



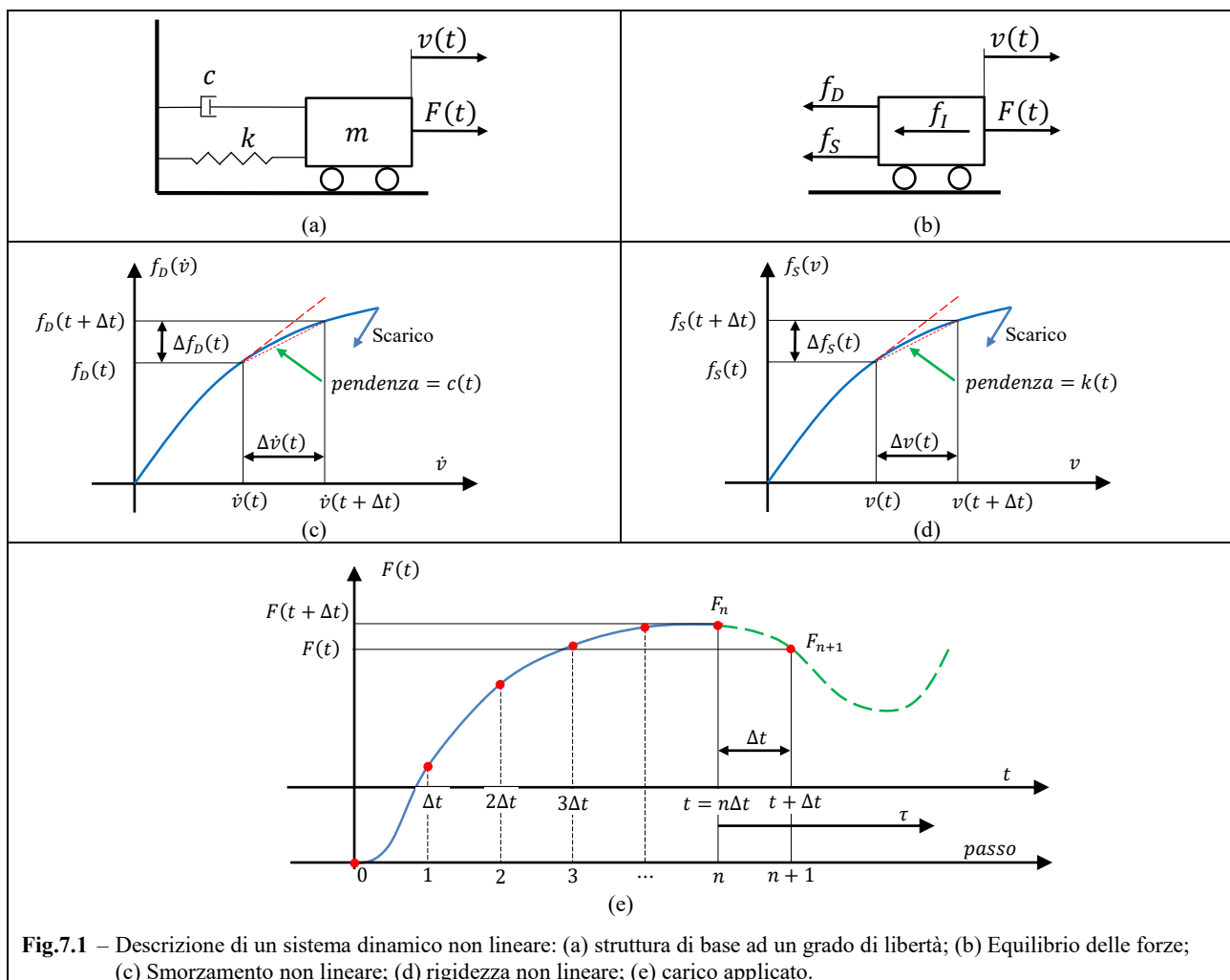
CAP.7 – METODI PER L'INTEGRAZIONE DIRETTA DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

7.1 INTRODUZIONE

L'integrale di Duhamel o l'analisi nel dominio delle frequenze per mezzo della trasformata di Fourier rappresentano generalmente le tecniche di risoluzione più comoda nel caso di strutture il cui comportamento si possa ritenere lineare quando sono sottoposte a carichi dinamici arbitrari.

E' d'altra parte necessario sottolineare che poiché nella definizione dei due metodi è stato utilizzato il *principio di sovrapposizione degli effetti*, essi possono essere utilizzati solo con i sistemi lineari, cioè i sistemi le cui caratteristiche non cambiano durante la risposta. Ma per numerose strutture non è possibile ipotizzare un comportamento lineare: ciò capita per esempio per gli edifici sottoposti a forti scosse sismiche che possono causare danni molto seri. E' quindi necessario mettere a punto un altro metodo di calcolo suscettibile di essere utilizzato nel caso dei sistemi non lineari.

Il metodo probabilmente più potente nelle analisi non lineari è quello dell'integrazione progressiva o a passi, in base al quale la risposta del sistema si calcola incrementando progressivamente il tempo di piccoli intervalli Δt generalmente di lunghezza costante. L'equilibrio dinamico si stabilisce all'inizio e alla fine di ogni intervallo e il moto del sistema durante l'incremento temporale viene approssimato sulla base di un comportamento ipotizzato a priori (che generalmente trascura la possibile mancanza di equilibrio durante l'intervallo temporale). La natura non lineare del sistema è presa in considerazione calcolando all'inizio di ogni incremento temporale le nuove caratteristiche a partire dal suo stato deformato. La risposta completa si ottiene prendendo la velocità e lo spostamento determinati alla fine di un intervallo come condizioni iniziali per l'intervallo successivo; il processo può continuare, passo dopo passo, dall'inizio del carico fino ad un istante di tempo qualsiasi, approssimando il comportamento non lineare per mezzo di una sequenza di sistemi lineari consecutivi.





In questo tipo di analisi le proprietà dei materiali possono presentare una qualsiasi forma di non linearità. Quindi la forza di richiamo elastico f_s non deve necessariamente dipendere solo dallo spostamento, come nel caso di un materiale elastico non lineare; è anche possibile scegliere un materiale a isteresi non lineare, la cui forza dipenda sia dal valore dello spostamento attuale che dalla storia passata di deformazione; la sola condizione è che le caratteristiche di rigidità siano completamente definite sia dalla storia passata che dallo stato attuale della deformata. E' anche evidente come l'ipotesi implicita di massa costante nel tempo sia arbitraria e possa essere eliminata.

Nei metodi d'integrazione diretta le derivate dello spostamento $\dot{v}(t)$ e $\ddot{v}(t)$ che compaiono nell'equazione dell'equilibrio dinamico:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = F(t) \quad (7.1)$$

vengono sostituite con dei valori approssimati calcolati con il metodo delle differenze finite. La procedura consiste nello scrivere l'equazione del moto in un preciso istante di tempo:

$$m\ddot{v}_n + c\dot{v}_n + kv_n = F_n \quad (7.2a)$$

dove l'indice n indica il tempo $n\Delta t$ e Δt è la dimensione dell'incremento o passo temporale. L'assenza dei pedici alla base delle caratteristiche m , c e k implica che il problema sia lineare. Per i problemi che comportano la risposta non lineare del materiale, k è funzione dello spostamento e quindi anche del tempo. In tal caso si può scrivere:

$$m\ddot{v}_n + c\dot{v}_n + R_n^{int} = F_n \quad (7.2b)$$

R_n^{int} è la risposta del materiale al tempo $n\Delta t$. Nei problemi non lineari R_n^{int} è funzione non lineare di v_n e talvolta anche delle sue derivate rispetto al tempo; nei problemi lineari $R_n^{int} = kv_n$. Benché esistano dei problemi nei quali i parametri m e c abbiano un comportamento non lineare, nell'eq.(7.2b) si è ipotizzato che non dipendano dal tempo.

I metodi alle differenze finite per l'integrazione diretta delle eq.(7.2a) e (7.2b) si dividono in *espliciti* ed *impliciti*. I primi assumono la forma:

$$v_{n+1} = f(v_n, \dot{v}_n, \ddot{v}_n, v_{n-1}, \dots) \quad (7.3)$$

e consentono il calcolo dello spostamento v_{n+1} al passo $n + 1$ in funzione della precedente risposta del materiale, comprendente sia gli spostamenti che le sue derivate calcolate fino al tempo $n\Delta t$ compreso.

I metodi espliciti hanno la forma:

$$v_{n+1} = f(\dot{v}_{n+1}, \ddot{v}_{n+1}, v_n, \dot{v}_n, \ddot{v}_n, \dots) \quad (7.4)$$

e quindi il calcolo dello spostamento v_{n+1} richiede oltre alla conoscenza della risposta fino al passo n -esimo anche quella della velocità e dell'accelerazione al passo $(n + 1)$ -esimo, che al momento del calcolo sono incognite e devono quindi essere espresse in funzione dello spostamento v_{n+1} .

I metodi espliciti ed impliciti hanno proprietà molto diverse e ciò comporta notevoli implicazioni pratiche.

I metodi che hanno la forma generale delle eq.(7.3) e (7.4) si chiamano *metodi multistep*. Quando il lato destro delle eq.(7.3) e (7.4) contiene informazioni che risalgono solo fino al tempo $n\Delta t$, i metodi si chiamano *a passo singolo*. A differenza dei metodi multistep, i metodi a passo singolo non richiedono particolari procedure per la loro inizializzazione.

7.2 - Metodi diretti espliciti

Il *metodo delle differenze centrali* è caratteristico dei metodi espliciti. Con esso la velocità e l'accelerazione sono approssimati con le seguenti formule:

$$\dot{v}_n = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2\Delta t} \quad (7.5)$$

$$\ddot{v}_n = \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (7.6)$$

Le equazioni precedenti si ottengono sviluppando la funzione spostamento in serie di Taylor, prima in avanti e poi indietro:



$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n \Delta t + \frac{\ddot{v}_n}{2} (\Delta t)^2 + \frac{\ddot{\ddot{v}}_n}{6} (\Delta t)^3 + \dots \quad (7.7a)$$

$$v_{n-1} = v_n - \dot{v}_n \Delta t + \frac{\ddot{v}_n}{2} (\Delta t)^2 - \frac{\ddot{\ddot{v}}_n}{6} (\Delta t)^3 + \dots \quad (7.7b)$$

Sottraendo e sommando le due espressioni si ottiene rispettivamente:

$$v_{n+1} - v_{n-1} = 2\dot{v}_n \Delta t + \frac{\ddot{\ddot{v}}_n}{3} (\Delta t)^3 + \dots \quad (7.7c)$$

$$v_{n+1} + v_{n-1} = 2v_n + \ddot{v}_n (\Delta t)^2 + \dots \quad (7.7d)$$

Trascurando i termini di ordine superiore a $(\Delta t)^2$, dall'eq.(7.7c) si ottiene l'eq.(7.5) e dall'eq.(7.7d) si ottiene l'eq.(7.6). Di conseguenza l'approssimazione alle differenze centrali comporta un errore proporzionale a $(\Delta t)^2$ il che implica che dimezzando il passo d'integrazione l'errore si riduce ad un quarto, usando un passo dieci volte più piccolo l'errore si riduce di cento volte.

Lo spostamento al tempo $n\Delta t$ si ottiene sostituendo le eq.(7.5) e (7.6) nell'eq.(7.2b):

$$m\ddot{v}_n + c\dot{v}_n + R_n^{int} = m \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{(\Delta t)^2} + c \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2\Delta t} + kv_n = F_n \quad (7.8)$$

Riorganizzando l'equazione si ottiene:

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] v_{n+1} = F_n - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] v_n - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] v_{n-1} \quad (7.9)$$

Calcolato lo spostamento al tempo $(n+1)\Delta t$ utilizzando le eq.(7.5) e (7.6) è possibile calcolare la velocità e l'accelerazione al tempo $n\Delta t$.

OSSERVAZIONI

- 1) Per inizializzare il metodo è necessario conoscere v_{-1} , il cui valore si può calcolare usando l'eq.(7.7b) a partire dalle condizioni iniziali v_0 e \dot{v}_0 , dopo avere eliminato i termini di ordine superiore a $(\Delta t)^2$:

$$v_{-1} = v_0 - \dot{v}_0 \Delta t + \frac{\ddot{v}_0}{2} (\Delta t)^2 \quad (7.10)$$

L'accelerazione \ddot{v}_0 al tempo iniziale si ottiene utilizzando l'equazione del moto (7.2b):

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{m} [F_0 - kv_0 - c\dot{v}_0] \quad (7.11)$$

- 2) Per calcolare v_{n+1} è necessario conoscere R_n^{int} . Se la legge costitutiva del materiale non è lineare e dipende dalla deformazione (ma non dalla velocità della deformazione), allora calcolare R_n^{int} è semplice in quanto al tempo $n\Delta t$ lo spostamento v_n è noto (e quindi anche la deformazione).
- 3) L'eq.(7.9) è *condizionatamente stabile* e richiede che il passo Δt soddisfi l'espressione:

$$\Delta t \leq \frac{T}{\pi} = \frac{2}{\omega} = \Delta t_{cr} \quad (7.12)$$

dove T è il periodo naturale del sistema e ω la sua frequenza naturale. Se il passo temporale non soddisfa l'eq.(7.12) i calcoli sono instabili. In tal caso la risposta calcolata cresce illimitatamente, talvolta di molti ordini di grandezza ad ogni passo. La stabilità è un concetto diverso dalla precisione: i due aspetti verranno esaminati in seguito.



Nella seguente tabella è riportato il diagramma a blocchi per il calcolo automatico della risposta:

Metodo delle differenze centrali	
1)	Si sceglie il passo temporale Δt in modo che sia inferiore al passo critico Δt_{cr} .
2)	Si calcola l'accelerazione all'istante iniziale: $\ddot{v}_0 = \frac{1}{m}[F_0 - kv_0 - c\dot{v}_0]$
3)	Si calcola: $v_{-1} = v_0 - \Delta t \dot{v}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{v}_0$
4)	Si calcola la massa equivalente: $\hat{m} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}$
5)	Per ogni passo temporale
5.1)	Si calcola la risposta del materiale: $R_n^{int} = kv_n$
5.2)	Si calcola la forza equivalente al tempo $n\Delta t$:
	$\hat{F}_n = F_n - R_n^{int} + \frac{2m}{(\Delta t)^2} v_n - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] v_{n-1}$
5.3)	Si calcola lo spostamento al passo $(n+1)\Delta t$: $v_{n+1} = \frac{\hat{F}_n}{\hat{m}}$
5.4)	Se richiesto, si calcola la velocità e l'accelerazione al tempo $n\Delta t$:
	$\dot{v}_n = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2\Delta t}$
	$\ddot{v}_n = \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{(\Delta t)^2}$

7.3 - Metodi diretti impliciti

La maggior parte dei metodi impliciti sono *incondizionatamente stabili* e non impongono delle limitazioni nella scelta della dimensione del passo temporale a parte quella derivante dalla necessità di ottenere la precisione richiesta.

7.3.1 Metodo dell'accelerazione media

Si tratta di un metodo implicito incondizionatamente stabile in base al quale, durante l'intero passo temporale, si utilizza un'accelerazione pari alla media dei suoi valori agli estremi dell'intervallo:

$$\ddot{v}(t_0 + \tau) = \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{2} = cost \quad (7.13)$$

dove $0 \leq \tau \leq \Delta t$. La velocità durante l'intervallo si ottiene integrando l'eq.(7.13):

$\dot{v}(t_0 + \tau) = \dot{v}_n + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{2} \tau$	(7.14)
--	--------

Al tempo $(n+1)\Delta t$ la velocità vale:

$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{2} \Delta t$	(7.15)
--	--------

Lo spostamento durante l'intervallo si ottiene integrando l'eq.(7.14):

$$v(t_0 + \tau) = v_n + \dot{v}_n \tau + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{4} \tau^2 \quad (7.16)$$

Al tempo $(n+1)\Delta t$ lo spostamento vale:

$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n \Delta t + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{4} (\Delta t)^2 \quad (7.17)$$

Dalla (7.15) si ricava:

$$\frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{2} \Delta t = \dot{v}_{n+1} - \dot{v}_n \quad (7.18)$$

che sostituita nella (7.17) fornisce:



$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n \Delta t + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{4} (\Delta t)^2 = v_n + \dot{v}_n \Delta t + \frac{\dot{v}_{n+1} - \dot{v}_n}{2} \Delta t = v_n + \frac{\dot{v}_{n+1} + \dot{v}_n}{2} \Delta t \quad (7.19)$$

Dalle eq.(7.15) e (7.19) è possibile calcolare \ddot{v}_{n+1} e \dot{v}_{n+1} in funzione di v_{n+1} , v_n , \dot{v}_n e \ddot{v}_n . Dalla (7.19) si ha:

$$\dot{v}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (v_{n+1} - v_n) - \dot{v}_n \quad (7.20)$$

L'eq. (7.15) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\dot{v}_{n+1} - \dot{v}_n) - \ddot{v}_n \quad (7.21)$$

Sostituendovi l'eq.(7.20) si ottiene:

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \left[\frac{2}{\Delta t} (v_{n+1} - v_n) - \dot{v}_n - \dot{v}_n \right] - \ddot{v}_n = \frac{4}{(\Delta t)^2} (v_{n+1} - v_n) - \frac{4}{\Delta t} \dot{v}_n - \ddot{v}_n \quad (7.22)$$

Sostituendo le espressioni (7.20) e (7.22) nell'equazione di equilibrio al tempo $(n + 1)\Delta t$

$$m\ddot{v}_{n+1} + c\dot{v}_{n+1} + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (7.23)$$

si ottiene:

$$m \left[\frac{4}{(\Delta t)^2} (v_{n+1} - v_n) - \frac{4}{\Delta t} \dot{v}_n - \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{2}{\Delta t} (v_{n+1} - v_n) - \dot{v}_n \right] + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (7.24)$$

Riorganizzando l'equazione si ottiene:

$$\left[\frac{4m}{(\Delta t)^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \left[\frac{4}{(\Delta t)^2} v_n + \frac{4}{\Delta t} \dot{v}_n + \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{2}{\Delta t} v_n + \dot{v}_n \right] \quad (7.25)$$

Per considerare la risposta non lineare del materiale, la forza interna viene calcolata in modo incrementale e portata a destra del segno di uguaglianza:

$$\left[\frac{4m}{(\Delta t)^2} + \frac{2c}{\Delta t} \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \left[\frac{4}{(\Delta t)^2} v_n + \frac{4}{\Delta t} \dot{v}_n + \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{2}{\Delta t} v_n + \dot{v}_n \right] - R_{n+1}^{int} \quad (7.26)$$

dove

$$R_{n+1}^{int} = R_n^{int} + k(v_{n+1} - v_n) \quad (7.27)$$

dove k è la rigidezza del materiale al tempo $(n + 1)\Delta t$ e R_n^{int} indica la reazione del materiale al passo precedente. Poiché R_{n+1}^{int} deve essere calcolata quando lo spostamento v_{n+1} è ancora incognito, la soluzione si può trovare solo in modo iterativo.

Nella seguente tabella è riportato il diagramma a blocchi per il calcolo automatico della risposta:

Metodo dell'accelerazione media

1) Scegli il passo temporale Δt per ottenere la precisione richiesta e una soglia ε di convergenza

2) Calcola la risposta del materiale al tempo $t=0$: $R_0^{int} = kv_0$

3) Calcola l'accelerazione all'istante iniziale: $\ddot{v}_0 = \frac{1}{m} [F_0 - kv_0 - c\dot{v}_0]$

4) Calcola la rigidezza equivalente: $\hat{k} = \frac{4m}{(\Delta t)^2} + \frac{2c}{\Delta t}$

5) Per ogni passo temporale $n = 0, 1, \dots$

5.1) Calcola la forza equivalente:

$$f = F_{n+1} + m \left[\frac{4}{(\Delta t)^2} v_n + \frac{4}{\Delta t} \dot{v}_n + \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{2}{\Delta t} v_n + \dot{v}_n \right]$$

5.2) Assegna allo spostamento v_{n+1} quello calcolato al passo precedente v_n

5.3) $Errore = 1$;

5.4) Finché $Errore > \varepsilon$ ripeti:

5.4.1) $v_{test} = v_{n+1}$

5.4.2) Calcola la risposta del materiale: $R_{n+1}^{int} = R_n^{int} + k(v_{test} - v_n)$ dove k è funzione di v



5.4.3) Calcola la forza equivalente: $\hat{F}_{n+1} = f - R_{n+1}^{int}$

5.4.4) Calcola lo spostamento al passo $(n + 1)$: $v_{n+1} = \frac{\hat{F}_{n+1}}{k}$

5.4.5) $Errore = |v_{n+1} - v_{test}|$

5.5) Si calcola la velocità e l'accelerazione al tempo $(n + 1)\Delta t$:

$$\dot{v}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t}(v_{n+1} - v_n) - \dot{v}_n$$

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{4}{(\Delta t)^2}(v_{n+1} - v_n) - \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_n - \ddot{v}_n$$

OSSERVAZIONI

- 1) L'inizializzazione della procedura è semplice perché le condizioni iniziali sono note.
- 2) Per problemi in cui la legge costitutiva del materiale non è lineare, k è funzione di v_{n+1} che è incognita. Di conseguenza k deve essere calcolata usando una stima di v_{n+1} . Quindi il processo diventa iterativo: si stima v_{n+1} , si calcola R_{n+1}^{int} usando la (7.27) e si ricalcola lo spostamento v_{n+1} usando la (7.26) finché non si giunge alla convergenza. Quando il problema è fortemente non lineare, possono nascere problemi di convergenza.

7.3.2 Metodo dell'accelerazione lineare

L'ipotesi alla base della procedura è che l'accelerazione vari linearmente durante ogni incremento temporale:

$$\ddot{v}(t_0 + \tau) = \ddot{v}_n + \left(\frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{\Delta t}\right)\tau \quad (7.28)$$

dove $0 \leq \tau \leq \Delta t$ e \ddot{v}_n e \ddot{v}_{n+1} indicano il valore dell'accelerazione agli estremi dell'intervallo temporale. L'integrale della precedente equazione fornisce il valore della velocità:

$$\dot{v}(t_0 + \tau) = \dot{v}_n + \ddot{v}_n\tau + \left(\frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{\Delta t}\right)\frac{\tau^2}{2} \quad (7.29)$$

Di conseguenza la velocità al termine dell'intervallo temporale Δt vale:

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \ddot{v}_n\Delta t + \left(\frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{2}\right)\Delta t \quad (7.30)$$

L'integrale dell'equazione (7.29) fornisce il valore dello spostamento:

$$v(t_0 + \tau) = v_n + \dot{v}_n\tau + \ddot{v}_n\frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{\Delta t}\right)\frac{\tau^3}{6} \quad (7.31)$$

Di conseguenza lo spostamento al termine dell'intervallo temporale Δt vale:

$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n\Delta t + \ddot{v}_n\frac{(\Delta t)^2}{2} + \left(\frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{6}\right)(\Delta t)^2 \quad (7.32)$$

Usando l'eq.(7.32) si può calcolare l'accelerazione al termine dell'intervallo:

$$\ddot{v}_{n+1} = \ddot{v}_n + \frac{6}{(\Delta t)^2}\left[v_{n+1} - v_n - \dot{v}_n\Delta t - \ddot{v}_n\frac{(\Delta t)^2}{2}\right] = \frac{6}{(\Delta t)^2}v_{n+1} - \frac{6}{\Delta t^2}v_n - \frac{6}{\Delta t}\dot{v}_n - 2\ddot{v}_n \quad (7.33)$$

Sostituendo l'eq.(7.33) nell'eq.(7.30) si ottiene:

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \ddot{v}_n\Delta t + \frac{3}{\Delta t}v_{n+1} - \frac{3}{\Delta t}v_n - 3\dot{v}_n - \frac{3}{2}\ddot{v}_n\Delta t = \frac{3}{\Delta t}v_{n+1} - \frac{3}{\Delta t}v_n - 2\dot{v}_n - \frac{\Delta t}{2}\ddot{v}_n \quad (7.34)$$

La sostituzione delle eq.(7.33) e (7.34) nell'equazione dell'equilibrio dinamico al tempo $(n + 1)\Delta t$

$$m\ddot{v}_{n+1} + c\dot{v}_{n+1} + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (7.35)$$

conduce alla seguente forma dell'equazione del moto:



$$m \left[\frac{6}{(\Delta t)^2} v_{n+1} - \frac{6}{(\Delta t)^2} v_n - \frac{6}{\Delta t} \dot{v}_n - 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\Delta t} v_{n+1} - \frac{3}{\Delta t} v_n - 2\dot{v}_n - \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_n \right] + k v_{n+1} = F_{n+1} \quad (7.36)$$

Per concludere, si trasferiscono al secondo membro tutti i termini associati alle condizioni iniziali note:

$$\left[\frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \left[\frac{6}{(\Delta t)^2} v_n + \frac{6}{\Delta t} \dot{v}_n + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\Delta t} v_n + 2\dot{v}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_n \right]$$

Questa equazione si può esprimere in forma più compatta nel modo seguente:

$$\hat{k} v_{n+1} = \hat{F}_{n+1} \quad (7.37)$$

dove

$$\hat{k} = k + \frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{\Delta t} \quad (7.38)$$

$$\hat{F}_{n+1} = F_{n+1} + m \left[\frac{6}{(\Delta t)^2} v_n + \frac{6}{\Delta t} \dot{v}_n + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\Delta t} v_n + 2\dot{v}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_n \right] \quad (7.39)$$

Si noterà che l'eq.(7.37) è equivalente all'espressione dell'equilibrio statico. Il comportamento dinamico è preso in considerazione facendo intervenire gli effetti inerziali e di smorzamento nei termini del carico equivalente e della rigidezza. Per calcolare la velocità \dot{v}_{n+1} e l'accelerazione \ddot{v}_{n+1} si sostituisce il valore dello spostamento v_{n+1} appena calcolato rispettivamente nelle equazioni (7.34) e (7.33).

Per considerare la risposta non lineare del materiale, la forza interna viene calcolata in modo incrementale:

$$\left[\frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{\Delta t} \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \left[\frac{6}{(\Delta t)^2} v_n + \frac{6}{\Delta t} \dot{v}_n + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\Delta t} v_n + 2\dot{v}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_n \right] - R_{n+1}^{int}$$

dove la reazione del materiale si calcola con l'eq.(7.27).

Nella seguente tabella è riportato il diagramma a blocchi per il calcolo automatico della risposta:

Metodo dell'accelerazione lineare

1) Scegli il passo temporale ΔT per ottenere la precisione richiesta e una soglia ε di convergenza

2) Calcola la risposta del materiale al tempo $t = 0$: $R_0^{int} = k v_0$

3) Calcola l'accelerazione all'istante iniziale: $\ddot{v}_0 = \frac{1}{m} [F_0 - k v_0 - c \dot{v}_0]$

4) Calcola la rigidezza equivalente: $\hat{k} = \frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{\Delta t}$

5) Per ogni passo temporale: $n = 0, 1, \dots$

5.1) Si calcola la forza equivalente:

$$f = F_{n+1} + m \left[\frac{6}{(\Delta t)^2} v_n + \frac{6}{\Delta t} \dot{v}_n + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\Delta t} v_n + 2\dot{v}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_n \right]$$

5.2) Assegna allo spostamento v_{n+1} quello calcolato al passo precedente v_n

5.3) $Errorre = 1$;

5.4) Finché $Errorre > \varepsilon$ ripeti:

5.4.1) $v_{test} = v_{n+1}$

5.4.2) Calcola la risposta del materiale: $R_{n+1}^{int} = R_n^{int} + k(v_{test} - v_n)$ dove k è funzione di v

5.4.3) Calcola la forza equivalente: $\hat{F}_{n+1} = f - R_{n+1}^{int}$

5.4.4) Calcola lo spostamento al passo $(n + 1)$: $v_{n+1} = \frac{\hat{F}_{n+1}}{\hat{k}}$

5.4.5) $Errorre = |v_{n+1} - v_{test}|$

5.5) Si calcola la velocità e l'accelerazione al tempo $(n + 1)\Delta t$:

$$\dot{v}_{n+1} = \frac{3}{\Delta t} (v_{n+1} - v_n) - 2\dot{v}_n - \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}_n$$

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{6}{(\Delta t)^2} (v_{n+1} - v_n) - \frac{6}{\Delta t} \dot{v}_n - 2\ddot{v}_n$$

**7.3.3 Metodo di Houbolt**

Lo schema d'integrazione di Houbolt è in qualche modo legato al metodo delle differenze centrali in quanto per la stima della velocità e dell'accelerazione si utilizza una procedura simile.

Ipotesizzando di conoscere lo spostamento ai tempi $t - 2\Delta t$, $t - \Delta t$, t , $t + \Delta t$ è possibile interpolare i dati con una funzione polinomiale di terzo grado:

$$v(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$$

Per semplificare gli sviluppi numerici è possibile cambiare il sistema di riferimento ed esprimere la variazione degli spostamenti v in funzione della variabile ξ :

$$t = t_0 + (\Delta t)\xi$$

In questo modo la funzione interpolante si può esprimere nel modo seguente:

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3\} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \quad (7.40)$$

I parametri incogniti a , b , c e d si possono determinare imponendo che la funzione $v(\xi)$ passi attraverso i dati. E' quindi possibile scrivere il seguente sistema:

$$\begin{Bmatrix} v(-2) \\ v(-1) \\ v(0) \\ v(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} v(-2) \\ v(-1) \\ v(0) \\ v(1) \end{Bmatrix}$$

Sostituendo nell'eq.(7.40) si ottiene:

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3\} [A]^{-1} \begin{Bmatrix} v(-2) \\ v(-1) \\ v(0) \\ v(1) \end{Bmatrix}$$

L'inversa della matrice $[A]$ vale:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3\} [A]^{-1} \begin{Bmatrix} v(-2) \\ v(-1) \\ v(0) \\ v(1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \{(\xi - \xi^3) \quad (-6\xi + 3\xi^2 + 3\xi^3) \quad (6 + 3\xi - 6\xi^2 - 3\xi^3) \quad (2\xi + 3\xi^2 + \xi^3)\} \begin{Bmatrix} v(-2) \\ v(-1) \\ v(0) \\ v(1) \end{Bmatrix}$$

La velocità al tempo $t = t_0 + \xi(\Delta t)$ vale:



$$\dot{v}(t) = \frac{d[v(\xi)]}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{d[v(\xi)]}{d\xi} \frac{1}{\Delta t}$$

Esprimendo la velocità in funzione del tempo si ottiene:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{6\Delta t} \left\{ \begin{matrix} (1 - 3\xi^2) & (-6 + 6\xi + 9\xi^2) & (3 - 12\xi - 9\xi^2) & (2 + 6\xi + 3\xi^2) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v(t_0 - 2\Delta t) \\ v(t_0 - \Delta t) \\ v(t_0) \\ v(t_0 + \Delta t) \end{matrix} \right\}$$

Quando $\xi = 1$, cioè al tempo $t_0 + \Delta t = (n + 1)\Delta t$ si ottiene:

$$\dot{v}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} \left\{ \begin{matrix} -2 & 9 & -18 & 11 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \\ v_{n+1} \end{matrix} \right\} = \frac{-2v_{n-2} + 9v_{n-1} - 18v_n + 11v_{n+1}}{6\Delta t} \quad (7.41)$$

L'accelerazione al tempo $t = t_0 + \xi(\Delta t)$ vale:

$$\ddot{v}(t) = \frac{1}{6\Delta t} \left\{ \begin{matrix} (-6\xi) & (6 + 18\xi) & (-12 - 18\xi) & (6 + 6\xi) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v(t_0 - 2\Delta t) \\ v(t_0 - \Delta t) \\ v(t_0) \\ v(t_0 + \Delta t) \end{matrix} \right\}$$

Quando $\xi = 1$, cioè al tempo $t_0 + \Delta t = (n + 1)\Delta t$ l'accelerazione vale:

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{1}{6(\Delta t)^2} \left\{ \begin{matrix} -6 & 24 & -30 & 12 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \\ v_{n+1} \end{matrix} \right\} = \frac{-v_{n-2} + 4v_{n-1} - 5v_n + 2v_{n+1}}{(\Delta t)^2} \quad (7.42)$$

Lo spostamento al tempo $(n + 1)\Delta t$ si ottiene utilizzando l'equazione dell'equilibrio dinamico:

$$m\ddot{v}_{n+1} + c\dot{v}_{n+1} + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (7.43)$$

Sostituendo le relazioni precedenti relative alla velocità e all'accelerazione si ottiene:

$$m \frac{-v_{n-2} + 4v_{n-1} - 5v_n + 2v_{n+1}}{(\Delta t)^2} + c \frac{-2v_{n-2} + 9v_{n-1} - 18v_n + 11v_{n+1}}{6\Delta t} + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (7.44)$$

Portando a destra del segno di uguaglianza tutti i termini noti si ottiene:

$$\left[\frac{2m}{(\Delta t)^2} + \frac{11c}{6\Delta t} + k \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \frac{v_{n-2} - 4v_{n-1} + 5v_n}{(\Delta t)^2} + c \frac{2v_{n-2} - 9v_{n-1} + 18v_n}{6\Delta t} \quad (7.45)$$

Per considerare la risposta non lineare del materiale, la forza interna viene calcolata in modo incrementale:

$$\left[\frac{2m}{(\Delta t)^2} + \frac{11c}{6\Delta t} \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \frac{v_{n-2} - 4v_{n-1} + 5v_n}{(\Delta t)^2} + c \frac{2v_{n-2} - 9v_{n-1} + 18v_n}{6\Delta t} - R_{n+1}^{int}$$

dove la reazione del materiale si calcola con l'eq.(7.27).

OSSERVAZIONI

Si può notare che il calcolo di v_{n+1} richiede la conoscenza di v_n , v_{n-1} e v_{n-2} . Per iniziare lo schema d'integrazione di Houbolt si può utilizzare la stessa strategia usata con il metodo delle differenze centrali, utilizzando v_0 , \dot{v}_0 e \ddot{v}_0 ma generalmente si consiglia di calcolare i primi due passi v_1 e v_2 con uno schema d'integrazione diverso, per esempio il metodo dell'accelerazione lineare che per partire richiede la conoscenza solo di v_0 , \dot{v}_0 e \ddot{v}_0 .

Nell'[appendice A](#) è riportata un'altra applicazione della procedura appena descritta che può essere utilizzata per il progetto di metodi multistep.

Nella seguente tabella è riportato il diagramma a blocchi per il calcolo automatico della risposta:

**Metodo di Houbolt**

- 1) Scegli il passo temporale Δt per ottenere la precisione richiesta e una soglia ε di convergenza
- 2) Calcola i primi due passi non il metodo dell'accelerazione lineare
- 3) Calcola la rigidezza equivalente: $\hat{k} = \frac{2m}{(\Delta t)^2} + \frac{11c}{6\Delta t}$
- 4) Per ogni passo temporale successivo al secondo:
 - 4.1) Calcola la forza equivalente:

$$f = F_{n+1} + m \frac{v_{n-2} - 4v_{n-1} + 5v_n}{(\Delta t)^2} + c \frac{2v_{n-2} - 9v_{n-1} + 18v_n}{6\Delta t}$$

- 4.2) Assegna allo spostamento v_{n+1} quello calcolato al passo precedente v_n

- 4.3) $Error = 1$;

- 4.4) Finché $Error > \varepsilon$ ripeti:
 - 4.4.1) $v_{test} = v_{n+1}$
 - 4.4.2) Calcola la risposta del materiale: $R_{n+1}^{int} = R_n^{int} + k(v_{test} - v_n)$ dove k è funzione di v
 - 4.4.3) Calcola la forza equivalente: $\hat{F}_{n+1} = f - R_{n+1}^{int}$
 - 4.4.4) Calcola lo spostamento al passo $(n + 1)$: $v_{n+1} = \frac{\hat{F}_{n+1}}{\hat{k}}$
 - 4.4.5) $Error = |v_{n+1} - v_{test}|$

- 4.5) Si calcola la velocità e l'accelerazione al tempo $(n + 1)\Delta t$:
 - 4.5.1) $\dot{v}_{n+1} = \frac{-2v_{n-2} + 9v_{n-1} - 18v_n + 11v_{n+1}}{6\Delta t}$
 - 4.5.2) $\ddot{v}_{n+1} = \frac{-v_{n-2} + 4v_{n-1} - 5v_n + 2v_{n+1}}{(\Delta t)^2}$

7.3.4 - Il metodo ϑ di Wilson

Il metodo ϑ di Wilson è essenzialmente una estensione del metodo dell'accelerazione lineare in base al quale si ipotizza che tra il tempo t ed il tempo $t + \Delta t$ l'accelerazione subisca una variazione lineare.

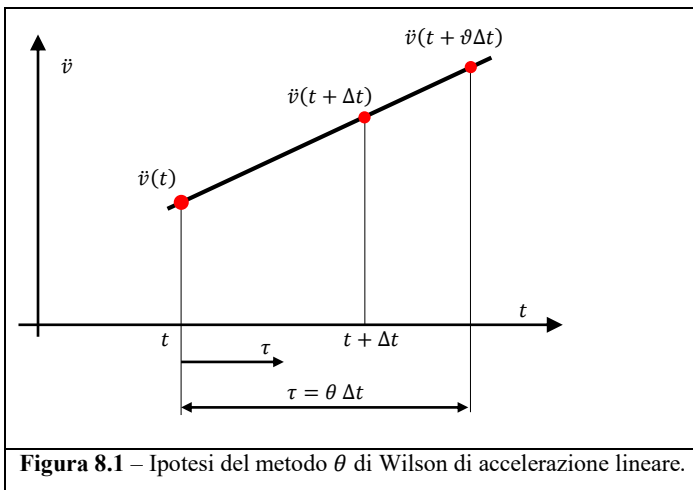


Figura 8.1 – Ipotesi del metodo ϑ di Wilson di accelerazione lineare.

Con il metodo ϑ di Wilson si ipotizza che l'accelerazione sia lineare dal tempo t al tempo $t + \vartheta\Delta t$, dove $\vartheta \geq 1$. Quando $\vartheta = 1$ il metodo si riduce allo schema dell'accelerazione lineare, ma nel prossimo capitolo si mostrerà che per rendere il metodo incondizionatamente stabile è necessario che $\vartheta \geq 1.37$; normalmente si utilizza $\vartheta = 1.4$.

Si indichi con il simbolo τ l'incremento temporale, dove $0 \leq \tau \leq \vartheta\Delta t$.

Nel seguito le variabili al tempo $t + \vartheta\Delta t$ verranno indicate con il pedice $n + \vartheta$.

Allora nell'intervallo di tempo da t a $t + \vartheta\Delta t$ si ipotizza che l'accelerazione vari in modo lineare:

$$\dot{v}(t + \tau) = \dot{v}_n + \frac{\dot{v}_{n+\vartheta} - \dot{v}_n}{\vartheta\Delta t} \tau \quad (7.46)$$

Integrando l'eq.(7.46) si ottiene la velocità:

$$v(t + \tau) = v_n + \dot{v}_n \tau + \frac{\dot{v}_{n+\vartheta} - \dot{v}_n}{2\vartheta\Delta t} \tau^2 \quad (7.47)$$

Integrando una seconda volta si ottiene lo spostamento:



$$v(t + \tau) = v_n + \dot{v}_n \tau + \ddot{v}_n \frac{\tau^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{6 \vartheta \Delta t} \tau^3 \quad (7.48)$$

Usando le eq.(7.47) e (7.48) al tempo $(n + \vartheta)\Delta t$ si ottiene:

$$\dot{v}_{n+\vartheta} = \dot{v}_n + \ddot{v}_n(\vartheta \Delta t) + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{2}(\vartheta \Delta t) = \dot{v}_n + \frac{(\vartheta \Delta t)}{2}[\ddot{v}_{n+\vartheta} + \ddot{v}_n] \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} v_{n+\vartheta} &= v_n + \dot{v}_n(\vartheta \Delta t) + \ddot{v}_n \frac{(\vartheta \Delta t)^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{6}(\vartheta \Delta t)^2 = \\ &= v_n + (\vartheta \Delta t)\dot{v}_n + \frac{(\vartheta \Delta t)^2}{6}[\ddot{v}_{n+\vartheta} + 2\ddot{v}_n] \end{aligned} \quad (7.50)$$

dalle quali è possibile calcolare $\ddot{v}_{n+\vartheta}$ e $\dot{v}_{n+\vartheta}$ in funzione di $v_{n+\vartheta}$:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_{n+\vartheta} &= \frac{2}{\vartheta \Delta t}[\dot{v}_{n+\vartheta} - \dot{v}_n] - \ddot{v}_n \\ \ddot{v}_{n+\vartheta} &= \frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2}[v_{n+\vartheta} - v_n - (\vartheta \Delta t)\dot{v}_n] - 2\ddot{v}_n \end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni:

$$\frac{2}{\vartheta \Delta t}[\dot{v}_{n+\vartheta} - \dot{v}_n] - \ddot{v}_n = \frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2}[v_{n+\vartheta} - v_n - (\vartheta \Delta t)\dot{v}_n] - 2\ddot{v}_n$$

si calcola $\dot{v}_{n+\vartheta}$:

$$\dot{v}_{n+\vartheta} = \frac{3}{\vartheta \Delta t}(v_{n+\vartheta} - v_n) - 2\dot{v}_n - \frac{\vartheta \Delta t}{2}\ddot{v}_n \quad (7.51)$$

Sostituendo questo risultato nell'eq.(7.49) si ottiene:

$$\frac{3}{\vartheta \Delta t}[v_{n+\vartheta} - v_n] - 2\dot{v}_n - \frac{\vartheta \Delta t}{2}\ddot{v}_n = \dot{v}_n + \frac{(\vartheta \Delta t)}{2}[\ddot{v}_{n+\vartheta} + \ddot{v}_n]$$

e semplificando

$$\ddot{v}_{n+\vartheta} = \frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2}[v_{n+\vartheta} - v_n] - \frac{6}{(\vartheta \Delta t)}\dot{v}_n - 2\ddot{v}_n \quad (7.52)$$

Per stimare lo spostamento, la velocità e l'accelerazione al tempo $t + \Delta t$ si utilizza l'equazione dell'equilibrio dinamico al tempo $t + \vartheta \Delta t$. Poiché si è ipotizzato che l'accelerazione vari in modo lineare, si utilizza un carico proiettato linearmente, cioè si utilizza la seguente equazione di equilibrio:

$$m\ddot{v}_{n+\vartheta} + c\dot{v}_{n+\vartheta} + kv_{n+\vartheta} = \bar{F}_{n+\vartheta} \quad (7.53)$$

dove:

$$\bar{F}_{n+\vartheta} = F_n + \vartheta[F_{n+1} - F_n] \quad (7.54)$$

Sostituendo l'eq.(7.51) e (7.52) nella (7.53) si ottiene un'equazione grazie alla quale è possibile calcolare $v_{n+\vartheta}$.

$$m \left[\frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2}(v_{n+\vartheta} - v_n) - \frac{6}{(\vartheta \Delta t)}\dot{v}_n - 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\vartheta \Delta t}(v_{n+\vartheta} - v_n) - 2\dot{v}_n - \frac{\vartheta \Delta t}{2}\ddot{v}_n \right] + kv_{n+\vartheta} = \bar{F}_{n+\vartheta}$$

Sviluppando:

$$\left[k + \frac{6m}{(\vartheta \Delta t)^2} + \frac{3c}{\vartheta \Delta t} \right] v_{n+\vartheta} = \bar{F}_{n+\vartheta} + m \left[\frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2} v_n + \frac{6}{(\vartheta \Delta t)} \dot{v}_n + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\vartheta \Delta t} v_n + 2\dot{v}_n + \frac{\vartheta \Delta t}{2} \ddot{v}_n \right]$$

Per considerare la risposta non lineare del materiale, la forza interna viene calcolata in modo incrementale:



$$\left[\frac{6m}{(\vartheta \Delta t)^2} + \frac{3c}{\vartheta \Delta t} \right] v_{n+\vartheta} = \bar{F}_{n+\vartheta} + m \left[\frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2} v_n + \frac{6}{(\vartheta \Delta t)} \dot{v}_n + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\vartheta \Delta t} v_n + 2\dot{v}_n + \frac{\vartheta \Delta t}{2} \ddot{v}_n \right] - R_{n+1}^{int}$$

dove la reazione del materiale si calcola con l'eq.(7.27).

Infine sostituendo $v_{n+\vartheta}$ nella (7.52) si ottiene $\ddot{v}_{n+\vartheta}$. Posto $\tau = \Delta t$ è ora possibile usare le eq.(7.46), (7.47) e (7.48) per calcolare $\ddot{v}(t + \Delta t)$, $\dot{v}(t + \Delta t)$ e $v(t + \Delta t)$:

$$\ddot{v}_{n+1} = \ddot{v}_n + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{\vartheta} \quad (7.55)$$

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \ddot{v}_n \Delta t + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{2\vartheta} \Delta t^2 \quad (7.56)$$

$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n \Delta t + \ddot{v}_n \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{6\vartheta} (\Delta t)^3 \quad (7.57)$$

Il diagramma a blocchi dell'algoritmo completo è riportato nella seguente tabella.

Metodo θ di Wilson

- 1) Scegli il passo temporale Δt , una soglia ε di convergenza e il parametro ϑ
- 2) Calcola la risposta del materiale al tempo $t = 0$: $R_0^{int} = kv_0$
- 3) Calcola la rigidezza equivalente: $\hat{k} = \frac{6m}{(\vartheta \Delta t)^2} + \frac{3c}{\vartheta \Delta t}$
- 4) Calcola l'accelerazione all'istante iniziale: $\ddot{v}_0 = \frac{1}{m} [F_0 - kv_0 - c\dot{v}_0]$
- 5) Per ogni passo temporale:
 - 5.1) Calcola la forza al tempo $t + \vartheta \Delta t$: $\bar{F}_{n+\vartheta} = F_n + \vartheta [F_{n+1} - F_n]$
 - 5.2) Calcola la forza equivalente

$$f = \bar{F}_{n+\vartheta} + m \left[\frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2} v_n + \frac{6}{(\vartheta \Delta t)} \dot{v}_n + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3}{\vartheta \Delta t} v_n + 2\dot{v}_n + \frac{\vartheta \Delta t}{2} \ddot{v}_n \right]$$
 - 5.3) Assegna allo spostamento $v_{n+\vartheta}$ quello calcolato al passo precedente v_n
 - 5.4) $Error = 1$;
 - 5.5) Finché $Error > \varepsilon$ ripeti:
 - 5.5.1) $v_{test} = v_{n+\vartheta}$
 - 5.5.2) Calcola la risposta del materiale: $R_{n+1}^{int} = R_n^{int} + k(v_{test} - v_n)$
 - 5.5.3) Calcola la forza equivalente: $\hat{F}_{n+\vartheta} = f - R_{n+1}^{int}$
 - 5.5.4) Calcola lo spostamento al tempo $t + \vartheta \Delta t$: $v_{n+\vartheta} = \frac{\hat{F}_{n+\vartheta}}{\hat{k}}$
 - 5.5.5) $Error = |v_{n+\vartheta} - v_{test}|$
 - 5.6) Calcola l'accelerazione al tempo $t + \vartheta \Delta t$

$$\ddot{v}_{n+\vartheta} = \frac{6}{(\vartheta \Delta t)^2} [v_{n+\vartheta} - v_n] - \frac{6}{(\vartheta \Delta t)} \dot{v}_n - 2\ddot{v}_n$$
 - 5.7) Calcola lo spostamento, la velocità e l'accelerazione al tempo $t + \Delta t$.

$$\ddot{v}_{n+1} = \ddot{v}_n + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{\vartheta}$$

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \ddot{v}_n \Delta t + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{2\vartheta} \Delta t^2$$

$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n \Delta t + \ddot{v}_n \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{n+\vartheta} - \ddot{v}_n}{6\vartheta} (\Delta t)^3$$

Si può notare che non è necessaria una procedura speciale di partenza in quanto lo spostamento, la velocità e l'accelerazione al tempo $t + \Delta t$ sono espressi in funzione solo delle stesse quantità al tempo t .

**7.3.5 - Metodo di Newmark**

Anche il metodo di Newmark può essere inteso come un'estensione del metodo dell'accelerazione lineare. In questo caso si utilizzano le seguenti ipotesi:

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + [(1 - \delta)\ddot{v}_n + \delta \ddot{v}_{n+1}]\Delta t \quad (7.58)$$

$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{v}_n + \alpha \ddot{v}_{n+1} \right] (\Delta t)^2 \quad (7.59)$$

dove α e δ sono parametri che possono essere determinati in modo che l'integrazione sia precisa e stabile.

Quando $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{6}$, le relazioni (7.58) e (7.59) corrispondono al metodo dell'accelerazione lineare (che si ottiene anche ponendo $\vartheta = 1$ nel metodo θ di Wilson). Infatti in tal caso, posto $0 \leq \tau \leq \Delta t$ la variazione lineare dell'accelerazione vale:

$$\ddot{v}(t + \tau) = \ddot{v}_n + \frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{\Delta t} \tau$$

il cui integrale fornisce la velocità:

$$\dot{v}(t + \tau) = \dot{v}_n + \ddot{v}_n\tau + \frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{2\Delta t} \tau^2$$

che al tempo $\tau = \Delta t$ vale

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \frac{\ddot{v}_{n+1} + \ddot{v}_n}{2} \Delta t$$

identica alla (7.58) quando $\delta = \frac{1}{2}$. Integrando la velocità si ottiene lo spostamento:

$$v(t + \tau) = v_n + \dot{v}_n\tau + \ddot{v}_n \frac{\tau^2}{2} + \frac{\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n}{6\Delta t} \tau^3$$

che al tempo $\tau = \Delta t$ vale

$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n\Delta t + \frac{\ddot{v}_{n+1} + 2\ddot{v}_n}{6} \Delta t^2$$

identico alla (7.59) quando $\alpha = \frac{1}{6}$.

In origine Newmark propose come schema incondizionatamente stabile il metodo dell'accelerazione costante che si ottiene ponendo $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{4}$. In tal caso infatti posta l'accelerazione costante:

$$\ddot{v}(t + \tau) = \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{2} = \text{cost}$$

la velocità risulta:

$$\dot{v}(t + \tau) = \dot{v}_n + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{2} \tau$$

che al tempo $\tau = \Delta t$ è identica alla (7.58) quando $\delta = \frac{1}{2}$. Integrando la velocità si ottiene lo spostamento:

$$v(t + \tau) = v_n + \dot{v}_n\tau + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{4} \tau^2$$

che al tempo $\tau = \Delta t$ vale

$$v_{n+1} = v_n + \dot{v}_n\Delta t + \frac{\ddot{v}_n + \ddot{v}_{n+1}}{4} \Delta t^2$$

identico alla (7.59) quando $\alpha = \frac{1}{4}$.

Per il calcolo degli spostamenti, delle velocità e delle accelerazioni, oltre alle eq.(7.58) e (7.59) si utilizza l'equazione di equilibrio (7.2b) al tempo $t + \Delta t$:



$$m\ddot{v}_{n+1} + c\dot{v}_{n+1} + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (7.60)$$

Dall'eq.(7.59) è possibile ricavare \dot{v}_{n+1} in funzione di v_{n+1} :

$$\dot{v}_{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\alpha(\Delta t)^2} - \frac{\dot{v}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{v}_n \quad (7.61)$$

Sostituendo questa espressione nell'(7.58) si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta \Delta t \ddot{v}_{n+1} &= \dot{v}_{n+1} - \dot{v}_n - (1 - \delta)\Delta t \ddot{v}_n \\ \delta \Delta t \left[\frac{v_{n+1} - v_n}{\alpha(\Delta t)^2} - \frac{\dot{v}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{v}_n \right] &= \dot{v}_{n+1} - \dot{v}_n - (1 - \delta)\Delta t \ddot{v}_n \end{aligned}$$

da cui risulta:

$$\dot{v}_{n+1} = \frac{\delta}{\Delta t \alpha} v_{n+1} - \frac{\delta}{\Delta t \alpha} v_n + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \dot{v}_n + \left(\frac{2\alpha - \delta}{2\alpha}\right) \Delta t \ddot{v}_n \quad (7.62)$$

Le eq.(7.62) e (7.61) esprimono la velocità \dot{v}_{n+1} e l'accelerazione \ddot{v}_{n+1} in funzione dell'unica incognita v_{n+1} . Sostituendole nell'eq.(7.60) si ottiene:

$$m \left[\frac{v_{n+1} - v_n}{\alpha(\Delta t)^2} - \frac{\dot{v}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{\delta}{\Delta t \alpha} v_{n+1} - \frac{\delta}{\Delta t \alpha} v_n + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \dot{v}_n + \left(\frac{2\alpha - \delta}{2\alpha}\right) \Delta t \ddot{v}_n \right] + kv_{n+1} = F_{n+1}$$

Riordinando l'equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[k + \frac{m}{\alpha(\Delta t)^2} + \frac{c\delta}{\alpha \Delta t} \right] v_{n+1} \\ = F_{n+1} + m \left[\frac{v_n}{\alpha(\Delta t)^2} + \frac{\dot{v}_n}{\alpha \Delta t} + \left(\frac{1 - 2\alpha}{2\alpha}\right) \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{\delta}{\Delta t \alpha} v_n + \left(\frac{\delta - \alpha}{\alpha}\right) \dot{v}_n + \left(\frac{\delta - 2\alpha}{2\alpha}\right) \Delta t \ddot{v}_n \right] \end{aligned}$$

Per considerare la risposta non lineare del materiale, la forza interna viene calcolata in modo incrementale:

$$\left[\frac{m}{\alpha(\Delta t)^2} + \frac{c\delta}{\alpha \Delta t} \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \left[\frac{v_n}{\alpha(\Delta t)^2} + \frac{\dot{v}_n}{\alpha \Delta t} + \left(\frac{1 - 2\alpha}{2\alpha}\right) \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{\delta}{\Delta t \alpha} v_n + \left(\frac{\delta - \alpha}{\alpha}\right) \dot{v}_n + \left(\frac{\delta - 2\alpha}{2\alpha}\right) \Delta t \ddot{v}_n \right] - R_{n+1}^{int}$$

dove la reazione del materiale si calcola con l'eq.(7.27).

Il diagramma a blocchi dell'algoritmo di Newmark è riportato nella seguente tabella.

Metodo di Newmark

- 1) Scegli il passo temporale Δt , le costanti α e δ e una soglia ε di convergenza:

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad \alpha \geq \frac{(0.5 + \delta)^2}{4}$$

- 2) Calcola la risposta del materiale al tempo $t = 0$: $R_0^{int} = kv_0$
- 3) Calcola l'accelerazione all'istante iniziale: $\ddot{v}_0 = \frac{1}{m} [F_0 - kv_0 - c\dot{v}_0]$
- 4) Calcola la rigidezza equivalente: $\hat{k} = \frac{m}{\alpha(\Delta t)^2} + \frac{c\delta}{\alpha \Delta t}$

- 5) Per ogni passo temporale

- 5.1) Calcola la forza equivalente:

$$f = F_{n+1} + m \left[\frac{v_n}{\alpha(\Delta t)^2} + \frac{\dot{v}_n}{\alpha \Delta t} + \left(\frac{1 - 2\alpha}{2\alpha}\right) \ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{\delta}{\Delta t \alpha} v_n + \left(\frac{\delta - \alpha}{\alpha}\right) \dot{v}_n + \left(\frac{\delta - 2\alpha}{2\alpha}\right) \Delta t \ddot{v}_n \right]$$

- 5.2) Assegna allo spostamento v_{n+1} quello calcolato al passo precedente v_n

- 5.3) $Erroro > 1$:

- 5.4) Finché $Erroro > \varepsilon$ ripeti:

- 5.4.1) $v_{test} = v_{n+1}$

- 5.4.2) Calcola la risposta del materiale: $R_{n+1}^{int} = R_n^{int} + k(v_{test} - v_n)$

- 5.4.3) Calcola la forza equivalente: $\hat{F}_{n+1} = f - R_{n+1}^{int}$

- 5.4.4) Calcola lo spostamento al passo $(n + 1)\Delta t$: $v_{n+1} = \frac{\hat{F}_{n+1}}{\hat{k}}$

- 5.4.5) $Erroro = |v_{n+1} - v_{test}|$



5.5) Calcola la velocità e l'accelerazione al tempo $(n + 1)\Delta t$:

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\alpha(\Delta t)^2} - \frac{\dot{v}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1 - 2\alpha}{2\alpha}\right) \ddot{v}_n$$

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + [(1 - \delta)\ddot{v}_n + \delta \ddot{v}_{n+1}]\Delta t$$

Nell'[appendice B](#) sono riportati i codici MATLAB per l'esecuzione degli algoritmi precedentemente descritti.

Osservazioni di carattere generale

Come in tutte le integrazioni numeriche, la precisione dei metodi descritti dipende dalla durata del passo temporale Δt . Per la sua scelta è necessario prendere in considerazione tre fattori essenziali:

- 1) La rapidità della variazione del carico applicato $F(t)$;
- 2) La complessità delle caratteristiche non lineari di smorzamento e di rigidità;
- 3) Il periodo T di vibrazione della struttura.

L'incremento di tempo deve permettere una buona rappresentazione di tutte queste grandezze, compreso il periodo T del sistema in vibrazione libera. In generale la variazione delle caratteristiche del materiale non costituisce un fattore critico; se queste cambiano rapidamente e in modo sensibile, come nel caso di snervamento di una molla, un incremento di tempo frazionario può trattare questo effetto con precisione. Inoltre è possibile determinare facilmente l'incremento di tempo che consenta di conoscere adeguatamente gli aspetti più importanti di un carico dinamico.

Se la storia di carico è relativamente semplice, la scelta dell'intervallo di tempo dipenderà essenzialmente dal periodo di vibrazione della struttura. Il metodo esplicito delle differenze centrali è solo *condizionatamente stabile* e fornirà una soluzione divergente se $\Delta t > \frac{T}{\pi}$ cioè se l'incremento del tempo è più grande di circa un terzo del periodo di vibrazione. Si sottolinea inoltre che l'incremento temporale deve essere molto più corto del limite precedentemente indicato se si desidera ottenere risultati ragionevolmente precisi. In generale un rapporto $\frac{\Delta t}{T} \leq 10$ permette di ottenere risultati sufficientemente affidabili. Se rimangono dei dubbi sull'attendibilità dei risultati ottenuti, si può procedere con un secondo calcolo dimezzando il passo temporale; e se la risposta non cambia in modo sensibile, si può ammettere che gli errori imputabili all'integrazione numerica siano diventati trascurabili.



ESEMPIO E7.1 – Si utilizzi il metodo esplicito delle differenze centrali per calcolare la risposta di un portale modellato con un solo grado di libertà, caricato oltre il limite elastico. Si ipotizzi che lo smorzamento sia costante e che la rigidità del materiale segua la funzione rappresentata in figura E7.1. Si ripeta il calcolo tre volte, utilizzando prima un passo temporale pari a metà del periodo del sistema in vibrazione libera, poi un decimo del periodo ed infine un ventesimo.

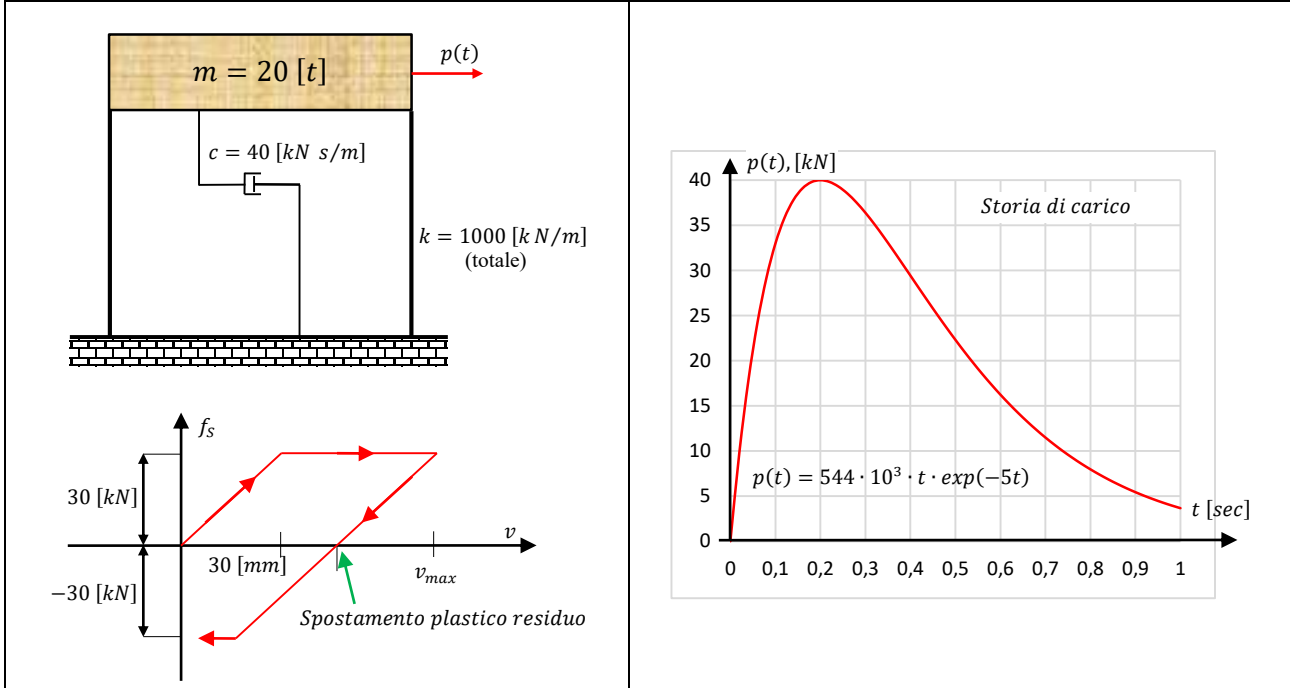
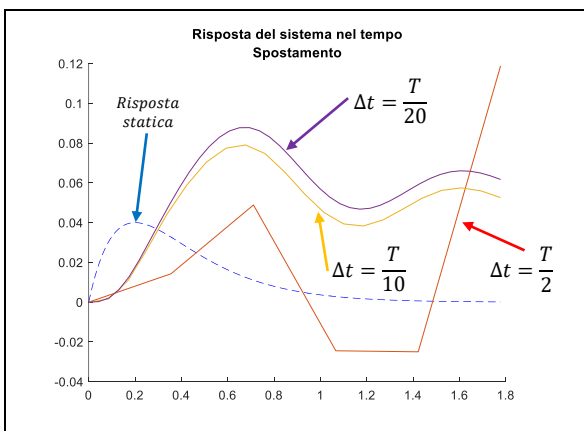


Fig.E7.1 – Portale elastoplastico ed il suo carico dinamico.

La frequenza angolare del sistema ed il suo periodo valgono:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^6}{2 \cdot 10^4}} = 7.071 \left[\frac{rad}{s} \right], \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.889 \text{ [s]}.$$

- 1) Per la prima prova di calcolo si utilizzerà il passo temporale: $\Delta t = \frac{0.889}{2} \cong 0.4 \text{ [s]}$;
- 2) Per la seconda si utilizzerà il passo temporale: $\Delta t = \frac{0.889}{10} \cong 0.09 \text{ [s]}$;
- 3) Per la terza si utilizzerà il passo temporale: $\Delta t = \frac{0.889}{20} \cong 0.04 \text{ [s]}$.



In questo caso il passo più adatto non dipende dal periodo naturale del sistema, ma dalla necessità di rappresentare adeguatamente sia la storia del carico che la risposta del materiale. E' infatti evidente che il passo $\Delta t = 0.4 \text{ [s]}$ non consente di rappresentare correttamente l'andamento del carico esterno.

Osservando i risultati ottenuti con il metodo esplicito delle differenze centrali si deduce che la risposta del sistema ottenuta con il passo $\Delta t = T/2$ non è stabile.



APPENDICE A

La procedura utilizzata per spiegare il metodo di Houbolt permette il progetto di numerosi altri metodi d'integrazione, sia a passo singolo che multistep. Partendo dall'ipotesi di conoscere le soluzioni del problema ai passi precedenti a quello attuale (soluzioni comprendenti non solo gli spostamenti, ma anche velocità e accelerazioni) la procedura consiste nel costruire un polinomio interpolante passante attraverso tali dati; successivamente il polinomio viene utilizzato per predire al tempo $t + \Delta t$ il valore dello spostamento.

Con il metodo di Houbolt si è ipotizzato di conoscere lo spostamento ai tempi $t - 2\Delta t$, $t - \Delta t$, t , $t + \Delta t$ e si è costruito un polinomio di terzo grado passante attraverso tali dati.

$$v(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$$

Sfruttando le informazioni acquisite in tempi precedenti è possibile utilizzare polinomi di grado più elevato e progettare metodi multistep.

Il polinomio di terzo grado può essere costruito imponendo che al tempo $n\Delta t$ il suo valore corrisponda allo spostamento v_n , la sua derivata prima corrisponda alla velocità \dot{v}_n , la sua derivata seconda corrisponda all'accelerazione \ddot{v}_n e che al tempo $(n + 1)\Delta t$ il suo valore corrisponda allo spostamento v_{n+1} .

Posto $t = \xi\Delta t$ la funzione interpolante si può esprimere nel modo seguente:

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi\Delta t \quad (\xi\Delta t)^2 \quad (\xi\Delta t)^3\} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Le derivate del polinomio (A.1) rispetto al tempo t valgono:

$$\dot{v}(t) = \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dv(\xi)}{d\xi} / \frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{\Delta t} \{0 \quad \Delta t \quad 2\xi(\Delta t)^2 \quad 3\xi^2(\Delta t)^3\} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{1}{(\Delta t)^2} \{0 \quad 0 \quad 2(\Delta t)^2 \quad 6\xi(\Delta t)^3\} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

I parametri incogniti a, b, c e d si determinano imponendo le condizioni al contorno.

$$\begin{cases} \text{in } \xi = 1 & v(\xi = 1) = v_{n+1} \\ \text{in } \xi = 0 & v(\xi = 0) = v_n \\ \text{in } \xi = 0 & \dot{v}(\xi = 0) = \dot{v}_n \\ \text{in } \xi = 0 & \ddot{v}(\xi = 0) = \ddot{v}_n \end{cases} \quad \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & (\Delta t)^2 & (\Delta t)^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}$$

Sostituendo nell'eq.(A.1) si ottiene:

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi\Delta t \quad (\xi\Delta t)^2 \quad (\xi\Delta t)^3\} [A]^{-1} \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}$$

L'inversa della matrice $[A]$ vale:



$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1/(\Delta t)^3 & -1/(\Delta t)^3 & -1/(\Delta t)^2 & -1/(2\Delta t) \end{bmatrix}$$

da cui:

$$v(t) = \begin{Bmatrix} \xi^3 & 1 - \xi^3 & (\xi - \xi^3)\Delta t & \left(\frac{\xi^2 - \xi^3}{2}\right)(\Delta t)^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}$$

La velocità al tempo t vale:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} 3\xi^2 & -3\xi^2 & (1 - 3\xi^2)\Delta t & \left(\frac{2\xi - 3\xi^2}{2}\right)(\Delta t)^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}$$

Quando $\xi = 1$, cioè al tempo $(n + 1)\Delta t$ si ottiene:

$$\dot{v}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} 3 & -3 & -2\Delta t & -\frac{(\Delta t)^2}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix} = \frac{3v_{n+1} - 3v_n}{\Delta t} - 2\dot{v}_n - \frac{\Delta t}{2}\ddot{v}_n \quad (\text{A.4})$$

L'accelerazione al tempo t vale:

$$\ddot{v}(t) = \frac{1}{(\Delta t)^2} \begin{Bmatrix} 6\xi & -6\xi & -6\xi\Delta t & (1 - 3\xi)(\Delta t)^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}$$

Quando $\xi = 1$, cioè al tempo $(n + 1)\Delta t$ l'accelerazione vale:

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \begin{Bmatrix} 6 & -6 & -6\Delta t & -2(\Delta t)^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ \dot{v}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix} = \frac{6v_{n+1} - 6v_n}{(\Delta t)^2} - \frac{6\dot{v}_n}{\Delta t} - 2\ddot{v}_n \quad (\text{A.5})$$

L'equazione dell'equilibrio dinamico deve essere verificata al tempo $(n + 1)\Delta t$:

$$m\ddot{v}_{n+1} + c\dot{v}_{n+1} + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (\text{A.6})$$

Sostituendo le relazioni precedenti relative alla velocità e all'accelerazione si ottiene:

$$m \left[\frac{6v_{n+1} - 6v_n}{(\Delta t)^2} - \frac{6\dot{v}_n}{\Delta t} - 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3v_{n+1} - 3v_n}{\Delta t} - 2\dot{v}_n - \frac{\Delta t}{2}\ddot{v}_n \right] + kv_{n+1} = F_{n+1} \quad (\text{A.7})$$

Portando a destra del segno di uguaglianza tutti i termini noti si ottiene:

$$\left[\frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k \right] v_{n+1} = F_{n+1} + m \left[\frac{6v_n}{(\Delta t)^2} + \frac{6\dot{v}_n}{\Delta t} + 2\ddot{v}_n \right] + c \left[\frac{3v_n}{\Delta t} + 2\dot{v}_n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{v}_n \right] \quad (\text{A.8})$$

identica all'eq.(7.34) relativa al metodo dell'accelerazione lineare.

**APPENDICE B**

Qui di seguito è riportato un programma scritto in MATLAB che consente di analizzare il comportamento degli algoritmi prima descritti.

```
clear all;
clf;
pack;
clc;
close all;
global Omega

% Metodi d'integrazione diretta per passi
disp('Analisi dinamica di un portale: Integrazione diretta per passi');
K = 10^6; % Rigidezza del modello ad un solo gdl
M = 20000; % Massa
C = 40000; % Coefficiente di smorzamento costante nel tempo
s_iniz = 0; % Spostamento iniziale
v_iniz = 0; % Velocità iniziale
Omega = sqrt(K/M); % Frequenza angolare propria del sistema
T = 2*pi/Omega; % Periodo del sistema
fprintf('Rigidezza : k = %.3f\n',K);
fprintf('Massa : m = %.3f\n',M);
fprintf('Smorzamento: c = %.3f\n',C);
fprintf('Frequenza angolare propria del sistema: Omega = %.3f\n',Omega);
fprintf('Periodo del sistema: T = %.3f\n',T);

% =====
% Scegli il tipo di materiale della struttura
% =====
disp('Scegli il tipo di risposta del materiale');
disp('Mat = 0: comportamento lineare elastico');
disp('Mat = 1: comportamento elastico - perfettamente plastico (bilineare)');
Mat = [];
while isempty(Mat)
    Mat = input('> Mat = ');
    if ~isempty(Mat)
        if Mat < 0 || Mat > 1
            disp('ATTENZIONE: opzione non prevista');
            Mat = [];
        end
    end
end
if Mat == 0
    Stiff = @Rigidezza_Elastica; % Crea una function handle
elseif Mat == 1
    Stiff = @Rigidezza_ElastoPlastica; % Crea una function handle
end
k = Stiff(-1, 0, 0,0); % Risposta iniziale del materiale

% =====
% Scegli la storia di carico
% =====
disp('Scegli la storia di carico');
disp('1) Esponenziale di breve durata');
disp('2) Impulso di forma sinusoidale');
disp('3) Impulso rettangolare');
disp('4) Impulso triangolare decrescente');
disp('5) Carico sinusoidale periodico');
tipo = [];
while isempty(tipo)
    tipo = input('> tipo = ');
    if ~isempty(tipo)
        if tipo < 1 || tipo > 5
            disp('ATTENZIONE: opzione non prevista');
            tipo = [];
        end
    end
end
if tipo == 1
    forza = @Forza_exp; % p(t) = 544000*t*exp(-5*t); Pmax = 40000
elseif tipo == 2
    forza = @Forza_ImpSin;
elseif tipo == 3
    forza = @Forza_ImpRect;
elseif tipo == 4
```



```
forza = @Forza_ImpTri;
elseif tipo == 5
forza = @Forza_Sin;
end

disp('Scegli il tempo totale dell''analisi');
T_analisi = [];
while isempty(T_analisi)
T_analisi = input('> Tempo totale dell''analisi [sec.]: T_analisi = ');
if ~isempty(T_analisi)
if T_analisi <= 0
T_analisi = [];
end
end
end

fprintf('Tempo complessivo dell''analisi dinamica: Ttot = %.3f\n',T_analisi);

% =====
% Scegli il metodo d'integrazione
% =====
disp('Scegli il metodo d''integrazione');
disp('Meth = 1: metodo esplicito delle differenze centrali');
disp('Meth = 2: metodo implicito dell''accelerazione media costante');
disp('Meth = 3: metodo implicito dell''accelerazione lineare');
disp('Meth = 4: metodo implicito di Houbolt');
disp('Meth = 5: metodo implicito Theta di Wilson');
disp('Meth = 6: metodo implicito di Newmark');
meth = [];
while isempty(meth)
meth = input('> meth = ');
if ~isempty(meth)
if meth < 1 || meth > 6
disp('ATTENZIONE: opzione non prevista');
meth = [];
end
end
end

disp('Scegli il passo temporale d''integrazione in funzione del periodo naturale');
fprintf('Valore consigliato: dt < T/20 = %f\n',T/20);
dt = input('> Step = ');
if isempty(dt)
dt = T/20;
end
Npassi = fix(T_analisi/dt); % N. di passi necessari per completare l'analisi
fprintf('Passo temporale: dt = %.4f\n',dt);
fprintf('Numero di passi necessari: Np = %u\n',Npassi);
Tempo = 0:dt:T_analisi; % Passi temporali
p = zeros(Npassi+1,1); % Storia di carico
sStat = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: spostamenti statici

% =====
% Genera la storia di carico e la risposta del sistema come se il carico fosse applicato
% in modo statico: non si considera la non-linearità del materiale
% =====
for i = 1:Npassi+1
p(i) = forza(Tempo(i));
sStat(i) = p(i)/k; % Spostamento statico
end

[Tempo, p, s, v, a, Fs] = Integrazione_Diretta (T_analisi, Npassi, meth,...
K, M, C, forza, Stiff, s_iniz, v_iniz);

figure('Name','Storia di carico','NumberTitle','off'); hold on;
fig = gcf; fig.Position = [10 250 350 350];
plot(Tempo, p, 'b'); title('Storia di carico'); shg; hold off;

figure('Name','Risposta del sistema','NumberTitle','off');
fig = gcf; fig.Position = [400 50 500 700];
subplot(3,1,1); hold on;
plot(Tempo, sStat, '--r'); % Spostamento statico
plot(Tempo,s, 'b'); title({'Risposta del sistema';'Spostamento'});
hold off;
fprintf('Spostamento massimo: s = %.3f\n',max(s));
```



```
subplot(3,1,2); hold on;
plot(Tempo,v); title('Velocità'); hold off;
subplot(3,1,3); hold on;
plot(Tempo,a); title('Accelerazione'); shg; hold off;

figure('Name','Risposta del materiale','NumberTitle','off');
fig = gcf; fig.Position = [910 250 450 450];hold on;
plot(s,Fs); scatter(s(1),Fs(1),'g');
if Npassi <= 50
    scatter(s(2:end-1),Fs(2:end-1),'k');
end
scatter(s(end:end),Fs(end:end),'r');
shg;
if Mat == 0
    title({'Risposta del materiale elastico';'in funzione dello spostamento'});
elseif Mat == 1
    title({'Risposta del materiale elastoplastico';'in funzione dello spostamento'});
end
input('INVIO ... per continuare');
close all

% Funzioni di carico
function f = Forza_exp(tempo)
%Forza_exp Calcola la forza al tempo t
f = 544000*tempo*exp(-5*tempo);
end

function f = Forza_ImpSin(tempo)
%Forza_ImpSin Calcola la forza impulsiva sinusoidale al tempo t
global Omega
persistent t1 Pmax
if isempty(t1)
    disp('Scegli il valore del carico massimo');
    Pmax = input('> Pmax = ');
    T = 2*pi/Omega; % Periodo del sistema
    disp('Inserisci la durata t1 del carico in funzione del periodo naturale del sistema');
    r1 = input('> t1/T = ');
    t1 = r1*T;
end
if tempo <= t1
    f = Pmax*sin(Omega*tempo);
else
    f = 0;
end
end

function f = Forza_ImpRect(tempo)
%Forza_ImpRect Calcola la forza impulsiva a gradino al tempo t
global Omega
persistent t1 Pmax
if isempty(t1)
    disp('Scegli il valore del carico massimo');
    Pmax = input('> Pmax = ');
    T = 2*pi/Omega; % Periodo del sistema
    disp('Inserisci la durata t1 del carico in funzione del periodo naturale del sistema');
    r1 = input('> t1/T = ');
    t1 = r1*T;
end
if tempo <= t1
    f = Pmax;
else
    f = 0;
end
end

function f = Forza_ImpTri(tempo)
%Forza_ImpTri Calcola la forza impulsiva triangolare decrescente al tempo t
global Omega
persistent t1 Pmax coef
if isempty(t1)
    disp('Scegli il valore del carico massimo');
    Pmax = input('> Pmax = ');
    T = 2*pi/Omega; % Periodo del sistema
    disp('Inserisci la durata t1 del carico in funzione del periodo naturale del sistema');
    r1 = input('> t1/T = ');
```



```
t1 = r1*T;
coef = -Pmax/t1;
end
if tempo <= t1
    f = coef*tempo + Pmax;
else
    f = 0;
end
end

function f = Forza_Sin(tempo)
%Forza_ImpSin Calcola la forza sinusoidale al tempo t
persistent Pmax OmegaP
if isempty(Pmax)
    disp('Scegli il valore del carico massimo');
    Pmax = input('> Pmax = ');
    disp('Scegli il periodo Tp del carico esterno');
    Tp = input('> Tp = ');
    OmegaP = 2*pi/Tp; % Frequenza angolare del carico
end
f = Pmax*sin(OmegaP*tempo);
end

function [ke,F] = Rigidezza_Elastica (init, s, ~, ~)
%Rigidezza_Elastica Calcola la risposta elastica del materiale
%    s    - Spostamento attuale
%    ke   - Rigidezza del materiale elastico
%    F    - Risposta del materiale
% =====
ke = 1000000; % Rigidezza del materiale in campo elastico
if init < 0
    disp('Materiale elastico');
    fprintf('La rigidezza vale: K = %14.1f\n',ke);
end
F = ke*s;
end

function [k,F] = Rigidezza_ElastoPlastica (init, s, s_old, F_old)
%Rigidezza_ElastoPlastica Calcola la risposta elasto-plastica del materiale
%    s    - Spostamento attuale
%    k    - Rigidezza del materiale
%    F    - Risposta del materiale
%
%    s_old - Spostamento accumulato al passo precedente
%    F_old - Risposta al passo precedente
% =====
persistent Fs_max Fs_min S_pl ke % Caratteristiche del materiale
if isempty(ke) || init <= 0
    Fs_max = 30000; % Forza di snervamento a trazione [N];
    Fs_min = -30000; % Forza di snervamento a compressione [N];
    S_pl = 0.030; % Spostamento allo snervamento [metri]
    ke = Fs_max/S_pl; % Rigidezza del materiale in campo elastico
    if init < 0
        disp('Materiale elastico/plastico');
        fprintf('La rigidezza iniziale vale: K = %14.1f\n',ke);
        fprintf('La forza di snervamento a trazione: F = %14.1f\n',Fs_max);
        fprintf('La forza di snervamento a compressione: F = %14.1f\n',Fs_min);
    end
end

ds = s - s_old; % Incremento dello spostamento
F = F_old + ke*ds; % Risposta del materiale
if F > Fs_max
    F = Fs_max;
    k = 0;
elseif F < Fs_min
    F = Fs_min;
    k = 0;
else
    k = ke;
end
% fprintf('s = %14.7e F = %.3f, k = %.3f\n',s,F,k);
end
```



```
function [T, p, s, v, a, Fs] = Integrazione_Diretta (Ttot, Npassi, Meth, ...
                                                K, M, C, Forza, Stiff, s_iniz, v_iniz)
%Integrazione_Diretta Integrale dell'equazione dell'equilibrio dinamico a 1 gdl
% INPUT:
% Ttot = Tempo totale dell'analisi in secondi
% Npassi = N. di passi d'integrazione
% Meth = Metodo d'integrazione
% 1: metodo esplicito delle differenze centrali
% 2: metodo implicito dell'accelerazione media costante
% 3: metodo implicito dell'accelerazione lineare
% 4: metodo implicito di Houbolt dell'accelerazione lineare
% 5: metodo implicito Theta di Wilson
% 6: metodo implicito di Newmark
% K = Rigidezza del sistema
% M = Massa del sistema
% C = Coefficiente di smorzamento
% Forza = Funzione che fornisce il valore della forza in funzione del tempo
% Stiff = Funzione che calcola la risposta del materiale in funzione dello spostamento
% s_iniz = Spostamento all'istante iniziale
% v_iniz = Velocità all'istante iniziale
% OUTPUT
% T = vettore dei passi temporali
% p = vettore delle forze applicate in funzione del tempo
% s = vettore degli spostamenti
% v = vettore delle velocità
% a = vettore delle accelerazioni
% Fs = Risposta del materiale
% =====
if Meth == 1 % Metodo ESPLICITO delle differenze centrali
    [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Diff_Centr (Ttot, Npassi, M, C, Forza, ...
                                          Stiff, s_iniz, v_iniz);
elseif Meth == 2 % Metodo IMPLICITO dell'accelerazione media costante
    [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Acc_Cost (Ttot, Npassi, M, C, Forza, ...
                                          Stiff, s_iniz, v_iniz);
elseif Meth == 3 % Metodo IMPLICITO dell'accelerazione lineare
    [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Acc_Linear (Ttot, Npassi, M, C, Forza, ...
                                          Stiff, s_iniz, v_iniz);
elseif Meth == 4 % Metodo IMPLICITO di Houbolt
    % I primi due step sono calcolati con il metodo dell'accelerazione lineare
    dt = Ttot/Npassi;
    NStep = 2;
    [~, p, s, v, a, Fs] = Integr_Acc_Linear (2*dt, NStep, M, C, Forza, ...
                                          Stiff, s_iniz, v_iniz);

    T = 0:dt:Ttot;
    p(4:Npassi+1) = 0;
    s(4:Npassi+1) = 0;
    v(4:Npassi+1) = 0;
    a(4:Npassi+1) = 0;
    Fs(4:Npassi+1) = 0;
    [p, s, v, a, Fs] = Integr_Houbolt (Npassi, dt, M, C, Forza, Stiff, ...
                                     T, p, s, v, a, Fs);

elseif Meth == 5 % Metodo Theta di Wilson
    [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Theta_Wilson (Ttot, Npassi, M, C, Forza, ...
                                              Stiff, s_iniz, v_iniz);

elseif Meth == 6 % Metodo di Newmark
    [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Newmark (Ttot, Npassi, M, C, Forza, ...
                                         Stiff, s_iniz, v_iniz);
end
end

function [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Diff_Centr (Ttot, Npassi, M, C, ...
                                                Forza, Stiff, s_iniz, v_iniz)
%Integr_Diff_Centr Metodo delle Differenze Centrali
% Metodo esplicito condizionatamente stabile: Dt < T/3.14
% INPUT:
% Ttot = Tempo totale dell'analisi in secondi
% Npassi = N. di passi d'integrazione
% M = Massa del sistema
% C = Coefficiente di smorzamento
% Forza = Funzione che fornisce il valore della forza in funzione del tempo
% Stiff = Funzione che calcola la risposta del materiale in funzione dello spostamento
% s_iniz = Spostamento all'istante iniziale
% v_iniz = Velocità all'istante iniziale
```



```
% OUTPUT
%
% T = vettore dei passi temporali
% p = vettore delle forze applicate in funzione del tempo
% s = vettore degli spostamenti
% v = vettore delle velocità
% a = vettore delle accelerazioni
% Fs = Risposta del materiale
%
% =====
global Omega % Frequenza naturale del sistema
Periodo = 2*pi/Omega; % Periodo naturale del sistema
dt = Ttot/Npassi; % Passo temporale d'integrazione;
if dt > Periodo/pi
    disp('ATTENZIONE: il Metodo delle Differenze Centrali e'' Condizionatamente stabile');
    fprintf('Il passo d''integrazione deve essere inferiore a %f [sec]\n',Periodo/pi);
    fprintf('E'' stato scelto un passo piu'' lungo pari a: dt = %f [sec]\n',dt);
    yn = [];
    while size(yn,1) == 0
        yn = input('Si desidera comunque continuare [y/n] ?','s');
        if size(yn,1) > 0 && (yn ~= 'Y' || yn ~= 'y' || yn ~= 'S' || yn ~= 's')
            return;
        end
    end
end
end

T = 0:dt:Ttot; % Vettore dei passi di calcolo
p = zeros(Npassi+1,1); % Storia di carico
s = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: spostamenti
v = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: velocità
a = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: accelerazione
Fs = zeros(Npassi+1,1); % Risposta del materiale

s(1) = s_iniz;
v(1) = v_iniz;
[~, Fs(1)] = Stiff(0, s(1), s(1), 0); % Risposta del materiale al tempo t = 0
p(1) = Forza(T(1));
a(1) = (p(1) - C*v(1) - Fs(1))/M; % Accelerazione all'istante iniziale

a0 = 1/(dt)^2; a1 = 1/(2*dt); a2 = 2*a0; a3 = 1/a2; % Costanti d'integrazione
sml = s(1) - dt*v(1) + a3*a(1); % Stima dello spostamento al tempo -dt
Fm1 = 0;
for i = 1:Npassi
    t = T(i);
    meq = a0*M + a1*C; % Massa equivalente (in teoria C potrebbe variare col tempo)
    [~, Fs(i)] = Stiff(1, s(i), sml, Fm1); % Risposta del materiale al tempo t
    p(i) = Forza(t);
    feq = p(i) - Fs(i) + a2*M*s(i) - (a0*M - a1*C)*sml; % Forza equivalente
    s(i+1) = feq/meq;
    a(i) = a0*(s(i+1) - 2*s(i) + sml);
    v(i) = a1*(s(i+1) - sml);
    sml = s(i);
    Fm1 = Fs(i);
end
a(Npassi+1) = a0*(s(Npassi+1) - 2*s(Npassi) + s(Npassi-1));
v(Npassi+1) = a1*(s(Npassi+1) - s(Npassi-1));
p(Npassi+1) = Forza(t+dt);
[~, Fs(Npassi+1)] = Stiff(1, s(Npassi+1), s(Npassi), Fs(Npassi));
end

function [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Acc_Cost (Ttot, Npassi, M, C, ...
                                             Forza, Stiff, s_iniz, v_iniz)
%Integr_Acc_Cost Metodo dell'accelerazione media costante
% Metodo esplicito condizionatamente stabile
% INPUT:
% Ttot = Tempo totale dell'analisi in secondi
% Npassi = N. di passi d'integrazione
% M = Massa del sistema
% C = Coefficiente di smorzamento
% Forza = Funzione che fornisce il valore della forza in funzione del tempo
% Stiff = Funzione che calcola la risposta del materiale in funzione dello spostamento
% s_iniz = Spostamento all'istante iniziale
% v_iniz = Velocità all'istante iniziale
% OUTPUT
% T = vettore dei passi temporali
% p = vettore delle forze applicate in funzione del tempo
% s = vettore degli spostamenti
```



```
%      v = vettore delle velocità
%      a = vettore delle accelerazioni
%      Fs = Risposta del materiale
% =====
dt = Ttot/Npassi;      % Passo temporale d'integrazione;
T = 0:dt:Ttot;        % Vettore dei passi di calcolo
p = zeros(Npassi+1,1); % Storia di carico
s = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: spostamenti
v = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: velocità
a = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: accelerazione
Fs = zeros(Npassi+1,1); % Risposta del materiale

dt2 = dt^2;
tol = sqrt(eps);
s(1) = s_iniz;
v(1) = v_iniz;
[~, Fs(1)] = Stiff(0, s(1), s(1), 0); % Risposta del materiale al tempo t = 0
p(1) = Forza(T(1));
a(1) = (p(1) - C*v(1) - Fs(1))/M; % Accelerazione all'istante iniziale
keq = 4*M/dt2 + 2*C/dt;
for i = 1:Npassi
    t = T(i);
    p(i) = Forza(t);
    f = p(i) + M*(4*s(i)/dt2 + 4*v(i)/dt + a(i)) + C*(2*s(i)/dt + v(i)); % Forza equivalente
    s(i+1) = s(i);
    err = 1;
%   fprintf('i = %u\n',i);
    while err > tol
        stest = s(i+1);
        [k, Fs(i+1)] = Stiff(1, stest, s(i), Fs(i)); % Risposta del materiale al tempo t
%       fprintf(' s_test = %f, Fs = %f, k = %f',stest, Fs(i), k);
        feq = f - Fs(i+1);
        s(i+1) = feq/keq;
        err = abs(s(i+1)-stest);
%       fprintf(' s(i+1) = %f, err = %f\n',s(i+1), err);
    end
%   input('INVIO per continuare ...');
    v(i+1) = 2*(s(i+1) - s(i))/dt - v(i);
    a(i+1) = 4*(s(i+1) - s(i))/dt2 - 4*v(i)/dt - a(i);
end
% for i = 1:Npassi
%     ds = s(i+1) - s(i);
%     dF = Fs(i+1) - Fs(i);
%     k = dF/ds;
%     fprintf('i = %u ds = %f dF = %f k = %f\n',i,ds,dF,k);
% end
end

function [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Acc_Linear (Ttot, Npassi, M, C, ...
                                                Forza, Stiff, s_iniz, v_iniz)
%Integr_Acc_Linear % Metodo esplicito condizionatamente stabile
%                  dell'accelerazione lineare
% =====
dt = Ttot/Npassi;      % Passo temporale d'integrazione;
T = 0:dt:Ttot;        % Vettore dei passi di calcolo
p = zeros(Npassi+1,1); % Storia di carico
s = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: spostamenti
v = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: velocità
a = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: accelerazione
Fs = zeros(Npassi+1,1); % Risposta del materiale

dt2 = dt^2;
tol = sqrt(eps);
s(1) = s_iniz;
v(1) = v_iniz;
[~, Fs(1)] = Stiff(0, s(1), s(1), 0); % Risposta del materiale al tempo t = 0
p(1) = Forza(T(1));
a(1) = (p(1) - C*v(1) - Fs(1))/M; % Accelerazione all'istante iniziale
keq = 6*M/dt2 + 3*C/dt;
for i = 1:Npassi
    t = T(i);
    p(i) = Forza(t);
    f = p(i) + M*(6*s(i)/dt2 + 6*v(i)/dt + 2*a(i)) + C*(3*s(i)/dt + 2*v(i) + dt*a(i)/2); % Forza
equivalente
    s(i+1) = s(i);
```



```
err = 1;
while err > tol
    stest = s(i+1);
    [k, Fs(i+1)] = Stiff(1, stest, s(i), Fs(i)); % Risposta del materiale al tempo t
    feq = f - Fs(i+1);
    s(i+1) = feq/keq;
    err = abs(s(i+1)-stest);
end
v(i+1) = 3*(s(i+1) - s(i))/dt - 2*v(i) - dt*a(i)/2;
a(i+1) = 6*(s(i+1) - s(i))/dt2 - 6*v(i)/dt - 2*a(i);
end
end

function [p, s, v, a, Fs] = Integr_Houbolt (Npassi, dt, M, C, Forza, ...
    Stiff, T, p, s, v, a, Fs)
%Integr_Houbolt Metodo implicito di Houbolt dell'accelerazione lineare
%
% I primi due passi sono già stati calcolati
%=====
tol = sqrt(eps);
dt2 = dt^2;
keq = 2*M/dt2 + 11*C/(6*dt); % Rigidezza equivalente
for i = 3:Npassi
    t = T(i);
    p(i) = Forza(t);
    f = p(i) + M*(s(i-2) - 4*s(i-1) + 5*s(i))/dt2 + ...
        C*(2*s(i-2) - 9*s(i-1) + 18*s(i))/(6*dt);
    s(i+1) = s(i); % Stima dello spostament al passo i+1
    err = 1;
    while err > tol
        stest = s(i+1);
        [k, Fs(i)] = Stiff(1, stest, s(i), Fs(i-1)); % Risposta del materiale al tempo t
        feq = f - Fs(i);
        s(i+1) = feq/keq;
        err = abs(s(i+1)-stest);
    end
    v(i+1) = (-2*s(i-2) + 9*s(i-1) - 18*s(i) + 11*s(i+1))/(6*dt);
    a(i+1) = (-s(i-2) + 4*s(i-1) - 5*s(i) + 2*s(i+1))/dt2;
end
end

function [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Theta_Wilson (Ttot, Npassi, M, C, ...
    Forza, Stiff, s_iniz, v_iniz)
%Integr_Theta_Wilson Metodo implicito Theta di Wilson
%=====
dt = Ttot/Npassi; % Passo temporale d'integrazione;
T = 0:dt:Ttot; % Vettore dei passi di calcolo
p = zeros(Npassi+1,1); % Storia di carico
s = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: spostamenti
v = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: velocità
a = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: accelerazione
Fs = zeros(Npassi+1,1); % Risposta del materiale

s(1) = s_iniz;
v(1) = v_iniz;
[~, Fs(1)] = Stiff(0, s(1), s(1), 0); % Risposta del materiale al tempo t = 0
p(1) = Forza(T(1));
a(1) = (p(1) - C*v(1) - Fs(1))/M; % Accelerazione all'istante iniziale
tol = sqrt(eps);

% =====
% Scegli il parametro Theta
% =====
disp('Metodo d''integrazione Theta di Wilson');
disp('Scegli il valore del parametro Theta (meglio se > 1.37)');
disp('Se Theta = 1 --> Metodo dell''accelerazione lineare');
disp('Il valore consigliato e': Theta = 1.4');
Theta = 0;
while Theta < 1 || Theta > 1.5
    Theta = input('> Theta = ');
    if isempty(Theta)
        Theta = 1.4; % Valore di default
    end
end
end
fprintf('Theta = %f\n',Theta);
```



```
Tdt = Theta*dt;
Tdt2 = Tdt^2; dt2 = dt^2;
keq = 6*M/Tdt2 + 3*C/Tdt; % Rigidezza equivalente
for i = 1:Npassi
    p(i) = Forza(T(i));
    p(i+1) = Forza(T(i+1));
    F_Theta = p(i) + Theta*(p(i+1)-p(i));
    f = F_Theta + M*(6*s(i)/Tdt2 + 6*v(i)/Tdt + 2*a(i)) + ...
        C*(3*s(i)/Tdt + 2*v(i) + Tdt*a(i)/2);

    s(i+1) = s(i);
    err = 1;
    while err > tol
        stest = s(i+1);
        [k, Fs(i+1)] = Stiff(1, stest, s(i), Fs(i)); % Risposta del materiale
        feq = f - Fs(i+1);
        s_Theta = feq/keq;
        a_Theta = 6*(s_Theta-s(i))/Tdt2 - 6*v(i)/Tdt - 2*a(i);
        da = (a_Theta - a(i))/Theta;
        a(i+1) = da + a(i);
        v(i+1) = dt*da/2 + a(i)*dt + v(i);
        s(i+1) = da*dt2/6 + a(i)*dt2/2 + dt*v(i) + s(i);
        err = abs(s(i+1)-stest);
    end
end
end

function [T, p, s, v, a, Fs] = Integr_Newmark (Ttot, Npassi, M, C, Forza, ...
                                             Stiff, s_iniz, v_iniz)

%Integr_Newmark Metodo implicito di Newmark
%=====
dt = Ttot/Npassi; % Passo temporale d'integrazione;
T = 0:dt:Ttot; % Vettore dei passi di calcolo
p = zeros(Npassi+1,1); % Storia di carico
s = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: spostamenti
v = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: velocità
a = zeros(Npassi+1,1); % Risposta nel tempo: accelerazione
Fs = zeros(Npassi+1,1); % Risposta del materiale

tol = sqrt(eps);
dt2 = dt^2;
s(1) = s_iniz;
v(1) = v_iniz;
[~, Fs(1)] = Stiff(0, s(1), s(1), 0); % Risposta del materiale al tempo t = 0
p(1) = Forza(T(1));
a(1) = (p(1) - C*v(1) - Fs(1))/M; % Accelerazione all'istante iniziale

% =====
% Scegli i parametri Delta e Alfa
% =====
disp('Metodo d'integrazione di Newmark');
disp('Scegli il valore dei parametri Delta e Alfa');
disp('Se Delta = 1/2 e Alfa = 1/6 --> Metodo dell''accelerazione lineare');
disp('Se Delta = 1/2 e Alfa = 1/4 --> Metodo dell''accelerazione media costante');
disp('Delta deve essere >= 1/2');
disp('I valori consigliati sono: Delta = 1/2 e Alfa = 1/4');
Delta = 0;
while Delta < 0.5
    Delta = input('> Delta = ');
    if isempty(Delta)
        Delta = 0.5; % Valore di default
    end
end
end
fprintf('Delta = %f\n',Delta);

AlfaOpt = ((0.5 + Delta)^2)/4;
fprintf('Alfa deve essere maggiore o uguale a %f\n',AlfaOpt);
Alfa = 0;
while Alfa < AlfaOpt
    Alfa = input('> Alfa = ');
    if isempty(Alfa)
        Alfa = AlfaOpt; % Valore di default
    end
end
end
fprintf('Alfa = %f\n',Alfa);
```



```
c1 = (1-2*Alfa)/(2*Alfa);
c2 = (Delta - Alfa)/Alfa;
c3 = (Delta - 2*Alfa)*dt/(2*Alfa);
keq = M/(Alfa*dt2) + Delta*C/(Alfa*dt); % Rigidezza equivalente
for i = 1:Npassi
    p(i+1) = Forza(T(i+1));
    f = p(i+1) + M*(s(i)/(Alfa*dt2) + v(i)/(Alfa*dt) + c1*a(i)) + ...
        C*(Delta*s(i)/(Alfa*dt) + c2*v(i) + c3*a(i));
    s(i+1) = s(i);
    err = 1;
    while err > tol
        stest = s(i+1);
        [k, Fs(i+1)] = Stiff(1, stest, s(i), Fs(i)); % Risposta del materiale
        feq = f - Fs(i);
        s(i+1) = feq/keq;
        err = abs(s(i+1)-stest);
    end
    a(i+1) = (s(i+1) - s(i))/(Alfa*dt2) - v(i)/(Alfa*dt) - c1*a(i);
    v(i+1) = v(i) + ((1-Delta)*a(i) + Delta*a(i+1))*dt;
end
end
```