

# Analisi di sistemi non lineari

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad \mathbf{x} \in R^n \quad \mathbf{y} \in R^p \quad \mathbf{u} \in R^q$$

$\mathbf{f}$  è un vettore di funzioni che definiscono la dinamica delle variabili di stato  $\mathbf{x}$ , eventualmente in presenza dell'ingresso  $\mathbf{u}$ , ed  $\mathbf{h}$  è il vettore della trasformazione in uscita che lega lo stato con l'uscita  $\mathbf{y}$

Se le funzioni non dipendono dal tempo, e l'ingresso è assente o può essere rappresentato da funzioni esplicite dello stato, il sistema si dice **autonomo** (e stazionario)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad \mathbf{x} \in R^n \quad \mathbf{y} \in R^p$$

Se l'ingresso influenza direttamente la trasformazione in uscita il sistema presenta una **componente istantanea**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t)\end{aligned}\quad \mathbf{x} \in R^n \quad \mathbf{y} \in R^p \quad \mathbf{u} \in R^q$$

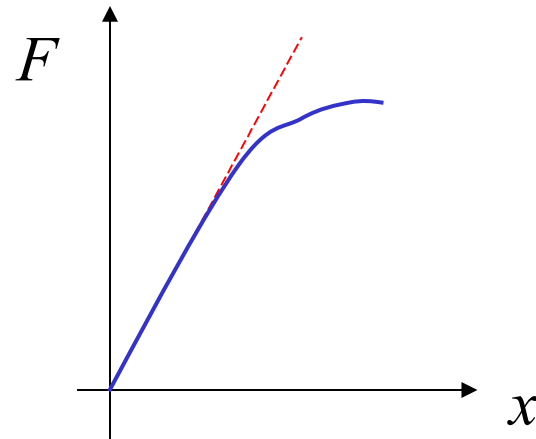
# Analisi di sistemi non lineari

Tutti i sistemi reali presentano dei comportamenti non lineari che però in specifiche condizioni e campi di funzionamento possono anche approssimarsi con dinamiche lineari.

Es.: molle

$$\hat{F} = k \cdot x$$

$$F = k \cdot x - k' \cdot x^3 \quad 0 < k' \ll k$$



Le approssimazioni lineari, essendo valide in un campo limitato, possono comportare limitazioni nelle prestazioni ammissibili dei sistemi.

# Esempi di non linearità

Prodotto tra variabili di stato	→	accelerazione centrifuga/Coriolis
Valore assoluto	→	attrito fluidodinamico
Funzione segno	→	attrito secco
Funzioni trigonometriche	→	vincoli geometrici nei robot
Saturazione	→	materiali ferromagnetici
Back-lash	→	ingranaggi meccanici
Isteresi	→	relè elettromeccanici
Radice quadrata	→	efflusso di fluidi da forami

# Analisi di sistemi non lineari

Un sistema non lineare può presentare comportamenti i più vari, da quelli molto simili a sistemi lineari con un solo punto di equilibrio globalmente stabile, funzionamenti apparentemente non deterministici (es. sistemi caotici), funzionamenti oscillatori permanenti autonomi (cicli limite), convergenza/divergenza in tempo finito o asintotica, etc.

Uno stesso sistema di equazioni differenziali non lineari può presentare comportamenti e proprietà completamente differenti al variare dei parametri: possono comparire/sparire punti di equilibrio (biforcazioni), oppure modificarsi le condizioni di stabilità, etc. Questo comporta la necessità di analisi specifiche caso per caso.

Una caratteristica di un sistema non lineari è costituita dai punti di equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$ , ovvero le soluzioni ammissibili della equazione non lineare

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}) = \mathbf{0}$$

**Un sistema non lineare può avere un numero finito o infinito di punti di equilibrio, isolati o contigui, ciascuno dei quali può essere stabile, instabile o di sella**

# Esempi

$$\dot{x}_1(t) = 1 - x_1^2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$

$$x_{1_{eq}} = +1$$

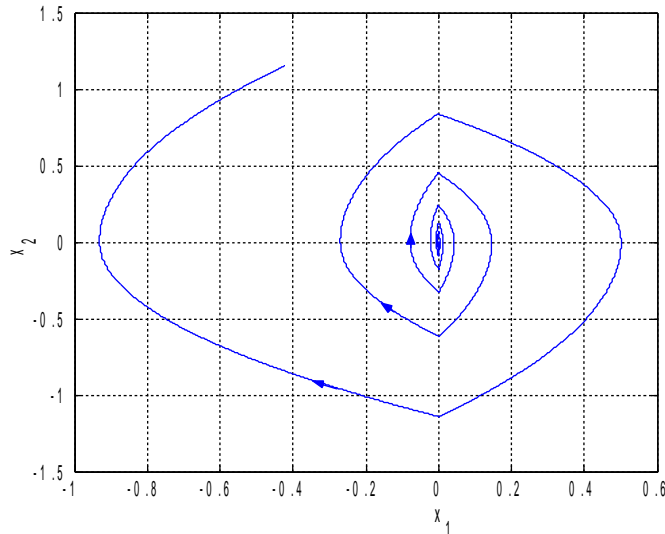
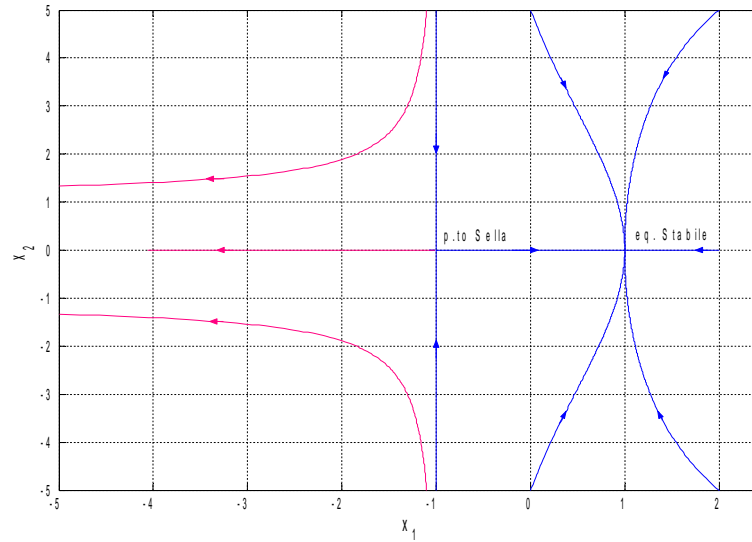
$$x_{2_{eq}} = 0$$

*stabile*

$$x_{1_{eq}} = -1$$

$$x_{2_{eq}} = 0$$

*punto di sella*



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

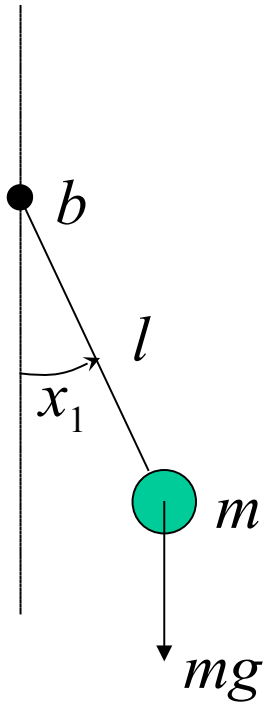
$$\dot{x}_2(t) = -\text{sgn}(x_1) + 0.3\text{sgn}(x_2)$$

$$x_{1_{eq}} = 0$$

$$x_{2_{eq}} = 0$$

*instabile*

# Esempi



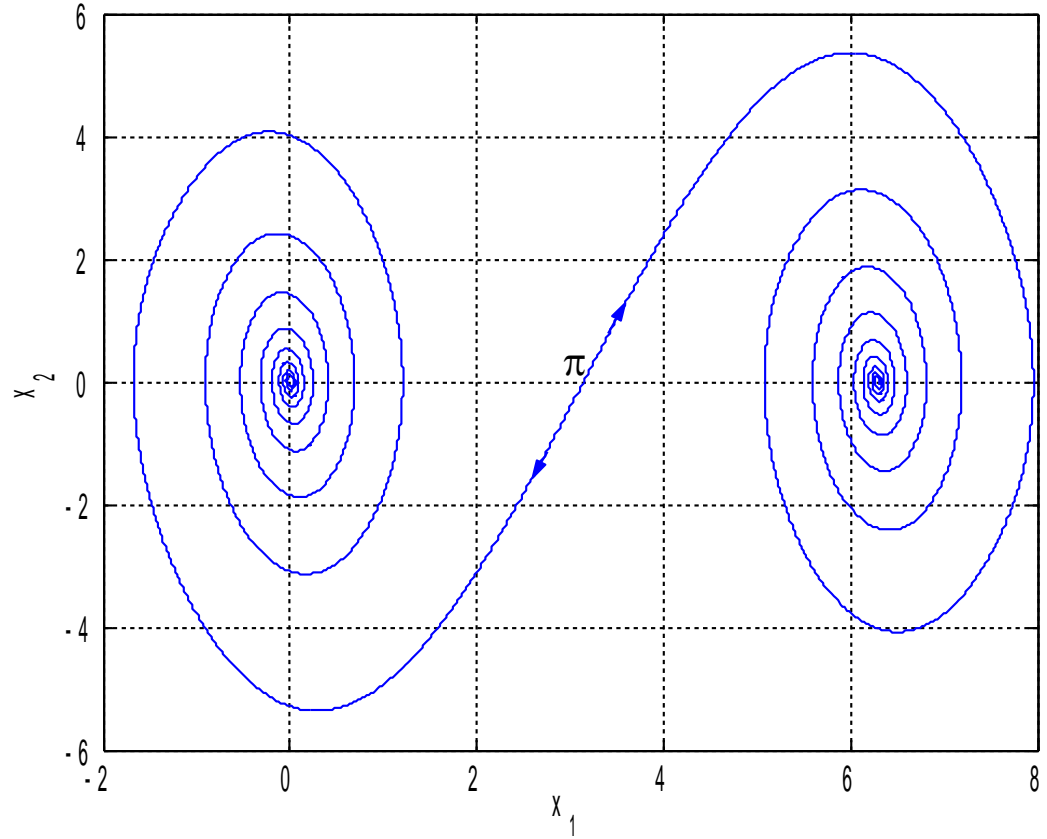
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2$$

$$x_{1_{eq}} = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$x_{2_{eq}} = 0$$

*stabili*

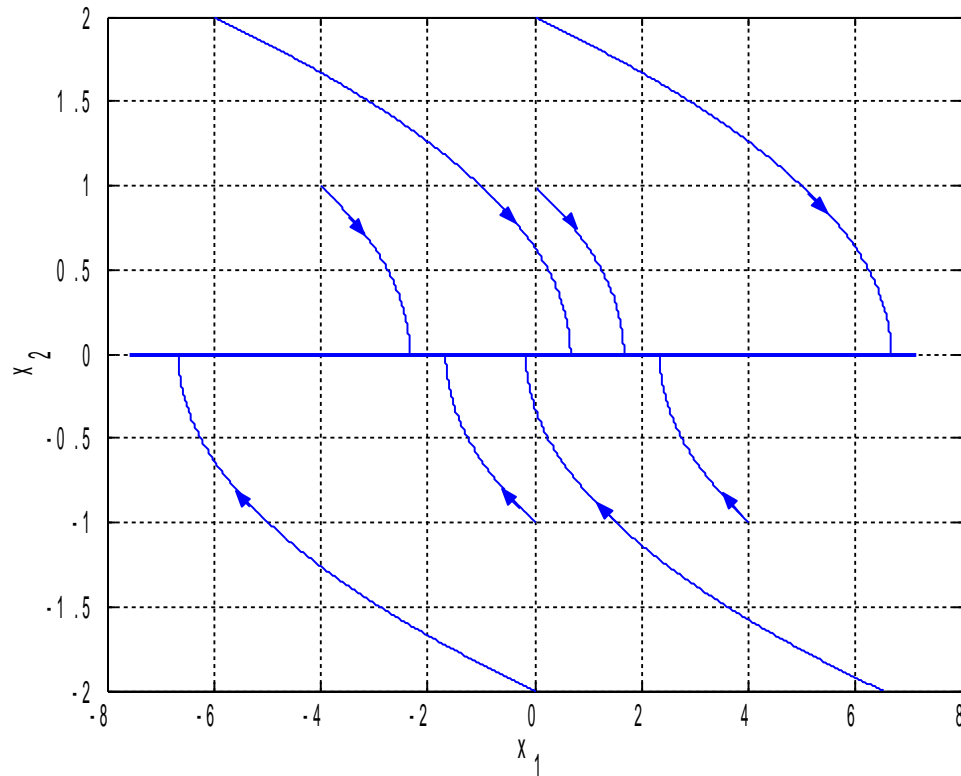


$$x_{1_{eq}} = \pm(2k+1)\pi \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$x_{2_{eq}} = 0$$

*instabili*

# Esempi



$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.3 \operatorname{sgn}(x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1_{eq}} &\in \mathbb{R} \\ x_{2_{eq}} &= 0\end{aligned}\quad \textit{stabile}$$

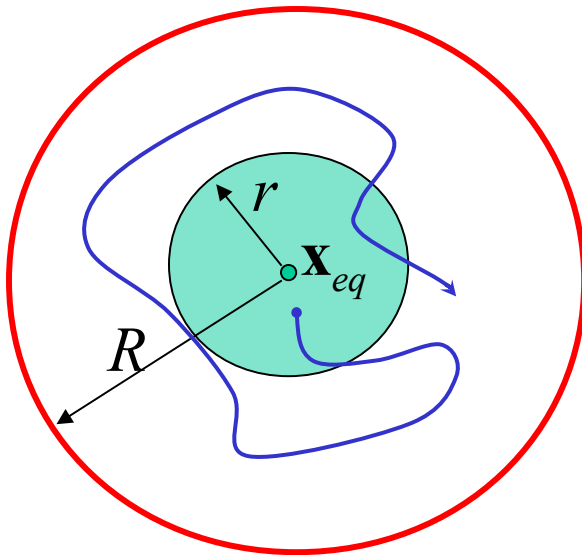
# Stabilità dell'equilibrio

Dato un sistema autonomo non lineare  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

un suo punto di equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$  si definisce stabile secondo Lyapunov se

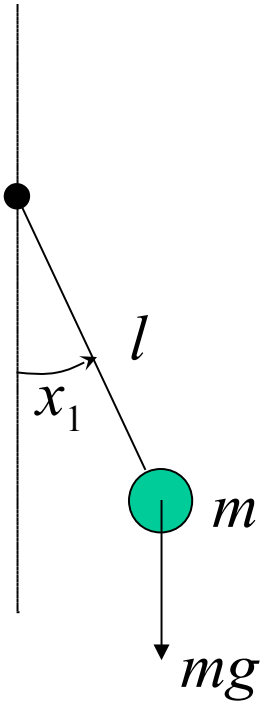
$$\forall R > 0 \quad \exists r(R) > 0 \quad \text{tale che } \mathbf{x}(t_0) \in B(\mathbf{x}_{eq}, r) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{x}_{eq}, R) \quad \forall t \geq t_0$$

essendo  $B(\mathbf{X}, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{X}\| \leq \rho\}$  la bolla di raggio  $\rho$  centrata in  $\mathbf{X}$



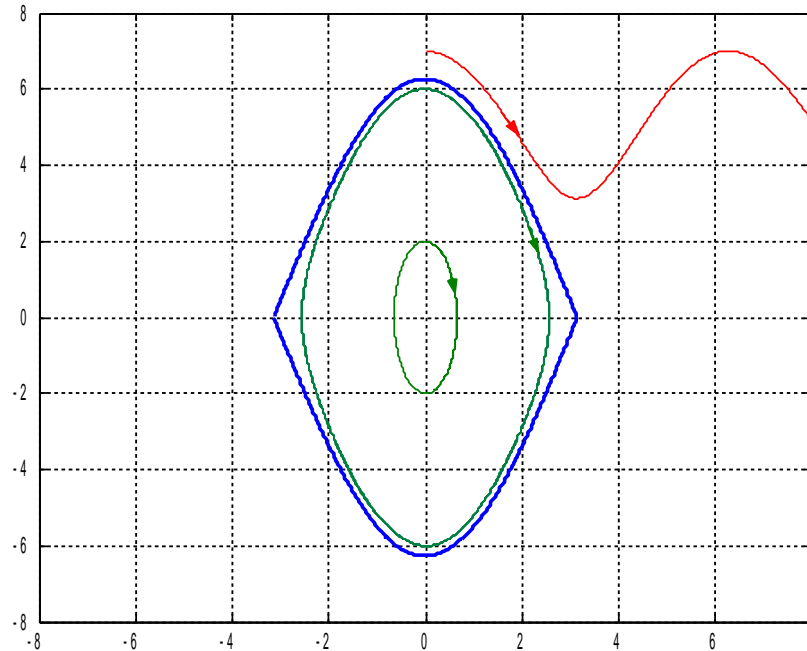
Il valore di  $R$  può essere preso arbitrariamente piccolo, ed il punto di equilibrio sarà stabile solo se esiste un intorno, di raggio  $r$ , del punto di equilibrio tale che per qualunque perturbazione entro tale intorno la traiettoria nel sistema rimane sempre confinata nell'intorno di raggio  $R$  **arbitrario**

# Esempio



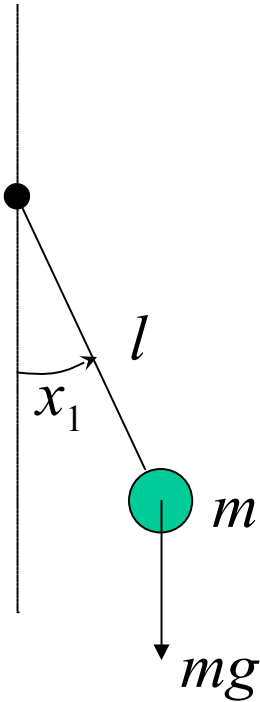
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) \\ l &= 1, \quad m = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1_{eq}} &= 0 \\ x_{2_{eq}} &= 0\end{aligned} \quad \text{stabile}$$



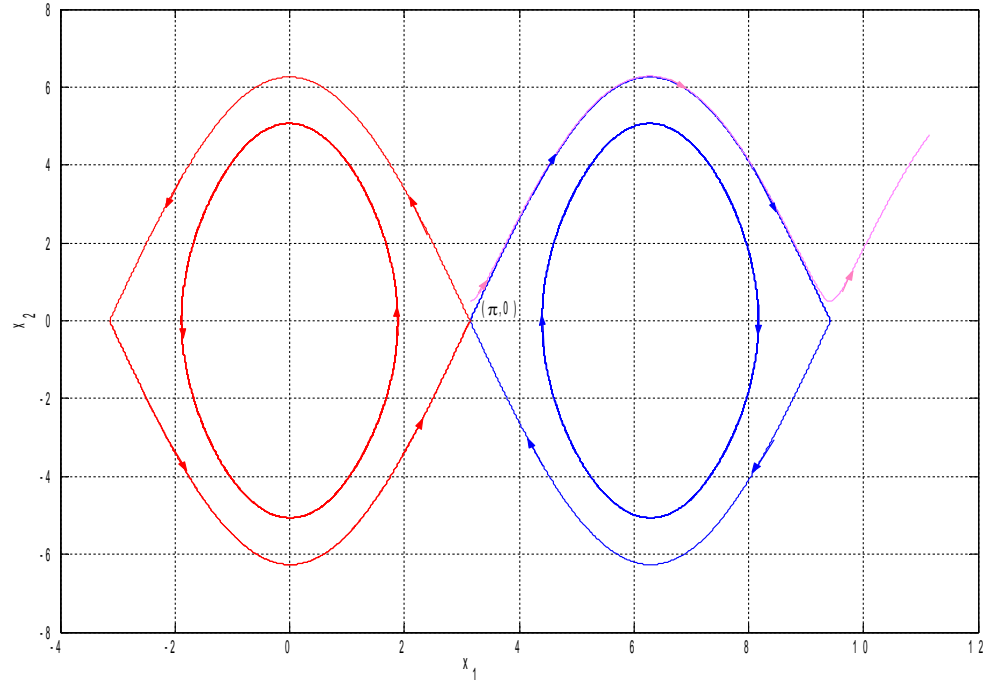
Considerata una qualunque circonferenza di raggio  $R$ , è sempre possibile definire una circonferenza di raggio  $r < R$ , interna al dominio delimitato dalla linea azzurra tale che la traiettoria perturbata periodica sia interna alla circonferenza di raggio  $R$ .

# Esempio



$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) \\ l &= 1, \quad m = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1_{eq}} &= \pi \\ x_{2_{eq}} &= 0\end{aligned} \quad \textit{instabile}$$

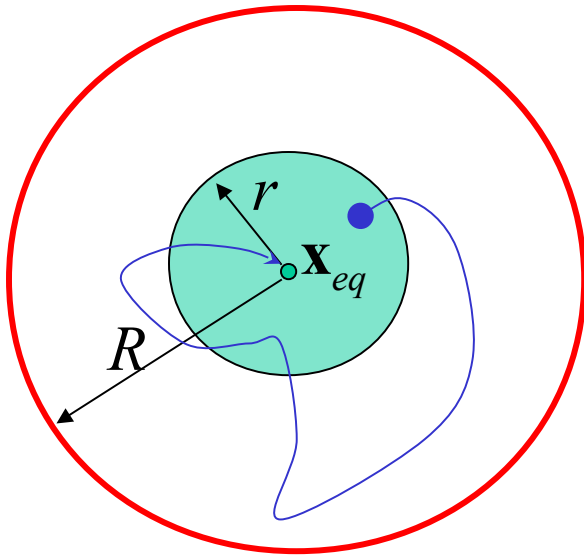


Qualunque sia la circonferenza di raggio  $R$ , è sempre possibile definire un intorno del punto di equilibrio, di raggio  $r < R$ , tale che la traiettoria perturbata esca dalla circonferenza di raggio  $R$ .

# Stabilità dell'equilibrio

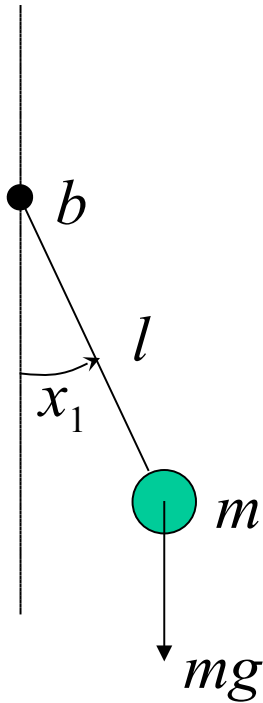
Il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$  si definisce **asintoticamente stabile** se è stabile ed inoltre risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{eq}\| = 0$$



La traiettoria perturbata a partire da un punto interno alla circonferenza di raggio  $r$ , oltre a non uscire mai dalla circonferenza di raggio  $R$  **arbitraria**, tende a convergere verso il punto di equilibrio al passare del tempo

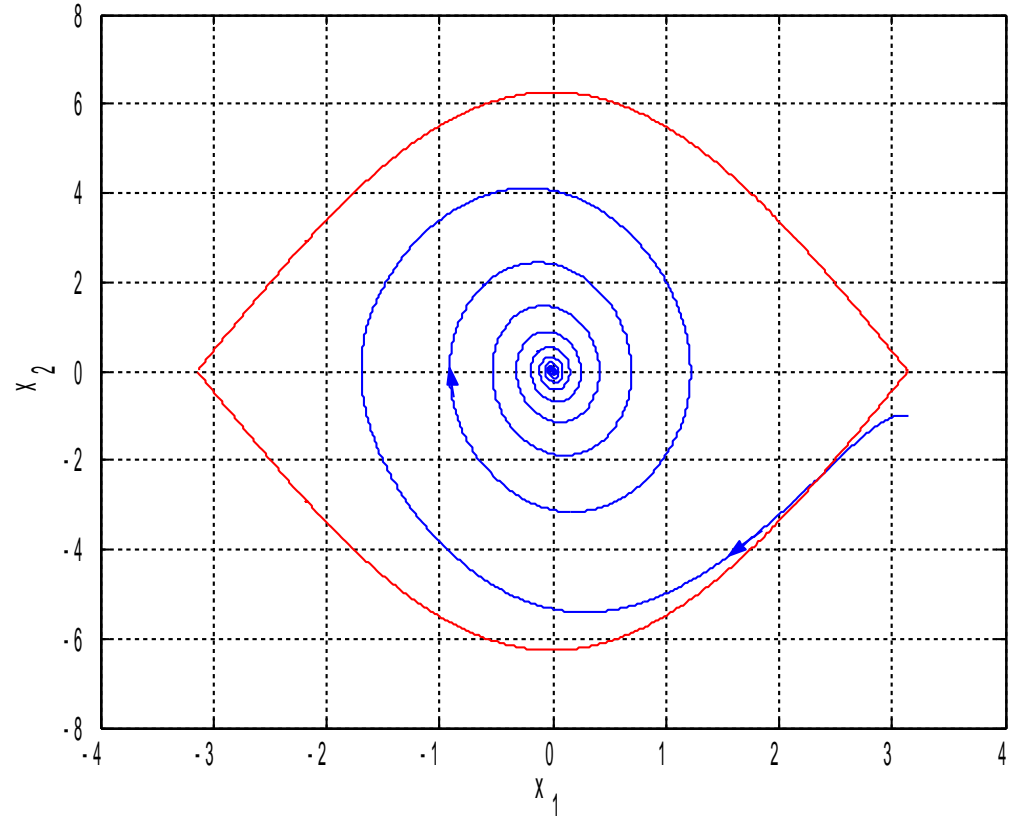
# Esempi



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2$$

$$l = 1, \quad m = 1, \quad b = 0.5$$

$$x_{1_{eq}} = 0$$
$$x_{2_{eq}} = 0 \quad \text{stabile}$$



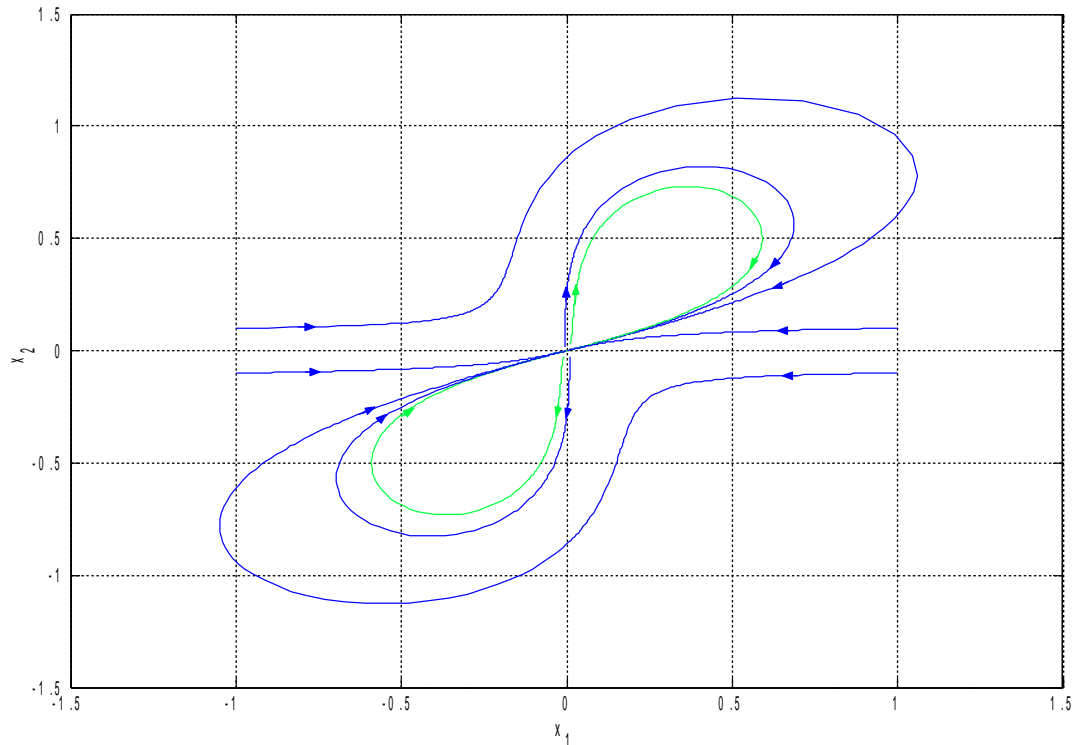
La presenza dell'attrito  $b$  rende l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile, anche a partire da alcune condizioni iniziali non interne al dominio individuato dalla linea rossa

# Esempi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2(t)(x_2 - x_1) + x_2^5 \\ \dot{x}_2 &= x_2^2(t)(x_2 - 2x_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{1_{eq}} &= 0 \\ x_{2_{eq}} &= 0\end{aligned}\quad \textit{instabile}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| = 0$$

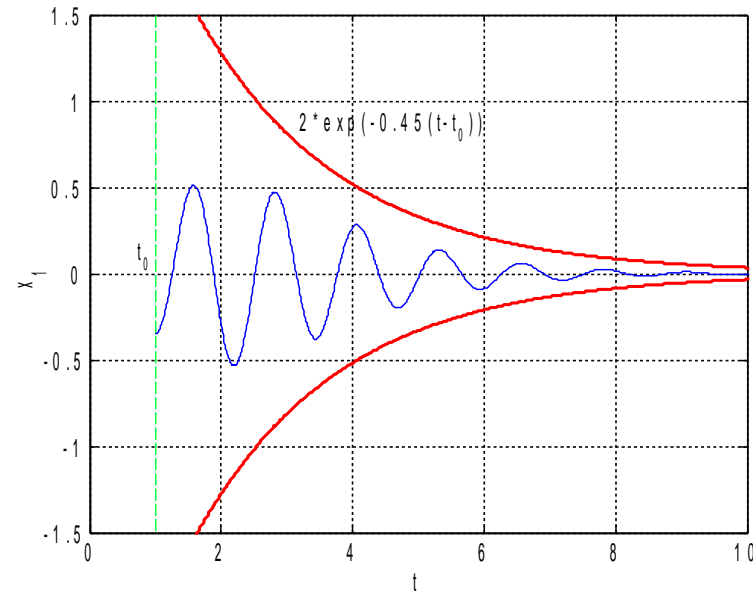
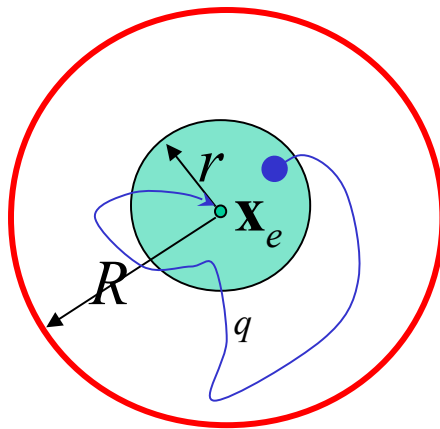


Tutte le traiettorie convergono verso l'origine, però qualunque perturbazione con punto iniziale nei quadranti pari, anche piccola, genera una traiettoria che rimane esterna ad un dominio i cui limiti sono prossimi alle traiettorie verdi. L'origine è un punto di equilibrio instabile, ma anche un **punto di attrazione** del sistema.

# Stabilità dell'equilibrio

Il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$  si definisce **esponenzialmente stabile** se è stabile ed inoltre risulta

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{eq}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{eq}\| e^{-\lambda t} \quad \alpha, \lambda > 0 \quad \forall t > t_0$$



La traiettoria perturbata a partire da un punto interno alla circonferenza di raggio  $r$ , oltre a non uscire mai dalla circonferenza di raggio  $R$  **arbitraria**, tende a convergere verso il punto di equilibrio, con un tasso di convergenza superiore a quello di un esponenziale decrescente. Un punto di equilibrio esponenzialmente stabile è anche asintoticamente stabile, ma non viceversa.

# Esempi

$$\dot{x} = -x^2$$
$$x \in \mathbb{R}^+$$

$$x = 0 \quad \text{stabile}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - 0\| = 0$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale nel dominio di validità sono del tipo

$$x(t) = \frac{1}{a+t} \quad a = \frac{1}{x(t_0)} - t_0$$

Tali soluzioni non sono sommabili, e quindi non maggiorabili da una funzione esponenziale decrescente, in quanto risulta

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{a+t} dt = \ln(a+t) - \ln(a+t_0) \quad a \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{a+t} dt \rightarrow \infty$$

Il sistema è asintoticamente stabile ma non esponenzialmente stabile

# Esempi

Un sistema lineare autonomo stabile è anche esponenzialmente stabile

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \Re\{eig(\mathbf{A})\} = \Re\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\} < 0$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{v_i} R_{i,j} t^{j-1} e^{\lambda_i t}$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0\| = \left\| \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{v_i} R_{i,j}(\mathbf{x}_0) t^{j-1} e^{\lambda_i t} \right\| \leq \alpha \|\mathbf{x}_0\| e^{-\bar{\lambda}t}$$
$$\alpha > 0 \qquad 0 < \bar{\lambda} \leq \min_{j=1, \dots, s} |\Re\{\lambda_i\}|$$

Dalla relazione su riportata risulta anche che un sistema lineare autonomo al limite di stabilità è stabile secondo Lyapunov. Infatti, la relazione tra i raggi  $R$  ed  $r$  risulta

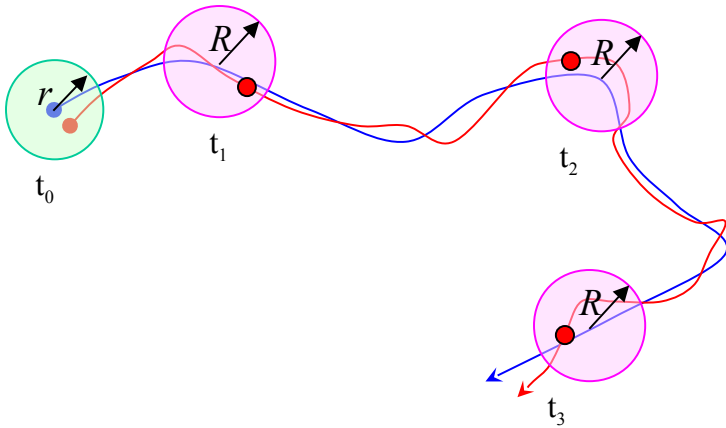
$$\|\mathbf{x}_0\| = r \leq \frac{R}{\bar{R}} = \frac{\max_t \|\mathbf{x}(t)\|}{\bar{R}}$$

# Stabilità del movimento

Dato un sistema autonomo non lineare  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in R^n$

un suo movimento  $\mathbf{x}^*(t)$ , a partire dal punto  $\mathbf{x}^*(t_0)$ , si definisce stabile secondo Lyapunov se

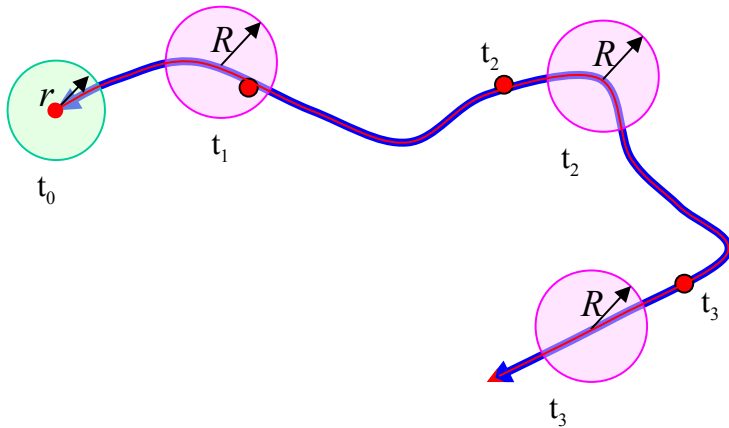
$$\forall R > 0 \quad \exists r(R) > 0 \quad \text{tale che} \quad \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| \leq r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| \leq R \quad \forall t \geq t_0$$



Ad ogni istante di tempo la distanza tra i punti del movimento di riferimento e di quello perturbato devono distare non più di  $R$ , se i gli stati iniziali non distavano più di  $r$ .  
 $R$  può essere arbitrariamente piccolo.

# Stabilità del movimento

La “sovrapposizione spaziale” del movimento perturbato con quello di riferimento non ne garantisce la stabilità



Pur partendo da condizioni iniziali praticamente coincidenti la traiettoria rossa (movimento perturbato) viene percorsa con velocità differente da quella azzurra del movimento di riferimento, che quindi non è stabile.

Un sistema caratterizzato da movimenti stabili garantisce che piccole perturbazioni non generino comportamenti estremamente differenti (approssimabilità).

# Esempio

I sistemi caotici sono tipicamente caratterizzati da movimenti instabili  
(*circuito di Chua con non linearità cubica*)

$$\dot{x}_1 = -acx_1 + ax_2 - ax_1^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3$$

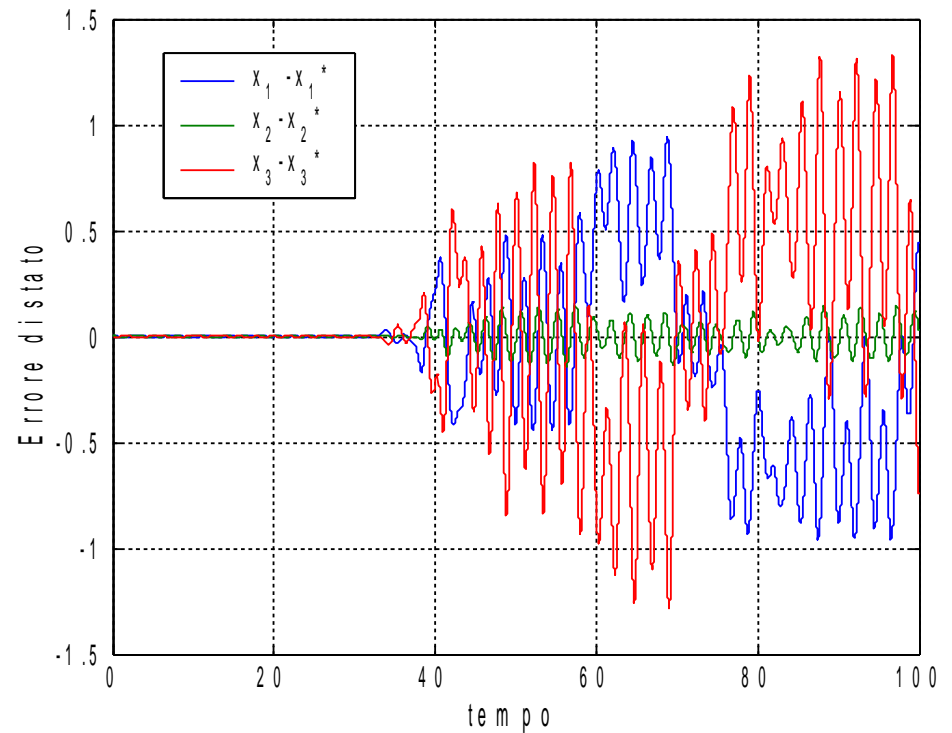
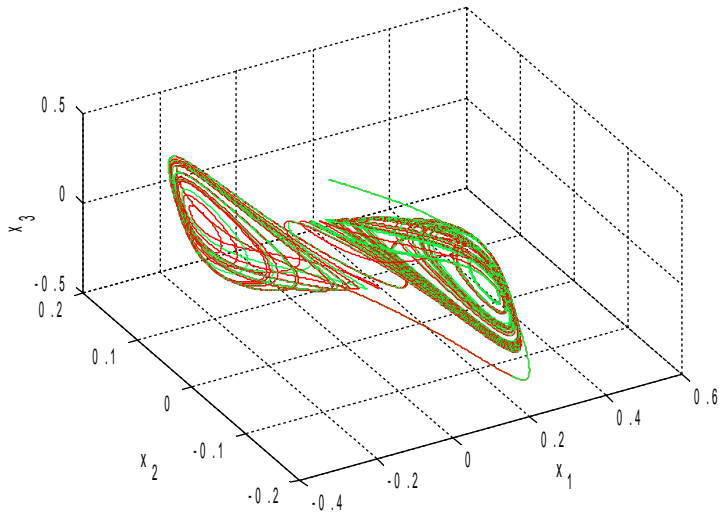
$$\dot{x}_3 = -bx_2$$

$$a = 10, b = 16, c = -0.143$$

$$\mathbf{x}_0^* = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]^T$$

$$\mathbf{x}_0 = [0.100001 \quad 0.1 \quad 0.1]^T$$

Pur in presenza di una minima variazione dello stato iniziale si nota una divergenza temporale ma con simile occupazione spaziale.



# Stabilità dell'equilibrio

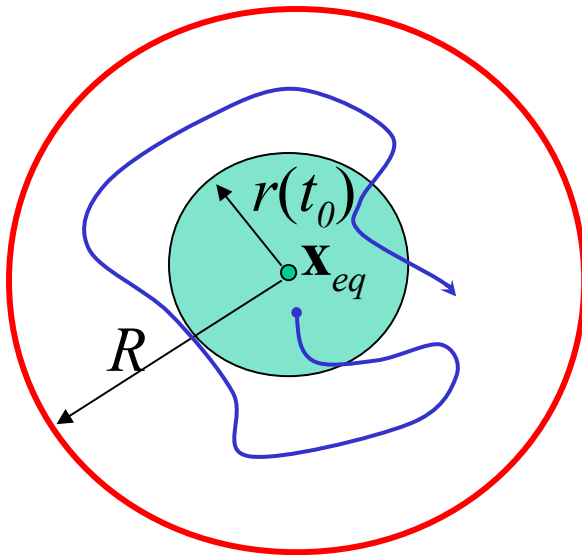
*sistemi non autonomi*

Dato un sistema non lineare  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$   $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i suoi punti di equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$  sono definiti dall'equazione  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$

Il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$  si definisce stabile secondo Lyapunov se

$$\forall R > 0 \quad \exists r(R, t_0) > 0 \quad \text{tale che } \mathbf{x}(t_0) \in B(\mathbf{x}_{eq}, r) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{x}_{eq}, R) \quad \forall t \geq t_0$$

essendo  $B(\mathbf{X}, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{X}\| \leq \rho\}$  la bolla di raggio  $\rho$  centrata in  $\mathbf{X}$



Il valore di  $r$  dipende non solo dal valore di  $R$ , ma anche dall'istante iniziale  $t_0$ .

# Esempio

$$\dot{x}_1 = -\frac{(0.5 + \sin(t))x_1}{1 + |x_1|}$$

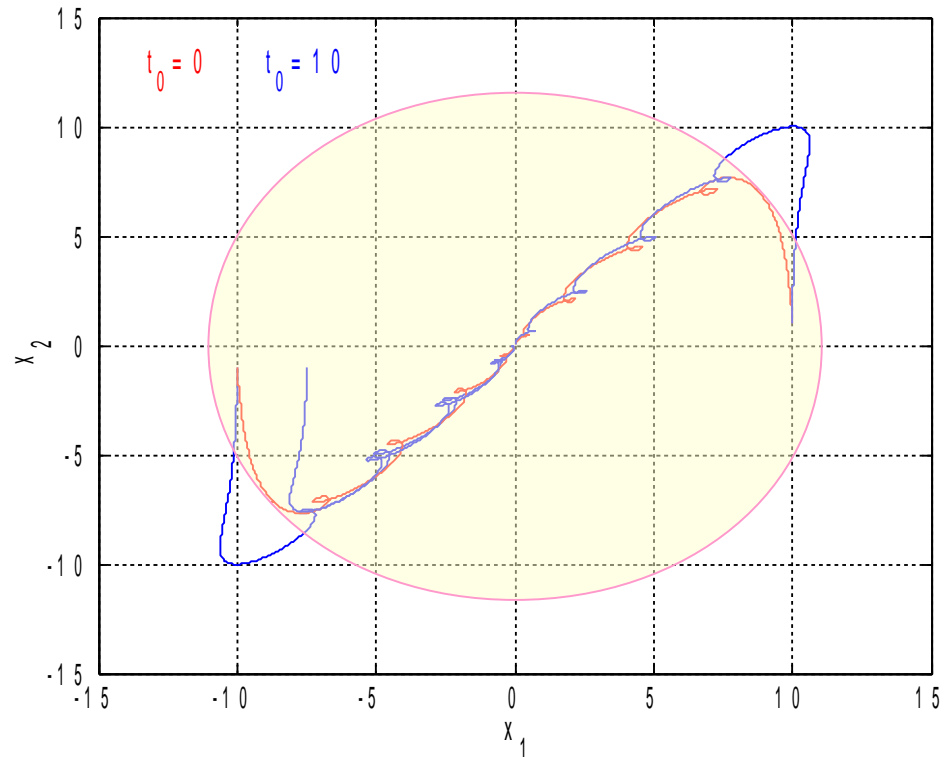
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$x_{1_{eq}} = 0$$

$$x_{2_{eq}} = 0$$

*stabile*

Affinché due traiettorie restino interne ad un dominio partendo in istanti differenti, le condizioni iniziali devono essere diverse



# Stabilità dell'equilibrio

*sistemi non autonomi*

Si estendono ai sistemi non autonomi anche le definizioni di stabilità asintotica ed esponenziale.

Condizioni aggiuntive a quella di stabilità:

a) **Stabilità asintotica:** 
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{eq}\| = 0$$

b) **Stabilità esponenziale:** 
$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{eq}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{eq}\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \alpha, \lambda > 0 \quad \forall t > t_0$$

Le definizioni e le condizioni di stabilità sono simili a quelle per i sistemi autonomi, ma è presente il parametro  $t_0$ , ovvero non è possibile prescindere dalla variabile tempo.

# Stabilità dell'equilibrio

*sistemi non autonomi*

Una proprietà che rende i sistemi tempo varianti *simili* ai sistemi autonomi è quella di **stabilità asintotica uniforme**.

Un punto di equilibrio del sistema tempo variante  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in R^n$  è asintoticamente uniformemente stabile se:

$$\forall R > 0 \quad \exists r(R) > 0 \quad \text{tale che } \mathbf{x}(t_0) \in B(\mathbf{x}_{eq}, r) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in B(\mathbf{x}_{eq}, R) \quad \forall t \geq t_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{eq}\| = 0$$

$$\forall R_1, R_2 \quad (0 < R_2 < R_1 < R) \quad \exists T(R_1, R_2) > 0 \quad \text{tale che}$$
$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{eq}\| < R_1 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{eq}\| < R_2 \quad \forall t \geq t_0 + T(R_1, R_2)$$

Un sistema caratterizzato da un punto di equilibrio uniformemente stabile mantiene un tasso di convergenza minimo verso il punto di equilibrio, a prescindere dall'istante iniziale  $t_0$ .

# Stabilità dell'equilibrio

## *Dominio di convergenza*

Il dominio di convergenza,  $D$ , di un punto di equilibrio asintoticamente stabile è costituito dall'insieme dei punti da cui il sistema tende verso il punto di equilibrio

$$\mathbf{x}(t_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbf{x}_{eq}$$

Se  $D$  coincide con tutto lo spazio di stato, il punto di equilibrio è globalmente asintoticamente stabile, ed il sistema ha un solo punto di equilibrio.

In questo caso si può parlare di stabilità del sistema e non solo del punto di equilibrio.

**Es.:** il punto di equilibrio inferiore di un pendolo con attrito è un punto di equilibrio asintoticamente stabile ma il suo dominio di convergenza è limitato.

l'origine è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile per un sistema lineare con autovalori tutti a parte reale negativa.

# Linearizzazione di un sistema non lineare

Una approssimazione lineare di un sistema non lineare, nelle vicinanze di un punto di funzionamento, può essere ottenuta mediante sviluppo in serie di Taylor fermata al primo ordine.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad \mathbf{x} \in R^n \quad \mathbf{y} \in R^p \quad \mathbf{u} \in R^q$$

Si consideri una condizione di funzionamento stazionario  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{u}^*$  tale che  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y}^* = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}} &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{y} &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad \begin{aligned}\delta\mathbf{x} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \\ \delta\mathbf{u} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \\ \delta\mathbf{y} &= \mathbf{y} - \mathbf{y}^*\end{aligned}$$

La dinamica delle variazioni  $\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{y}$  è approssimata da una dinamica lineare caratterizzata dalle matrici  $\mathbf{A}_{(n \times n)}$ ,  $\mathbf{B}_{(n \times q)}$ ,  $\mathbf{C}_{(p \times n)}$ , e  $\mathbf{D}_{(p \times q)}$  definite tramite gli Jacobiani delle funzioni vettoriali  $\mathbf{f}$  ed  $\mathbf{h}$  rispettivamente, valutati in  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ .

# Metodo indiretto di Lyapunov

Permette la verifica della stabilità/instabilità di un punto di equilibrio di un sistema autonomo non lineare utilizzando un sistema lineare approssimante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in R^n$$

Punto di equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}) = 0$$

Linearizzazione attorno al punto di equilibrio

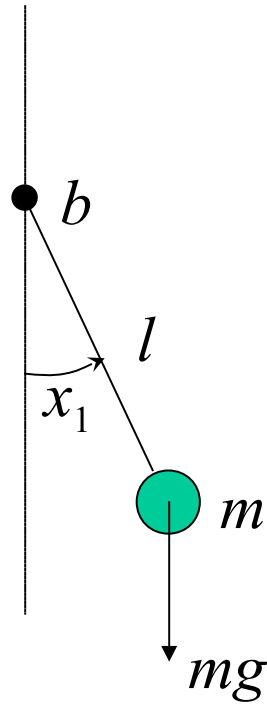
$$\delta\dot{\mathbf{x}} \cong \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{eq}} \delta\mathbf{x} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_{eq}) \cdot \delta\mathbf{x}$$

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}$$

- Se la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{eq})$  ha tutti gli autovalori a parte reale negativa, allora  $\mathbf{x}_{eq}$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- Se la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{eq})$  ha un autovalore a parte reale positiva, allora  $\mathbf{x}_{eq}$  è un punto di equilibrio instabile.

Il metodo indiretto non fornisce alcuna informazione sul dominio di stabilità, è un **criterio locale**.

## Esempio



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2$$

$$x_{1_{eq}} = \pm k\pi \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$x_{2_{eq}} = 0$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g_2}{l} \cos x_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\pm 2h\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g_2}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\pm (2h+1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g_2}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

I punti di equilibrio corrispondenti a valori pari o nulli di  $k$  sono asintoticamente stabili in quanto gli autovalori dello jacobiano calcolato in tali punto sono tutti a parte reale negativa, mentre quelli corrispondenti a valori dispari di  $k$  sono instabili in quanto hanno almeno un autovalore a parte reale positiva.

# Traslazione rigida dello stato

Una traslazione rigida dell'origine dello spazio di stato non modifica le proprietà dinamiche del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in R^n \qquad \text{Punto di equilibrio } \mathbf{x}_{eq} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}, t) = 0$$

Traslazione dell'origine tale che essa coincida con un punto di equilibrio

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}$$

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}'(\delta\mathbf{x}, t) \quad \delta\mathbf{x} \in R^n \qquad \mathbf{f}'(\delta\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}'(\delta\mathbf{x} + \mathbf{x}_{eq}, t) \qquad \text{Punto di equilibrio } \delta\mathbf{x}_{eq}$$

$$\mathbf{f}'(\delta\mathbf{x}_{eq}, t) = \mathbf{f}'(\delta\mathbf{x}_{eq} + \mathbf{x}_{eq}, t) = 0 \Leftrightarrow \delta\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{0}$$

La stabilità di un punto di equilibrio può essere studiata come la stabilità dell'origine, a seguito di una traslazione rigida.

# Funzioni definite positive

Una funzione scalare di una variabile (vettoriale)  $\mathbf{x}$  è detta definita positiva se assume valori positivi per qualunque valore di  $\mathbf{x}$ , tranne che per  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  in cui si annulla.

$$V(\mathbf{x}) \text{ definita positiva } \forall \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ se: } \begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 & \mathbf{x} \in X \setminus \mathbf{0} \\ V(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$V(\mathbf{x}) \text{ semi-definita positiva } \forall \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ se: } \begin{cases} V(\mathbf{x}) \geq 0 & \mathbf{x} \in X \setminus \mathbf{0} \\ V(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Analoghe definizioni si possono dare per funzioni definite e semi-definite negative

Convenzionalmente una funzione definita positiva (negativa) si indica con la notazione  $V(\mathbf{x}) > 0$  ( $V(\mathbf{x}) < 0$ ), mentre per una semi-definita positiva (negativa) si utilizza la notazione  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  ( $V(\mathbf{x}) \leq 0$ ),

# Funzioni definite positive

Una forma quadratica di un vettore  $\mathbf{x}$  può essere definita mediante una matrice  $\mathbf{Q}$ .

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

La matrice  $\mathbf{Q}$  si dice definita positiva se lo è la forma quadratica da essa definita.

Una matrice  $\mathbf{Q}$  definita positiva **deve** avere tutti gli elementi della diagonale positivi.

Una matrice simmetrica  $\mathbf{Q}$  è una matrice definita positiva **se e solo se** ha tutti i minori principali positivi, ovvero, se ha tutti gli autovalori positivi.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}_{ss}$$

Una qualunque matrice  $\mathbf{Q}$  può essere decomposta nella sua parte simmetrica  $\mathbf{Q}_s$  e nella sua parte skew-simmetrica  $\mathbf{Q}_{ss}$ .

$$\mathbf{Q}_{ss}^T = -\mathbf{Q}_{ss} \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_{ss}^T \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_s \mathbf{x}$$

Una forma quadratica dello stato  $\mathbf{x}$  viene solitamente definita attraverso una matrice simmetrica.

# Metodo diretto di Lyapunov

Dato il sistema autonomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in R^n$ , se esiste una funzione scalare  $V(\mathbf{x})$ , con derivate parziali continue, e sono verificate le seguenti condizioni:

- $V(\mathbf{x})$  è definita positiva in un intorno  $B_0$  dell'origine dello spazio di stato
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  è semi-definita negativa in  $B_0$

**allora l'origine è un punto di equilibrio stabile.**

Se sono invece verificate le seguenti condizioni (*più restrittive*):

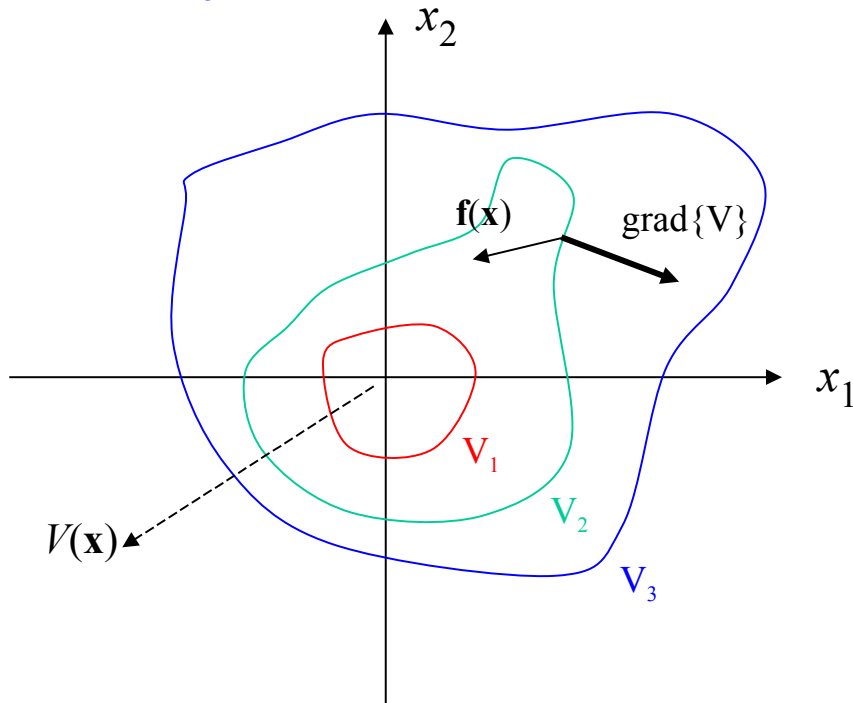
- $V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_0$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_0$

**allora l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.**

$B_0$  appartiene al dominio di convergenza dell'origine

# Metodo diretto di Lyapunov

$$V_1 < V_2 < V_3$$



$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \text{grad}\{V(\mathbf{x})\} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Se il prodotto scalare tra il gradiente di  $V$  ed il vettore della dinamica dello stato  $\mathbf{f}$  è negativo, lo stato evolve verso valori di  $V$  decrescenti, ovvero verso l'origine

L'intorno dell'origine in cui si verifica ciò definisce il dominio di attrazione del punto di equilibrio.

# Metodo diretto di Lyapunov

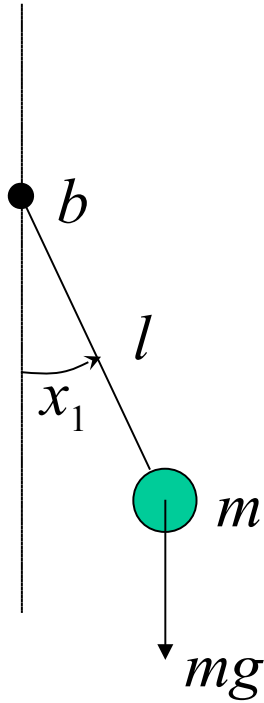
Se non si riesce a definire una funzione di Lyapunov, non è detto che l'origine non sia un punto di equilibrio stabile.

Se lo stato rappresenta l'energia interna del sistema, ed un stato stabile implica che l'energia interna tenda a non aumentare, una via per trovare una funzione di Lyapunov è quello di definire  $V(\mathbf{x})$  come l'energia interna totale.

Nel caso l'annullarsi di  $\dot{V}(\mathbf{x})$  definisca una curva chiusa soluzione della equazione differenziale definente la dinamica del sistema, questa è un ciclo limite del sistema

Il metodo fornisce anche indicazioni sul dominio di convergenza del punto di equilibrio, nonché sulla convergenza asintotica o meno.

## Esempio



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

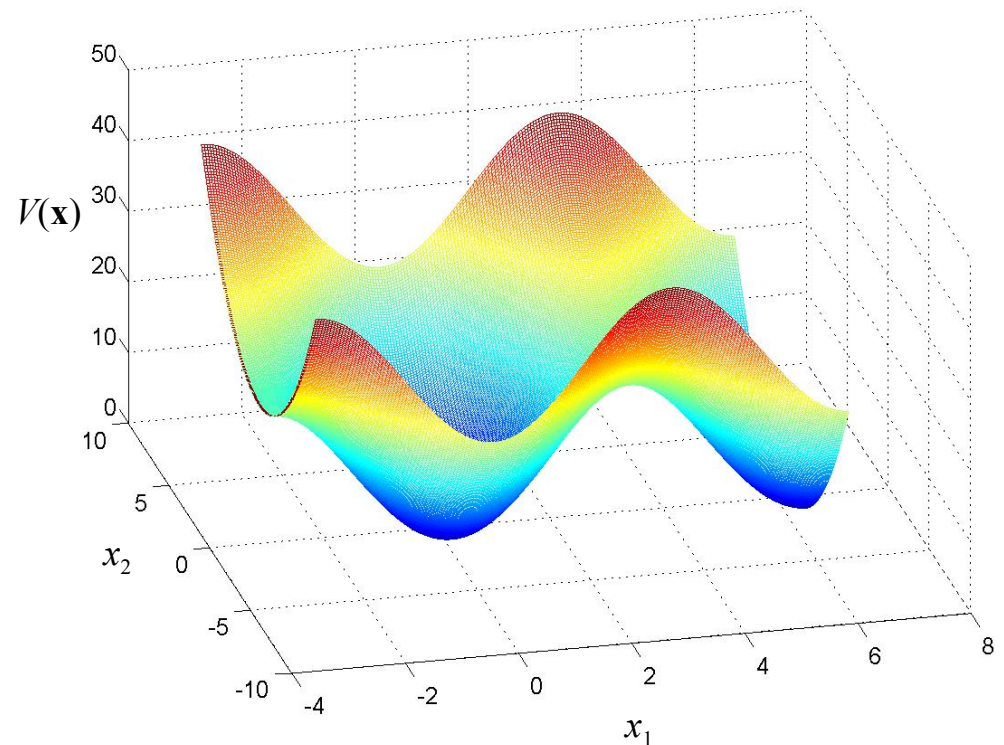
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2$$

$$x_{1eq} = 0$$

$$x_{2eq} = 0$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} ml^2 x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) = E_{cin} + E_{pot} = E_{tot}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -bx_2^2$$



Se  $b > 0$  l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Nei punti in cui  $x_2 = 0$  e  $x_1 \neq 0$  risulta anche  $dx_2/dt \neq 0$ .

Se  $b = 0$ , l'origine è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.

# Metodo diretto di Lyapunov

Se esiste una funzione scalare  $V(\mathbf{x})$ , con derivate parziali continue, e sono verificate le seguenti condizioni:

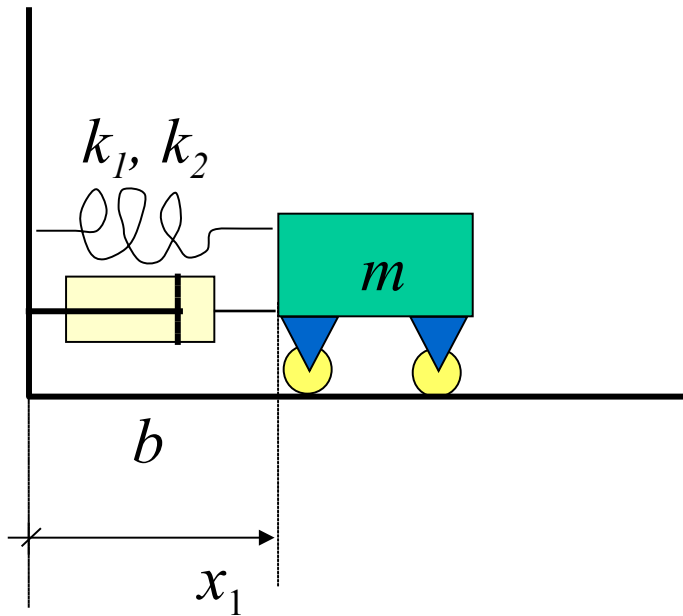
- $V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_0$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_0$
- $V(\mathbf{x}) \xrightarrow{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \infty$

**allora l'origine è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.**

Il dominio di convergenza è tutto lo spazio di stato e l'origine è l'unico punto di equilibrio.

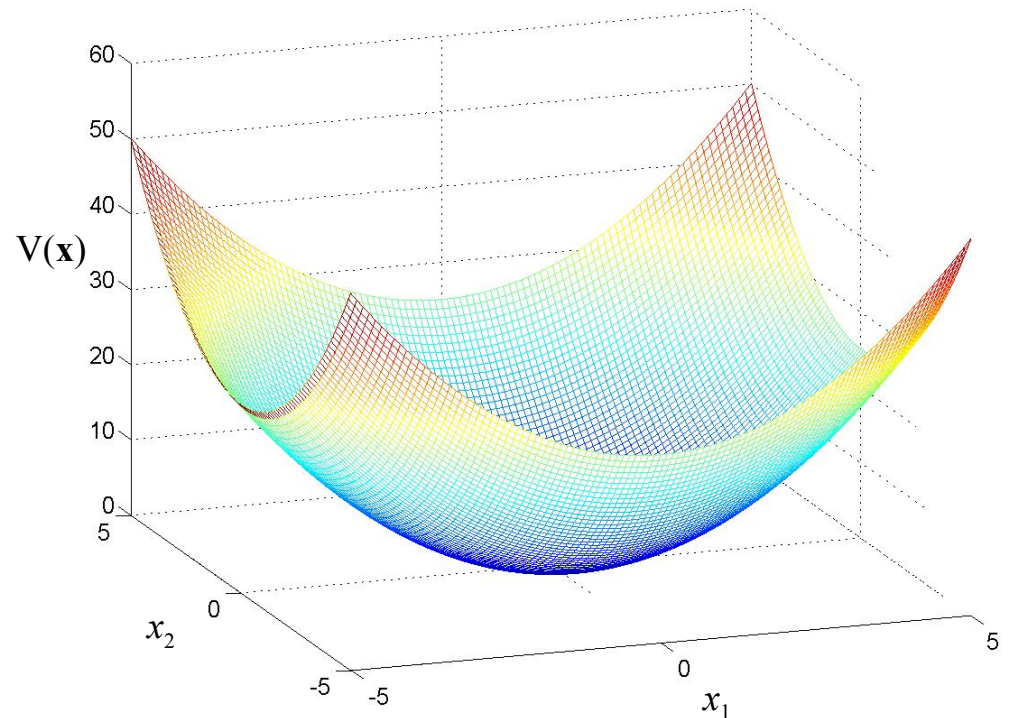
Si può dire che il sistema è asintoticamente stabile nell'origine.

# Esempio



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_{1_{eq}} &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_2}{m}x_1^3 - \frac{b}{m}x_2|x_2| & x_{2_{eq}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2\left(k_1 + \frac{1}{2}k_2x_1^2\right) = E_{cin} + E_{pot} = E_{tot} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -bx_2^2|x_2| \end{aligned}$$



Se  $b > 0$  l'origine è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Nei punti in cui  $x_2 = 0$  e  $x_1 \neq 0$  risulta anche  $dx_2/dt \neq 0$ .

Se  $b = 0$ , l'origine è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.

# Metodo diretto di Lyapunov

## *Criterio di instabilità*

Dato il sistema autonomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in R^n$ , se esiste una funzione scalare  $V(\mathbf{x})$ , con derivate parziali continue, e sono verificate le seguenti condizioni:

- $V(\mathbf{x})$  è definita positiva in un intorno  $B_0$  dell'origine dello spazio di stato
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  è definita positiva in  $B_0$

**allora l'origine è un punto di equilibrio instabile.**

Se la derivata totale della funzione  $V(\mathbf{x})$  non è né definita/semi-definita negativa né definita positiva non si può dire niente sulla stabilità o meno dell'origine.

# Esempio

## Oscillatore di Van der Pool

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_{1_{eq}} &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 & x_{2_{eq}} &= 0\end{aligned}$$

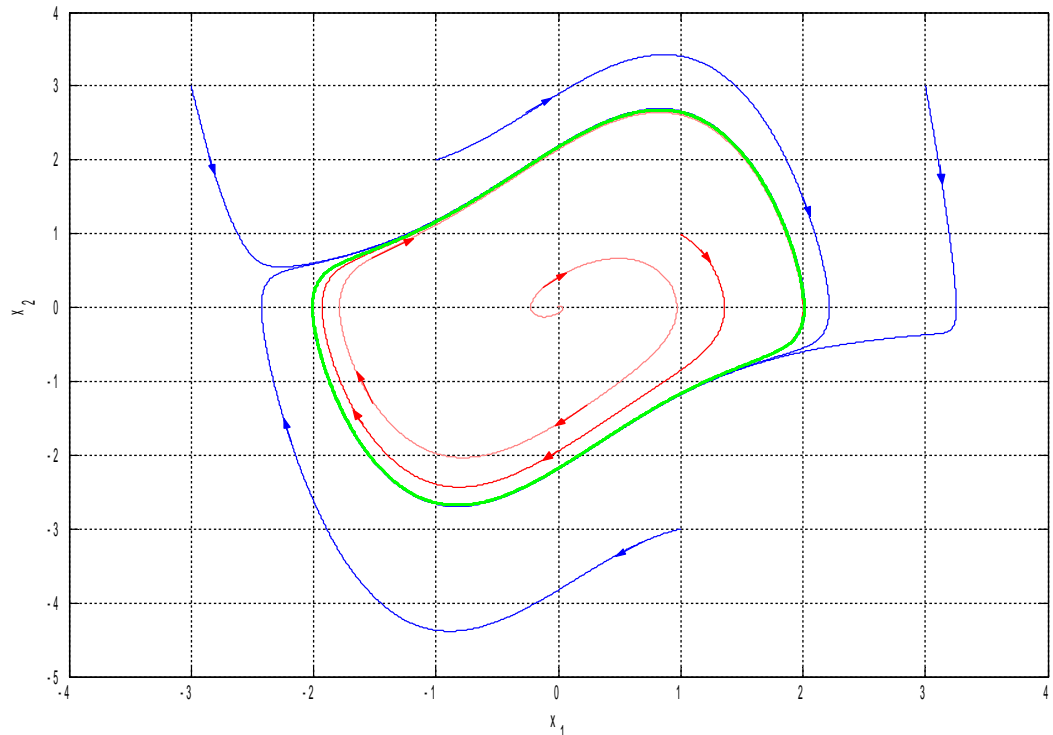
$$\begin{aligned}V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= x_2^2(1 - x_1^2)\end{aligned}$$

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1\}$$

L'origine è un punto di equilibrio, l'unico, instabile. Le traiettorie del sistema convergono verso un ciclo limite stabile individuato dalla curva verde.

La ricerca dei cicli limite, e l'analisi della loro stabilità, richiede procedure più complesse che non la ricerca e l'analisi di stabilità dei punti di equilibrio.



# Metodo diretto di Lyapunov

*Applicazione ai sistemi lineari*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \qquad \mathbf{P} > 0$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \qquad \mathbf{Q} > 0$$

L'equazione matriciale  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$  è detta equazione di Lyapunov ed ammette una sola soluzione nell'incognita  $\mathbf{P}$ , una volta fissato  $\mathbf{Q}$ .

Solitamente si sceglie  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  e quindi si verifica che la soluzione  $\mathbf{P}$  sia una matrice definita positiva.

Se la matrice  $\mathbf{A}$  ha autovalori tutti a parte reale negativa e la matrice  $\mathbf{Q}$  è definita positiva, allora l'unica soluzione  $\mathbf{P}$  dell'equazione di Lyapunov è definita positiva.

## Forma normale di un sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u(t), t) \\ y &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad \mathbf{x} \in R^n \quad \mathbf{y} \in R \quad \mathbf{u} \in R$$

Si calcolino le derivate totali dell'uscita finché la variabile di ingresso non compaia esplicitamente.

$$y^{(r)} = \varphi(\mathbf{x}, u, t); \quad \frac{\partial y^{(i)}}{\partial u} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r-1$$

Se  $r = n$ , allora il sistema non lineare può essere ricondotto alla forma canonica di Brunowsky, che è analoga ad una forma compagna controllabile di un sistema lineare senza zeri, in cui le variabili di stato sono le variabili di fase.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_G \mathbf{y} + \mathbf{B}_G \varphi'(\mathbf{y}, u, t); \quad \mathbf{y} = [y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T, \quad \mathbf{x} = \Psi(\mathbf{y}), \quad \varphi'(\mathbf{y}, u, t) = \varphi(\Psi(\mathbf{y}), u, t)$$

Sotto opportune ipotesi, la funzione  $\Psi$  è una funzione bi-univoca, e tale che  $\Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Stabilizzare  $\mathbf{y}$  è completamente equivalente a stabilizzare  $\mathbf{x}$ .

# Forma normale di un sistema non lineare

Se  $r < n$ , allora il sistema non lineare può essere ricondotto ad una forma canonica comprendente la dinamica dell'uscita  $\mathbf{y}$  e la dinamica interna  $\mathbf{w}$ .

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_G \mathbf{y} + \mathbf{B}_G \varphi'(\mathbf{y}, \mathbf{w}, u, t); & \mathbf{y} &= [y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(r-1)}]^T, \\ \dot{\mathbf{w}} &= \psi(\mathbf{y}, \mathbf{w}, t) & \mathbf{w} &= [w_1, w_2, \dots, w_{n-r}]^T \\ & & \mathbf{x} &= \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{w}), \\ & & \varphi' &= \varphi(\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{w}), u, t)\end{aligned}$$

Sotto opportune ipotesi, la funzione  $\Theta$  è una funzione bi-univoca, e tale che  $\Theta(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Stabilizzare  $\mathbf{y}$  ed  $\mathbf{w}$  è completamente equivalente a stabilizzare  $\mathbf{x}$ .

Se la dinamica interna non ha un *comportamento esplosivo* ed è stabile quando l'uscita  $\mathbf{y}=\mathbf{0}$  (zero-dinamica), allora stabilizzare  $\mathbf{y}$  è completamente equivalente a stabilizzare  $\mathbf{x}$ .

Molti problemi di controllo non lineare vengono ricondotti a problemi di stabilizzazione di una uscita disponibile, od opportunamente costruita.

## Forma normale di un sistema non lineare

La legge di controllo può essere basata solo sulle variabili di uscita, eventualmente in forma dinamica mediante osservatori di stato - output feedback, oppure mediante retroazione dello stato – state feedback

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_G \mathbf{y} + \mathbf{B}_G \varphi''(\mathbf{y}, \mathbf{w}, t); & \mathbf{x} &= \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{w}), \\ \dot{\mathbf{w}} &= \psi(\mathbf{y}, \mathbf{w}, t) & u &= \kappa(\mathbf{y}), & \text{Output feedback} \\ & & \varphi'' &= \varphi(\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{w}), \kappa(\mathbf{y}), t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}''(\mathbf{x}, t); & u &= \kappa(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{f}''(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x}), t) & \text{State feedback} \end{aligned}$$

La variabile di controllo  $u$  non compare più in forma esplicita nella dinamica dello stato, che quindi non è autonoma solo per la eventuale presenza del tempo.

I sistemi stazionari con controllo in retroazione vengono solitamente ricondotti a sistemi autonomi per cui è possibile applicare le tecniche di analisi precedentemente descritte.

## Forma normale di un sistema non lineare

La forma canonica con esplicitazione delle dinamiche ingresso-uscita ed interna, è solitamente utilizzata in quanto permette una più semplice definizione della legge di controllo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_G \mathbf{y} + \mathbf{B}_G \varphi'(\mathbf{y}, \mathbf{w}, u, t); & \mathbf{y} &= [y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(r-1)}]^T, \\ \dot{\mathbf{w}} &= \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, t) & \mathbf{w} &= [w_1, w_2, \dots, w_{n-r}]^T \\ & & \mathbf{x} &= \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{w}), \\ & & \varphi' &= \varphi(\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{w}), u, t)\end{aligned}$$

$$u = \kappa(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \quad \text{tale che} \quad \varphi'(\mathbf{y}, \mathbf{w}, u, t) = - \sum_{i=0}^{r-1} a_i y^{(i)} \quad \text{Feedback linearization}$$

$$u = \kappa(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \quad \text{tale che} \quad \varphi'(\mathbf{y}, \mathbf{w}, u, t) = \phi(\mathbf{y}) \quad \text{Lyapunov approach}$$

In presenza di sistemi perfettamente noti la legge di controllo tende a “cancellare” parte della dinamica del sistema.

In presenza di incertezze: tecniche di controllo robusto (high-gain, sliding modes, etc)