CAP.9 - STUDIO DELLE VIBRAZIONI CON IL METODO DI RAYLEIGH

9.1 Principi del metodo

Come si è visto a proposito della risposta ad un carico dinamico, la frequenza propria di vibrazione di un sistema ad un grado di libertà costituisce un'informazione essenziale. Per questa ragione è auspicabile sapere determinare questa frequenza fondamentale in modo semplice. In quest'ottica, il metodo di Rayleigh che verrà illustrato in questo capitolo è molto utile.
La frequenza propria di un sistema non smorzato ad un grado di libertà è data dall'equazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.1}$$

dove, per un sistema a caratteristiche concentrate, m rappresenta la massa in movimento e k la rigidezza. Questa formula si può applicare anche alle strutture a caratteristiche distribuite modellate utilizzando un solo grado di libertà ed una forma modale ψ scelta a priori. In tal caso le grandezze da utilizzare nell'equazione (8.1) sono la rigidezza generalizzata k^* e la massa generalizzata m^* definite nelle eq.(1.43) e (1.45).

Il metodo di Rayleigh si basa sul principio di conservazione dell'energia che afferma che l'energia totale di un sistema non smorzato e libero di muoversi è costante. Si consideri dunque il sistema massa-molla rappresentato nella Fig.1.1(a). Scegliendo in modo adeguato l'origine del tempo, il moto può esprimersi nel modo seguente:

$$v = v_0 sin(\omega t) \tag{9.2}$$

e la velocità:

$$\dot{v} = v_0 \omega cos(\omega t) \tag{9.3}$$

L'energia potenziale del sistema compare solo nella molla e vale:

$$V = \frac{1}{2}kv^2 = \frac{1}{2}kv_0^2 sin^2(\omega t) \tag{9.4}$$

mentre l'energia cinetica della massa vale:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{v}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\omega^2 cos^2(\omega t) \tag{9.5}$$

Quando $t = \frac{\pi}{2\omega}$ l'energia cinetica è nulla e l'energia potenziale è massima:

$$V_{max} = \frac{1}{2}kv_0^2 \tag{9.6}$$

Quando $t = \pi/\omega$ l'energia cinetica è massima e l'energia potenziale è nulla, cioè:

$$T_{max} = \frac{1}{2}mv_0^2\omega^2 \tag{9.7}$$

Di conseguenza, perché l'energia totale risulti costante, il massimo dell'energia potenziale deve essere uguale al massimo dell'energia cinetica, cioè:

$$T_{max} = \frac{1}{2}mv_0^2\omega^2 = \frac{1}{2}kv_0^2 = V_{max}$$

da cui:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Questa espressione è identica a quella vista precedentemente, ma questa volta è stata determinata utilizzando il metodo di Rayleigh che consiste nello scrivere l'uguaglianza dell'energia cinetica massima e dell'energia potenziale massima.

9.2 STUDIO APPROSSIMATO DI UN SISTEMA QUALSIASI

Il metodo di Rayleigh non presenta alcun interesse nello studio di un semplice sistema del tipo massa-molla; viceversa si tratta di un metodo molto pratico per lo studio approssimato dei sistemi che possiedono molti gradi di libertà. Si consideri per esempio la trave della Fig.9.1 che possiede un numero infinito di gradi di libertà.

L'applicazione del metodo di Rayleigh richiede che si faccia un'ipotesi preliminare circa la deformata che presumibilmente assumerà la trave nel suo modo fondamentale di vibrazione, cioè il primo modo. Facendo variare tale coordinata generalizzata in modo sinusoidale durante la vibrazione libera, questa ipotesi si esprime nel modo seguente:

$$v(x,t) = \psi(x) Z_0 sin(\omega t) \tag{9.8}$$

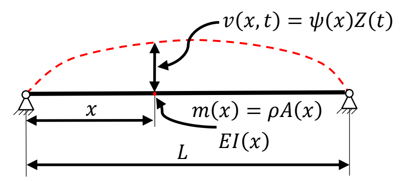

Fig.9.1 – 1° modo di vibrazione di una trave

in cui $\psi(x)$ è la funzione di spostamento imposta, che rappresenta il rapporto dello spostamento assoluto v del punto di coordinata x sullo spostamento di riferimento $Z(t)$ (detta anche coordinata generalizzata). Questa espressione presuppone che la forma della deformata non cambi nel tempo mentre, in vibrazione libera, varia la sua ampiezza in modo sinusoidale.

L'uso di questa funzione di spostamento imposta trasforma il sistema studiato (che possiede un numero infinito di gradi di libertà) in un sistema ad un solo grado di libertà; scrivendo l'uguaglianza del massimo dell'energia di deformazione elastica acquisita nel corso del moto e del massimo dell'energia cinetica secondo il metodo di Rayleigh, si ottiene un valore approssimato della frequenza propria del sistema. L'energia di deformazione di questo sistema elastico è data da:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{9.9}$$

da cui, utilizzando l'eq.(9.8) e prendendo per l'ampiezza il suo valore massimo:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} Z_0 sin(\omega t) \qquad \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right)_{max} = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} Z_0$$

si ottiene:

$$V_{max} = \frac{Z_0^2}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{9.10}$$

L'energia cinetica della massa che, in generale, non è distribuita in modo uniforme, è data da:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)(\dot{v})^2 dx \tag{9.11}$$

Il valore massimo si ottiene utilizzando l'espressione della velocità fornita dall'eq. (9.8), dopo la sua derivazione rispetto al tempo:

$$\dot{v}(x,t) = \psi(x) Z_0 \omega cos(\omega t) \qquad \dot{v}(x)_{max} = \psi(x) Z_0 \omega$$

da cui:

$$T_{max} = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2 \int_0^L m(x)\psi(x)^2 dx \tag{9.12}$$

Concludendo:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x)\left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx}{\int_0^L m(x)\psi(x)^2 dx} \tag{9.13}$$

Si nota che il numeratore non è altro che la rigidezza generalizzata k^* relativa alla funzione dello spostamento imposto, mentre il denominatore è la massa generalizzata m^* corrispondente. Il metodo di Rayleigh conduce quindi direttamente alla forma generalizzata dell'eq. (9.1).

9.3 Scelta della funzione di spostamento

La precisione del metodo di Rayleigh dipende essenzialmente dalla funzione di spostamento $\psi(x)$ che si sceglie per rappresentare il modo fondamentale. In teoria si potrebbe utilizzare una qualsiasi funzione che soddisfi le condizioni al contorno di tipo geometrico. Ma ogni funzione di spostamento che non rappresenti il vero modo di vibrare richiede dei legami esterni che consentano la conservazione dell'equilibrio. Questi legami esterni irrigidiscono il sistema, aumentando così la sua energia di deformazione e di conseguenza conducono ad un valore di ω più grande del valore corretto. Se ne deduce che la funzione di spostamento corrispondente al modo vero di vibrare conduce alla frequenza più bassa possibile che si possa ottenere con il metodo di Rayleigh: se quindi si eseguono diverse prove con delle funzioni di spostamento differenti, quella che fornisce la frequenza più bassa è sempre la più prossima alla soluzione corretta.

Esempio E9.1– Si consideri la trave prismatica della Fig.9.1, di densità ρ, lunghezza L, sezione trasversale A, momento d'inerzia I e modulo di Young E.

1) Come funzione di spostamento si consideri la seguente parabola che soddisfa a priori le condizioni al contorno:

$$\psi(\xi) = \xi(\xi - 1)$$

dove $\xi = x/L$ è la coordinata normalizzata. La derivata della funzione di spostamento vale:

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{d\psi}{dx}\frac{dx}{d\xi} \qquad \text{da cui} \qquad \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi/d\xi}{dx/d\xi} = \frac{2\xi - 1}{L} = \psi'$$

La derivata seconda della funzione di spostamento vale:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d\psi'/d\xi}{dx/d\xi} = \frac{2/L}{L} = \frac{2}{L^2}$$

Di conseguenza l'energia potenziale massima e l'energia cinetica massima valgono rispettivamente:

$$V_{max} = \frac{Z_0^2}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{Z_0^2}{2} EI \int_0^L \left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{2EIZ_0^2}{L^3}$$

$$T_{max} = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2\rho A \int_0^L \psi(x)^2 dx = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2\rho A \int_0^1 \psi(\xi)^2 L d\xi = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2\rho A \int_0^1 (\xi^2 - \xi)^2 L d\xi = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2\rho A \frac{L}{30}$$

dove si è posto $dx = L \cdot d\xi$. Uguagliando l'energia potenziale massima e l'energia cinetica massima si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{120EI}{\rho A L^4}$$

2) Si consideri adesso un'altra funzione di spostamento che rappresenta la freccia della trave causata da un carico distribuito costante q_0. La funzione può essere determinata integrando due volte l'equazione della linea elastica:

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M(x) = \frac{q_0}{2}x^2 - \frac{q_0 L}{2}x$$

$$EI\frac{dv(x)}{dx} = \frac{q_0}{6}x^3 - \frac{q_0 L}{4}x^2 + c_1$$

$$EIv(x) = \frac{q_0}{24}x^4 - \frac{q_0 L}{12}x^3 + c_1 x + c_2$$

In $x = 0$ ed in $x = L$ la freccia è nulla quindi le costanti d'integrazione valgono:

$$\begin{cases} 1) \quad v(x=0) = c_2 = 0 \\ 2) \quad EIv(x=L) = \dfrac{q_0}{24}L^4 - \dfrac{q_0 L}{12}L^3 + c_1 L = 0 \quad \text{da cui} \quad c_1 = \dfrac{q_0 L^3}{24} \end{cases}$$

L'equazione della freccia risulta quindi:

$$v(x) = \frac{q_0}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x).$$

Allora come funzione di spostamento si propone una funzione del tipo:

$$\psi(x) = x^4 - 2Lx^3 + L^3 x$$

che soddisfa a priori le condizioni al contorno di tipo geometrico.
La derivata seconda della funzione di spostamento vale:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 12x^2 - 12Lx$$

Di conseguenza l'energia potenziale massima e l'energia cinetica massima valgono rispettivamente:

$$V_{max} = \frac{Z_0^2}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{Z_0^2}{2} EI \int_0^L (12x^2 - 12Lx)^2 dx = \frac{12}{5} EIL^5 Z_0^2$$

$$T_{max} = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2 \rho A \int_0^L \psi(x)^2 dx = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2 \rho A \int_0^L (x^4 - 2Lx^3 + L^3 x)^2 dx = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2 \rho A \frac{93}{1890} L^9 = \frac{93}{3780}\omega^2 \rho A L^9 Z_0^2$$

Uguagliando l'energia potenziale massima e l'energia cinetica massima si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{12}{5}\frac{3780}{93}\frac{EI}{\rho A L^4} \cong 97.55 \frac{EI}{\rho A L^4}$$

Come si può osservare, la frequenza angolare è più bassa di quella calcolata utilizzando la prima funzione di spostamento, quindi l'ultima soluzione è più vicina a quella esatta.

3) Si ripete il calcolo una terza volta utilizzando la seguente funzione di spostamento:

$$\psi(x) = sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

che soddisfa a priori le condizioni al contorno di tipo geometrico.
La derivata seconda della funzione di spostamento vale:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Di conseguenza l'energia potenziale massima e l'energia cinetica massima valgono rispettivamente:

$$V_{max} = \frac{Z_0^2}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{Z_0^2}{2} EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^L sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

$$T_{max} = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2 \rho A \int_0^L \psi(x)^2 dx = \frac{Z_0^2}{2}\omega^2 \rho A \int_0^L sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

Uguagliando l'energia potenziale massima e l'energia cinetica massima si ottiene:

$$\omega^2 = \pi^4 \frac{EI}{\rho A L^4} \cong 97.4091 \frac{EI}{\rho A L^4}$$

Come si può osservare, la frequenza angolare è più bassa di quella calcolata utilizzando l'equazione precedente (la differenza percentuale è inferiore allo 0.1%), quindi la soluzione è più vicina a quella esatta.

Il problema è quindi trovare un criterio di scelta della funzione spostamento. Una possibilità consiste nell'utilizzare gli spostamenti ottenuti durante la vibrazione libera del sistema causati dalle forze d'inerzia, proporzionali al prodotto della massa distribuita per l'ampiezza dello spostamento. La funzione spostamento corretta $\psi_c(x)$ è la deformata che si otterrebbe con un carico $p_c(x)$ proporzionale a $m(x)\psi_c(x)$. Poiché in generale non è possibile indovinare la forma esatta $\psi_c(x)$, la deformata prodotta dal carico $\bar{p}(x) = m(x)\bar{\psi}(x)$, (dove $\bar{\psi}(x)$ rappresenta un'approssimazione ragionevole della deformata corretta), risulterà comunque una buona approssimazione.

In generale il metodo appena illustrato per la scelta della funzione spostamento comporta una mole di calcoli che spesso non è necessaria. Infatti il metodo di Rayleigh fornisce buoni risultati senza la necessità di definire la funzione spostamento in modo preciso. Spesso si ipotizza che il carico inerziale $\bar{p}(x)$ sia semplicemente quello del peso della trave, cioè $\bar{p}(x) = m(x)g$, dove $m(x)$ indica la massa distribuita e g è l'accelerazione di gravità. In questo caso la deformata $v_d(x)$ è semplicemente la freccia dovuta al carico statico. L'energia di deformazione massima immagazzinata è allora uguale al lavoro delle forze applicate al sistema, cioè:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L \bar{p}(x)v_d(x)dx = \frac{1}{2}gZ_0\int_0^L m(x)\psi(x)dx$$

L'energia cinetica è data dall'eq.(9.12) dove $\psi(x) = v_d(x)/Z_0$ è la funzione spostamento calcolata a partire dal peso proprio. Da cui:

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}gZ_0\int_0^L m(x)\psi(x)dx}{\frac{Z_0^2}{2}\int_0^L m(x)\psi(x)^2dx} = g\frac{\int_0^L m(x)v_d(x)dx}{\int_0^L m(x)v_d^2(x)dx}$$

Questa equazione viene spesso utilizzata per lo studio approssimato di qualsiasi tipo di struttura. Si può notare che l'ampiezza di riferimento Z_0 deve figurare nell'espressione se la funzione di spostamento $\psi(x)$ è scelta in modo adimensionale, mentre non compare se si utilizza la deformata causata dal peso proprio.

Esempio E9.2– Si consideri la trave prismatica a mensola rappresentata nella Fig.E9.2, sottoposta ad una forza verticale a metà della sua lunghezza L. La sua rigidezza flessionale valga EI e la sua massa per unità di lunghezza valga $\bar{m} = \rho A$, dove ρ indica la densità del materiale e A la sezione trasversale della trave.

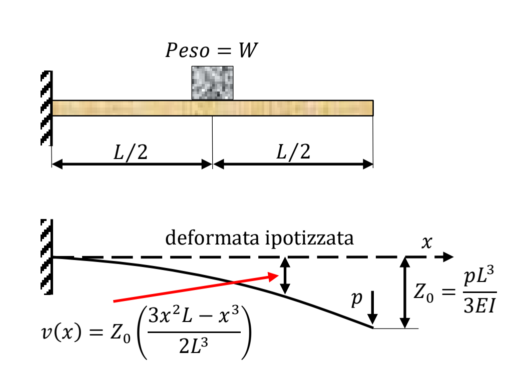

Fig.E9.2 – Metodo di Rayleigh applicato al calcolo della frequenza di vibrazione di una mensola.

Per approssimare la forma del modo fondamentale di vibrazione, si ipotizza di applicare una forza nell'estremità libera della mensola e se ne calcola la freccia. L'equazione del momento flettente vale:

$$M(x) = P(x - L)$$

L'equazione della linea elastica risulta:

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M(x) = P(L - x)$$

Dalla sua integrazione si ottiene:

$$EI\frac{dv(x)}{dx} = EI\vartheta(x) = P\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

$$EIv(x) = P\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_1x + c_2$$

Applicando le condizioni (spostamento v e rotazione ϑ nulli all'incastro dove $x = 0$) risulta $c_1 = c_2 = 0$ da cui risulta che l'equazione della freccia è la seguente:

$$v(x) = \frac{P}{EI}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{P}{6EI}(3Lx^2 - x^3)$$

La freccia massima nell'estremo libero della mensola dove $x = L$ vale:

$$v(L) = \frac{PL^3}{3EI}$$

Posto $Z_0 = \frac{PL^3}{3EI}$ l'equazione della freccia assume la forma seguente:

$$v(x) = Z_0\psi(x) = Z_0\left(\frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}\right)$$

L'energia potenziale massima risulta:

$$V_{max} = \frac{1}{2}PZ_0$$

Esprimendo la forza P in funzione della freccia massima Z_0 si ottiene $P = \frac{3EI}{L^3}Z_0$. Da cui l'energia potenziale massima assume la forma:

$$V_{max} = \frac{1}{2}PZ_0 = \frac{1}{2}\frac{3EI}{L^3}Z_0^2$$

L'energia cinetica massima viene divisa in due parti: quella dovuta alla massa della trave e quella della massa appoggiata sulla trave:

a) Per la trave

$$T_{max}^{trave} = \frac{\omega^2}{2}\int_0^L \bar{m}v^2dx = \frac{\omega^2}{2}\bar{m}Z_0^2\int_0^L[\psi(x)]^2dx = \frac{\bar{m}Z_0^2\omega^2}{2}\frac{1}{4L^6}\int_0^L(3Lx^2 - x^3)^2dx$$

Sviluppando l'integrale si ottiene:

$$\int_0^L(3Lx^2 - x^3)^2dx = \int_0^L(9L^2x^4 - 6Lx^5 + x^6)dx = \left[9L^2\frac{x^5}{5} - 6L\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right]_0^L = \frac{63 - 35 + 5}{35}L^7 = \frac{33}{35}L^7$$

da cui l'energia cinetica della trave risulta:

$$T_{max}^{trave} = \frac{\bar{m}Z_0^2\omega^2}{2}\frac{1}{4L^6}\frac{33}{35}L^7 = \frac{33}{140}\frac{\bar{m}L}{2}\omega^2Z_0^2$$

b) Per la massa disposta in $x = L/2$:

$$T_{max}^{massa} = \frac{1}{2}m\dot{v}^2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}m\omega^2v^2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{W}{2g}\omega^2Z_0^2\psi^2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{W}{2g}\omega^2Z_0^2\left(\frac{\frac{3}{4}L^3 - \frac{L^3}{8}}{2L^3}\right)^2 = \frac{25}{256}\frac{W}{2g}\omega^2Z_0^2$$

Da cui risulta che l'energia cinetica totale vale:

$$T_{max} = T_{max}^{trave} + T_{max}^{massa} = \frac{33}{140}\frac{\bar{m}L}{2}\omega^2Z_0^2 + \frac{25}{256}\frac{W}{2g}\omega^2Z_0^2 = \left(\frac{33}{140}\frac{\bar{m}L}{2} + \frac{25}{256}\frac{W}{2g}\right)\omega^2Z_0^2$$

Uguagliando l'energia potenziale massima e l'energia cinetica massima è possibile calcolare una stima della frequenza propria del primo modo del sistema:

$$T_{max} = \left(\frac{33}{140}\frac{\bar{m}L}{2} + \frac{25}{256}\frac{W}{2g}\right)\omega^2 Z_0^2 = V_{max} = \frac{1}{2}\frac{3EI}{L^3}Z_0^2$$

da cui si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}\frac{3EI}{L^3}}{\left(\frac{33}{140}\frac{\bar{m}L}{2} + \frac{25}{256}\frac{W}{2g}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3EI}{L^3}}{\left(\frac{33}{140} + \frac{25}{256}\frac{W}{\bar{m}Lg}\right)\frac{\bar{m}L}{2}} = \frac{3}{\left(\frac{33}{140} + \frac{25}{256}\frac{W}{\bar{m}Lg}\right)}\frac{EI}{\bar{m}L^4}$$