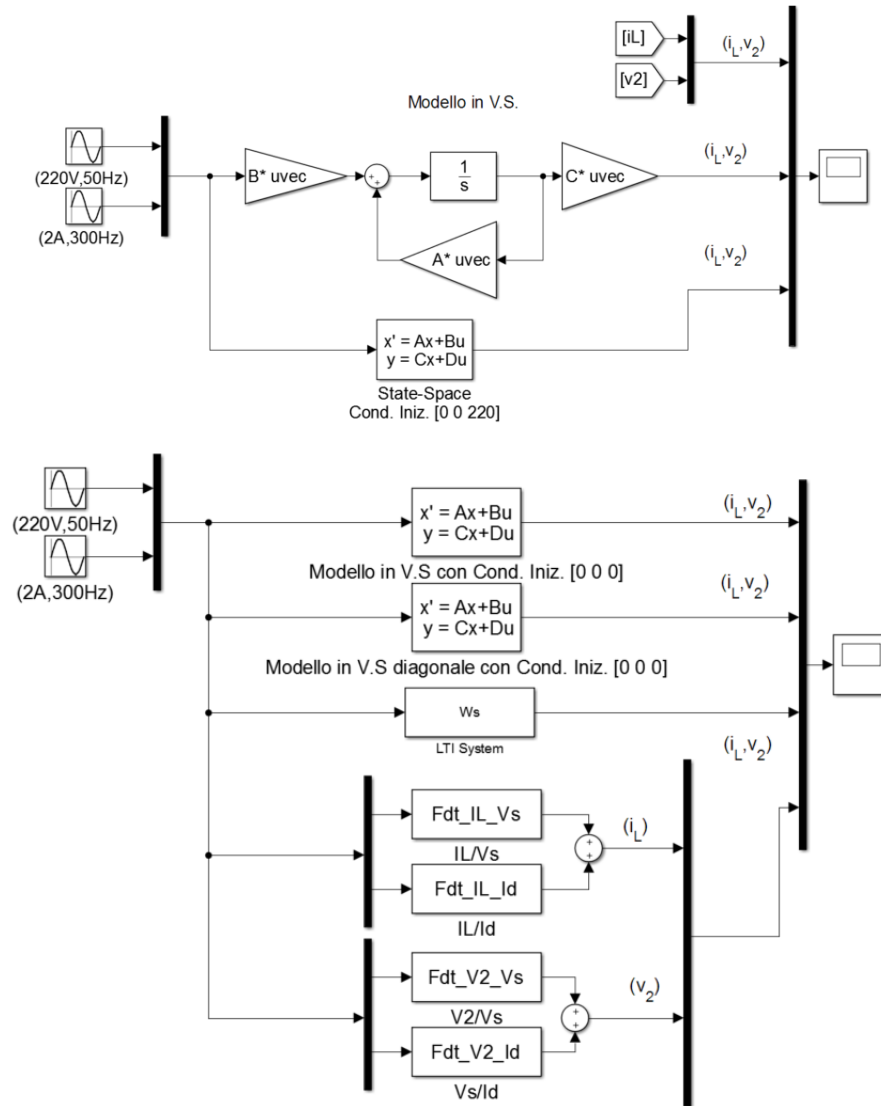
7. Schema Simulink esercitazione

I blocchi utilizzati per lo sviluppo del codice Simulink dell'esercitazione appartengono rispettivamente alle seguenti librerie di sviluppo:

- *Simulink/Continuous,*
- *Simulink/Math Operations,*
- *Simulink/Sources,*
- *Simulink/Sinks,*
- *Simscape/Power Systems/Specialized Technology/Fundamental Blocks*
- *Simscape/Power Systems/Specialized Technology/Control & Measurements Control System Toolbox/LTI System*

Di seguito si riportano gli screenshot del codice.





Authors: Dr. Ing. Alessandro Pilloni¹, Prof. Elio Usai¹

A. Pilloni and E. Usai are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {alessandro.pilloni,eusai}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.