

Esercizi per il Corso di ALGEBRA SUPERIORE

Quiz I aprile 2021

Si indichi se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Sia A un anello commutativo. Se, per ogni f e g in $A[x]$, $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$, allora $A[x]$ è un dominio.

Vera: se f e g sono elementi di $A[x]$ diversi da zero, allora $\deg(f) \geq 0$ e $\deg(g) \geq 0$. Quindi $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \geq 0$ e, quindi, $fg \neq 0$.

2. Sia A un dominio fattoriale e $I \neq 0$ un ideale di A . Allora A/I è un dominio se e solo se A/I è un campo.

Falsa: Per esempio $A = \mathbb{Z}[x]$, $I = \langle x \rangle$, $A/I \cong \mathbb{Z}$ è un dominio, ma \mathbb{Z} non è un campo.

3. Il polinomio $2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

Vera: Il polinomio $f = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ è un polinomio primitivo in $\mathbb{Z}[x]$ (i suoi coefficienti sono coprimi). Scegliamo il primo $p = 3$ e consideriamo la riduzione modulo 3, cioè l'omomorfismo canonico $\pi: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_3[x]$. Chiaramente $\pi(f) = 2x^3 - 2x + 5 = 2x^3 - 2x + 2$. Siccome 3 è coprimo con il coefficiente direttivo (in questo caso, 2), allora il Lemma 1.26 ci dice che se $\pi(f)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$ allora f è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$. Siccome $\pi(f)$ ha grado 3 e non ha radici in \mathbb{Z}_3 , allora $\pi(f)$ è irriducibile e, quindi, f è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$. Di conseguenza, per il Teorema 1.29, f è irriducibile su \mathbb{Q} .

4. Se p è un elemento primo in \mathbb{Z} , allora p è un elemento primo nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

Falso: Per esempio 2 è primo in \mathbb{Z} ma $2 = (1+i)(1-i)$ in $\mathbb{Z}[i]$ (e, sapendo che $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio euclideo, gli elementi primi coincidono con gli elementi irriducibili). Si osservi anche che $(1+i)$ e $(1-i)$ non sono invertibili.

5. Siano \mathbb{K} e \mathbb{F} due campi e $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$ un'omomorfismo non nullo. Allora il sottocampo fondamentale di \mathbb{K} è isomorfo al sottocampo fondamentale di \mathbb{F} .

Vera: Siccome $f \neq 0$, allora f è un'omomorfismo iniettivo. In particolare, $\text{Im}(f)$ è un campo isomorfo a \mathbb{K} e, quindi, $\text{Im}(f)$ contiene il sottocampo fondamentale di \mathbb{F} . Allora il sottocampo fondamentale di \mathbb{F} è il sottocampo fondamentale di $\text{Im}(f)$ ed è, quindi, isomorfo al sottocampo fondamentale di \mathbb{K} .

6. Sia \mathbb{F} il campo di riducibilità completa di un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ di grado 3. Supponiamo che \mathbb{F} sia contenuto nel campo dei numeri costruibili. Allora f ha almeno una radice razionale.

Vera: Sia α una radice di f in \mathbb{F} . Se f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$, allora f è il polinomio minimo di α . Ma siccome α è costruibile, il grado del suo polinomio minimo su \mathbb{Q} è una potenza di 2. Quindi f è riducibile. Siccome f ha grado 3, allora f ha una radice su \mathbb{Q} .

Si scelga l'unica risposta giusta fra le opzioni.

7. Sia A un dominio a ideali principali e siano p, q e r elementi irriducibili distinti in A , diversi tra loro. L'ideale $\langle pq \rangle \cap \langle qr \rangle$ è

- (a) A
- (b) $\langle pqr \rangle$
- (c) $\langle pq^2r \rangle$
- (d) $\langle q \rangle$
- (e) $\{0\}$

$\langle pqr \rangle$. Siccome A è un dominio a ideali principali, abbiamo che $\langle pq \rangle \cap \langle qr \rangle$ è l'ideale generato dal minimo comune multiplo di pq e qr . Siccome ogni dominio a ideali principali è un dominio fattoriale, e p, q e r sono distinti, allora il minimo comune multiplo di pq e qr è pqr .

8. Quale dei seguenti anelli è un dominio?

- (a) $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$
- (b) $\mathbb{Z}[x]/\langle 2x + 2 \rangle$
- (c) $\mathbb{R}[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$
- (d) $\mathbb{Z}_7[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$
- (e) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$

$\mathbb{Z}_7[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$. Tutti gli anelli della forma $A[x]$ dove A è un dominio fattoriale, sono ancora domini fattoriali. Quindi basta determinare quali degli ideali indicati è primo. Siccome ognuno degli ideali è principale, basta verificare se il suo generatore è un elemento primo. Elementi primi in domini fattoriali sono precisamente gli elementi irriducibili. $x^2 - 1$ ha due radici su \mathbb{Q} ; $2x + 2$ si scompone in $\mathbb{Z}[x]$ come il prodotto $2(x + 1)$; $x^3 + x + 1$, essendo un polinomio di grado 3 su \mathbb{R} ha necessariamente una radice reale; la classe di 2 in \mathbb{Z}_5 è uno zero di $x^2 + 1$. Quindi l'unica ipotesi che resta è $\mathbb{Z}_7[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$. Siccome $x^2 + 1$ ha grado 2, per verificare che è irriducibile basta verificare che non ha zeri in \mathbb{Z}_7 . Chiaramente i quadrati degli elementi di \mathbb{Z}_7 sono 0, 1, 4 e 2 quindi non esiste nessun elemento di cui il quadrato sia $-1 = 6$.

9. Sia A un dominio di integrità e \mathbb{K} il suo campo dei quozienti. Ogni polinomio in $\mathbb{K}[x]$ è associato in $\mathbb{K}[x]$ a

- (a) un polinomio monico contenuto in $A[x]$.
- (b) un polinomio primitivo contenuto in $A[x]$.
- (c) un polinomio irriducibile in $A[x]$.
- (d) un polinomio primo in $A[x]$.
- (e) un polinomio invertibile in $A[x]$.

Un polinomio primitivo contenuto in $A[x]$. Infatti, dato un polinomio f in $\mathbb{K}[x]$ possiamo prendere il minimo comune multiplo m dei denominatori dei suoi coefficienti. Chiaramente $mf \sim f$ e $mf \in A[x]$. Per finire, si osservi che $mf = \text{cont}(mf)g$ dove g è un polinomio primitivo in $A[x]$. Allora, siccome $\text{cont}(mf)$ è invertibile in \mathbb{K} , abbiamo che $mf \sim g$ e, quindi, $f \sim g$ in $\mathbb{K}[x]$.

10. Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ un'estensione di campi di grado 2 e sia $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{K}$. Quale delle seguenti affermazioni non è necessariamente vera?

- (a) Il polinomio minimo di α su \mathbb{K} ha grado 2;
- (b) α è algebrico su \mathbb{K} ;
- (c) $\{1, \alpha\}$ è una base di \mathbb{F} su \mathbb{K} ;
- (d) $\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{F}$;
- (e) α^2 appartiene a \mathbb{K} .

α^2 appartiene a \mathbb{K} . Infatti, prendiamo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\alpha = 1 + \sqrt{2}$. Chiaramente $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ non appartiene a \mathbb{K} . Vediamo che le altre opzioni sono sempre vere. Se α appartiene a $\mathbb{F} \setminus \mathbb{K}$, allora $\mathbb{K}(\alpha)$ è un'estensione non banale di \mathbb{K} contenuta in \mathbb{F} . Siccome $[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = 2$, allora dal teorema dei gradi segue che $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = 2$, $\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{F}$, $\{1, \alpha\}$ è una base di $\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{F}$ su \mathbb{K} e il polinomio minimo di α su \mathbb{K} ha grado 2.

11. Sia \mathbb{F} il campo di radici completa su \mathbb{Q} di un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ irriducibile di grado 3. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera, indipendentemente dalla scelta di f ?

- (a) $[\mathbb{F} : \mathbb{Q}] \leq 3$.
- (b) f non ha radici reali.
- (c) $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$.
- (d) Il numero di omomorfismi $\varphi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ tali che $\varphi(a) = a$ per ogni a in \mathbb{Q} è minore o uguale a 6.
- (e) $\mathbb{F}[x]/\langle f \rangle$ è un campo.

Il numero di omomorfismi $\varphi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ tali che $\varphi|_{\mathbb{K}} = \text{id}$ è minore o uguale a 6. Infatti, abbiamo dal teorema 2.13 che tale numero è minore o uguale a $[\mathbb{F} : \mathbb{K}]$, e questo è minore o uguale a $3! = 6$.

12. Sia \mathbb{F} il campo con 4 elementi. Quanti polinomi monici e irriducibili di grado 2 ci sono in $\mathbb{F}[x]$?

- (a) 8
- (b) 0
- (c) 6
- (d) 4
- (e) 10

6. Contiamo quanti polinomi monici riducibili di grado 2 ci sono in $\mathbb{F}[x]$. Un polinomio è monico e riducibile di grado 2 in $\mathbb{F}[x]$ se e solo se è il prodotto di due polinomi monici della forma $x - \alpha$, dove α appartiene a \mathbb{F} . Quindi ci sono 4 polinomi riducibili della forma $(x - \alpha)^2$ (uno per ogni α in \mathbb{F}) e altri 6 (coefficiente binomiale $\binom{4}{2}$) della forma $(x - \alpha)(x - \beta)$ dove $\alpha \neq \beta$ sono elementi di \mathbb{F} . Siccome il totale dei polinomi monici in $\mathbb{F}[x]$ sono $16 = 1 \times 4 \times 4$, allora ci sono $6 = 16 - (4 + 6)$ polinomi irriducibili su $\mathbb{F}[x]$.