

Esercitazione di Analisi e Controllo dei Sistemi Multivariabili – n°3

1. Si consideri il modello matematico nonlineare per un serbatoio con geometria arbitraria

$$\dot{h}_i(t) = f_i(t) = \frac{1}{A_i(h_i(t))} \cdot (q_i(t) - C_i \cdot \sqrt{h_i(t)}) \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

dove C_i rappresenta la resistenza di uscita del foro (supposta costante) e $A_i(h_i(t))$ la sezione trasversale del serbatoio. Riferendoci alla geometria dei serbatoi del sistema “3-Tank” riportato nella figura, si ha:

$$\begin{cases} A_1 &= a \cdot w \\ A_2(h_2(t)) &= w \cdot \left(c + \frac{b}{H_{2M}} \cdot h_2(t) \right) \\ A_3(h_3(t)) &= w \cdot \sqrt{R^2 - (R - h_3(t))^2} \end{cases} \quad (2)$$

ed ipotizzando un flusso di portata costante ($q_i(t) = q_i$) tale da evitare traboccamenti si richiede di:

- Valutare le condizioni di equilibrio e le relative proprietà di stabilità utilizzando il *Metodo Diretto di Lyapunov* per ciascuno dei tre serbatoi.
2. Con riferimento al modello nonlineare del sistema “3-Tank” descritto nell’eq. (3) utilizzando come variabili di stato i livelli dei serbatoi

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{h}(t), q), \quad \mathbf{h}(t) = [h_1(t), h_2(t), h_3(t)]^T \in \mathbb{R}^3, \quad q(t) \in \mathbb{R} \quad (3)$$

con

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(h_1(t), q) \\ f_2(h_1(t), h_2(t)) \\ f_3(h_2(t), h_3(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \cdot (q(t) - C_1 \cdot \sqrt{h_1(t)}) \\ \frac{1}{A_2(h_2(t))} \cdot (C_1 \cdot \sqrt{h_1(t)} - C_2 \cdot \sqrt{h_2(t)}) \\ \frac{1}{A_3(h_3(t))} \cdot (C_2 \cdot \sqrt{h_2(t)} - C_3 \cdot \sqrt{h_3(t)}) \end{bmatrix}$$

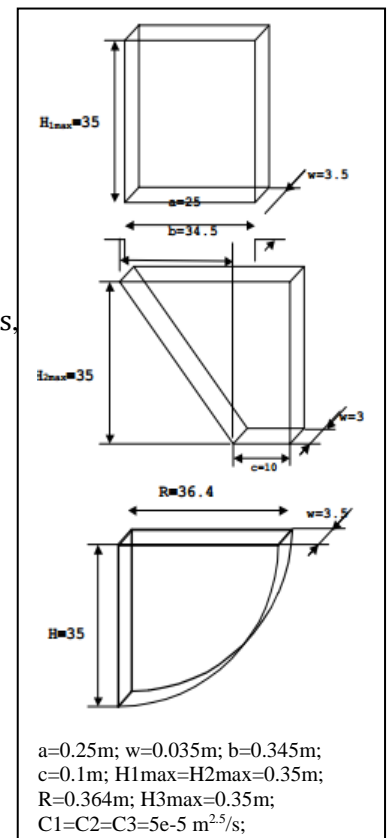
Si richiede di:

- Ipotizzando il flusso di portata costante e pari a $q(t) = q = 2 \cdot 10^5 \text{ mc/s}$, valutare le condizioni di equilibrio del sistema e le relative proprietà di stabilità utilizzando il *Metodo Indiretto di Lyapunov*
- Argomentare sotto quali condizioni, e.g. flusso di portata $q(t)$ e coefficienti dissipativi delle valvole C_i , i seguenti i punti dello spazio di stato possano essere punti di equilibrio per il sistema “3-Tank”:

$$\bar{\mathbf{h}}_a = [0.28 \ 0.28 \ 0.28]^T$$

$$\bar{\mathbf{h}}_b = [0.16 \ 0.18 \ 0.16]^T$$

- Ipotizzando al tempo $t = t_0$ il sistema sul punto di equilibrio $\mathbf{h}_e = \bar{\mathbf{h}}_a$ e di interrompere bruscamente il flusso di portata ($q(t) = 0, \forall t \geq t_0$), valutare quanto tempo dovrà trascorrere affinché il primo serbatoio risulti completamente vuoto;



Traccia Soluzione

1. Sotto l'ipotesi di flusso a portata costante ($q_i(t) = q_i$) è possibile riscrivere il sistema (1) come

$$\dot{h}_i(t) = f_i(t) = \frac{1}{A_i(h_i(t))} \cdot (q_i - C_i \cdot \sqrt{h_i(t)}) \quad (3)$$

e trattarlo come se fosse un sistema autonomo in quanto un ingresso costante implica solo una variazione del punto di equilibrio del sistema.

Dalla (4) si nota come il sistema “serbatoio” presenti un solo punto di equilibrio in

$$\dot{h}_i(t) = f_i(t) = 0 \rightarrow h_{e,i} = \left(\frac{q_i}{C_i}\right)^2 \quad (4)$$

È facile notare come il punto di equilibrio dipenda esclusivamente da quanta portata entra e quanta portata il serbatoio è in grado di espellere dal foro. I coefficienti C_i rappresentano la “resistenza di uscita del foro” e sono definiti come:

$$C_i = A_F \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} > 0 \quad (5)$$

dove A_F rappresenta l'area del foro di uscita, μ il coefficiente di efflusso e g la costante gravitazionale.

Al fine di valutare la stabilità del punto di equilibrio eseguiamo una traslazione rigida dell'origine dello spazio di stato sul punto di equilibrio trovato:

$$\delta h_i(t) = h_i(t) - h_{e,i} \quad (6)$$

Poiché la stabilità di un punto di equilibrio può essere studiata come la stabilità dell'origine a seguito di una traslazione rigida, andremo semplicemente a valutare la stabilità dell'origine $\delta h_i(t) = 0$ per il seguente sistema:

$$\dot{\delta h}_i(t) = \dot{h}_i(t) - \dot{h}_{e,i} = f_i(t) - 0 = \frac{1}{A_i(\delta h_i(t))} \cdot (q_i - C_i \cdot \sqrt{h_{e,i} + \delta h_i(t)}) \quad (7)$$

Al fine di valutare la stabilità di $h_{e,i}$ con il criterio diretto di Lyapunov, si propone la seguente forma quadratica come funzione di Lyapunov candidata:

$$V_i(\delta h_i(t)) = \frac{1}{2} \cdot \delta h_i(t)^2 \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

dalla quale derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{V}_i(t) = \delta h_i \cdot \dot{\delta h}_i(t) = \delta h_i(t) \cdot f_i(t) = \frac{\delta h_i(t)}{A_i(\delta h_i(t))} \cdot (q_i - C_i \cdot \sqrt{h_{e,i} + \delta h_i(t)}) \quad (9)$$

A questo punto per dimostrare la stabilità del punto di equilibrio dobbiamo dimostrare la definitezza negativa della (9). A tal fine possiamo notare come per $\delta h_i(t) > 0$ la $V_i(t)$ risulta definita negativa in quanto dalla (4) risulta $q_i = C_i \cdot \sqrt{h_{e,i}}$ e di conseguenza si dimostra che $V_i(t) < 0$

$$\dot{V}_i(t) = \frac{|\delta h_i(t)|}{A_i(\delta h_i(t))} \cdot (C_i \sqrt{h_{e,i}} - C_i \cdot \sqrt{h_{e,i} + |\delta h_i(t)|}) < 0 \quad (10)$$

alla stessa maniera si nota come per $\delta h_i < 0$ la $V_i(t)$ risulta ancora definita negativa

$$\dot{V}_i(t) = -\frac{|\delta h_i(t)|}{A_i(\delta h_i(t))} \cdot (C_i \sqrt{h_{e,i}} - C_i \cdot \sqrt{h_{e,i} - |\delta h_i(t)|}) < 0 \quad (11)$$

Abbiamo quindi dimostrato che il punto di equilibrio $h_{e,i}$ per ciascuno dei serbatoi $i = 1, 2, 3$ è localmente asintoticamente stabile in quanto esiste una funzione di Lyapunov con derivata definita negativa. Inoltre, essendo tale punto di equilibrio unico tale punto risulta globalmente asintoticamente stabile. A conferma di ciò possiamo notare come la $V_i(\delta h_i(t)) \rightarrow \infty$ per $\|\delta h_i(t)\| \rightarrow \infty$ ovvero la $V_i(\delta h_i(t))$ è “radially unbounded” (radialmente illimitata) e quindi a prescindere da quanto il livello

del serbatoio possa essere lontano dal livello di equilibrio $\delta h_i(t) \rightarrow \infty$ comunque il sistema si porterà sempre sul punto di equilibrio.

Facciamo notare però come nella pratica se riempiamo un serbatoio, questo raggiungerà il suo equilibrio in tempo finito e non asintoticamente. Questo vuol dire probabilmente la nostra $\dot{V}_i(t)$ potrà essere maggiorata da una funzione del tipo:

$$\dot{V}_i(t) \leq -\mu \cdot V_i(t)^\alpha \quad \text{con } \alpha < 1 \text{ e } \mu > 0 \quad (12)$$

Dalla (8) possiamo notare che la $V_i(t)$ è una funzione di quadratica di $\delta h_i(t)$ (ordine 2), mentre dalla (9) notiamo come la $\dot{V}_i(t)$ sia una funzione di ordine 1.5 rispetto a $\delta h_i(t)$, ovvero:

$$\dot{V}_i(t) = -\frac{\delta h_i(t)}{A_i(\delta h_i(t))} \cdot \left(q - C_i \cdot \sqrt{h_{e,i} - |\delta h_i(t)|} \right) \leq \frac{z_1 \delta h_i(t) + z_2 \delta h_i(t)^{1.5}}{\delta h_i^x}$$

con z_1, z_2 costanti da definire ed x ordine della sezione del serbatoio $A_i(\delta h_i(t))$ rispetto a $\delta h_i(t)$ e pari a 0 per il primo serbatoio ed 1 per il secondo ed il terzo. Per cui riscrivendo il tutto in funzione di $V(t)$ e considerando il caso peggiore (ovvero quello con $x = 0$) otteniamo che

$$\dot{V}_i(t) \leq z_1 \delta h_i(t) + z_2 \delta h_i(t)^{1.5} = z_1 V_i(t)^{0.5} + z_2 V_i(t)^{0.75} < -\mu \cdot V(t)^\alpha \quad \text{con } \alpha > 0.75 \quad (14)$$

Dalla quale immediatamente si dimostra la stabilità in tempo finito del punto di equilibrio per tutti e tre i serbatoi senza alcun calcolo aggiuntivo.

2. Valutiamo ora la stabilità per i punti di equilibrio del sistema complesso “3-Tank”. Sotto l’ipotesi di flusso a portata costante ($q(t) = q = 5 \cdot 10^{-5}$) il punto di equilibrio del sistema (3) risulta essere ancora unico e posizionato in:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{h}_e, q) = 0, \quad \mathbf{h}_e = [h_{e,1}, h_{e,2}, h_{e,3}]^T &= \left[\left(\frac{q}{C_1} \right)^2, \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 \cdot h_{e,1}, \left(\frac{C_2}{C_3} \right)^2 \cdot h_{e,2} \right]^T \\ &= \left[\left(\frac{q}{C_1} \right)^2, \left(\frac{q}{C_2} \right)^2, \left(\frac{q}{C_3} \right)^2 \right]^T = [0.16, 0.16, 0.16]^T \end{aligned}$$

ovviamente anche in questo caso l’equilibrio dipende esclusivamente dalla dimensione dell’orifizio di scarico e dalla portata in ingresso di ciascun serbatoio.

Al fine di valutare la stabilità di tale punto di equilibrio applicando il criterio indiretto di Lyapunov, ovvero linearizzando attorno al punto di equilibrio, si ottiene che

$$\frac{d(\mathbf{h}_e + \delta \mathbf{h}(t))}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{h}_e + \delta \mathbf{h}(t))$$

Inoltre, ricordando che $\frac{d\mathbf{h}_e}{dt} = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} \delta \dot{f}_1 = f_1(h_{e,1} + \delta h_1(t)) \\ \delta \dot{f}_2 = f_2(h_{e,1} + \delta h_1(t), h_{e,2} + \delta h_2(t)) \\ \delta \dot{f}_3 = f_3(h_{e,2} + \delta h_2(t), h_{e,3} + \delta h_3(t)) \end{cases}$$

A questo punto sviluppando in serie di Taylor e otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \delta \dot{f}_1 = f_1(h_{e,1}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial h_1} \right|_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta h_1(t) + H.O.Term \\ \delta \dot{f}_2 = f_2(h_{e,1}, h_{e,2}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial h_1} \right|_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta h_1(t) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \right|_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta h_2(t) + H.O.Term \\ \delta \dot{f}_3 = f_3(h_{e,2}, h_{e,3}) + \left. \frac{\partial f_3}{\partial h_2} \right|_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta h_2(t) + \left. \frac{\partial f_3}{\partial h_3} \right|_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta h_3(t) + H.O.Term \end{cases}$$

Ma essendo $f_i(\mathbf{h}_e) = 0$ e trascurando gli ordini superiori otteniamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{f}_1(t) \\ \delta \dot{f}_2(t) \\ \delta \dot{f}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_3}{\partial h_2} & \frac{\partial f_3}{\partial h_3} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}_e} \cdot \begin{bmatrix} \delta h_1(t) \\ \delta h_2(t) \\ \delta h_3(t) \end{bmatrix}$$

Dove la seguente matrice sopra riportata è la così detta matrice Jacobiana di $\mathbf{f}(\mathbf{h}(t))$ calcolata nel punto di equilibrio:

$$J(\mathbf{h}_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_3}{\partial h_2} & \frac{\partial f_3}{\partial h_3} \end{bmatrix}_{\mathbf{h}_e}$$

A questo punto derivando le seguenti equazioni

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(h_1(t), q) \\ f_2(h_1(t), h_2(t)) \\ f_3(h_2(t), h_3(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \cdot (q - C_1 \cdot \sqrt{h_1(t)}) \\ \frac{1}{A_2(h_2(t))} \cdot (C_1 \cdot \sqrt{h_1(t)} - C_2 \cdot \sqrt{h_2(t)}) \\ \frac{1}{A_3(h_3(t))} \cdot (C_2 \cdot \sqrt{h_2(t)} - C_3 \cdot \sqrt{h_3(t)}) \end{bmatrix}$$

rispetto ai livelli e sostituendo sia i valori numerici relativi alla geometria del sistema che il valore esatto dei punti di equilibrio si ricavano i valori degli elementi dello Jacobiano come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} |_{\mathbf{h}_e} &= -\frac{1}{2} \frac{C_1}{a \cdot w \sqrt{h_{e,1}}} = -0.0071 \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} |_{\mathbf{h}_e} &= \frac{1}{A_2(h_{e,2})} \frac{C_1}{2\sqrt{h_{e,1}}} = 0.0069 \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_2} |_{\mathbf{h}_e} &= -\frac{1}{A_2(h_{e,2})} \frac{C_2}{2\sqrt{h_{e,2}}} - \frac{\partial A_2(h_2(t))}{\partial h_2(t)} |_{\mathbf{h}_e} \cdot \frac{(C_1 \cdot \sqrt{h_{e,1}} - C_2 \cdot \sqrt{h_{e,2}})}{A_2(\delta h_i(t))^2} = \\ &= -\frac{1}{w \cdot \left(c + \frac{b}{H_{2M}} \cdot h_{e,2}\right)} \frac{C_2}{2\sqrt{h_{e,2}}} = -0.0069 \\ \frac{\partial f_3}{\partial h_2} |_{\mathbf{h}_e} &= \frac{1}{A_3(h_{e,3})} \frac{C_2}{2\sqrt{h_{e,2}}} = 0.0059 \\ \frac{\partial f_3}{\partial h_3} |_{\mathbf{h}_e} &= -\frac{1}{A_3(h_{e,3})} \frac{C_3}{2\sqrt{h_{e,3}}} - \frac{\partial A_3(h_3(t))}{\partial h_3(t)} |_{\mathbf{h}_e} \cdot \frac{(C_2 \cdot \sqrt{h_{e,2}} - C_3 \cdot \sqrt{h_{e,3}})}{A_3(\delta h_i(t))^2} = \\ &= -\frac{1}{w \cdot \sqrt{R^2 - (R - h_{e,3})^2}} \cdot \frac{C_3}{2\sqrt{h_{e,3}}} = -0.0059 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la seguente matrice:

$$J(\mathbf{h}_e) = \begin{bmatrix} -0.0071 & 0 & 0 \\ 0.0069 & -0.0069 & 0 \\ 0 & 0.0059 & -0.0059 \end{bmatrix}$$

Dalla risoluzione del suo polinomio caratteristico si ottiene che tutti i suoi autovalori sono a parte reale minore di zero e pari a:

$$\lambda_1 = -0.0071, \quad \lambda_2 = -0.0069, \quad \lambda_3 = -0.0059$$

Si conclude quindi che, a seguito della linearizzazione, essendo tutti gli autovalori dello Jacobiano nel semipiano stabile il punto di equilibrio \mathbf{h}_e risulta **localmente asintoticamente stabile**.

Ad ogni modo però, essendo il sistema “3-Tank” costituito da tre sistemi in cascata accoppiati **unidirezionalmente**, ovvero preso come riferimento un qualsiasi serbatoio, questo non presenta nella sua dinamica $f_i(t)$ alcun contributo relativo ad un serbatoio a valle di esso, ed inoltre essendo come mostrato in (14) tutti e tre i serbatoi globalmente stabili in tempo finito, allora possiamo asserire che il sistema “3-Tank” presenterà un unico punto di equilibrio con le medesime proprietà di stabilità globale ed in tempo finito.

Con riferimento al secondo punto dell’esercizio, notiamo come essendo fissati i valori di C_1 , C_2 e C_3 è chiaro che \bar{h}_a potrà essere un punto di equilibrio per il sistema “3-Tank” solo aumentando la portata q al seguente valore:

$$q^* = \sqrt{0.28 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 2.6458 \cdot 10^{-5}$$

Per quanto riguarda invece il secondo punto \bar{h}_b questo non potrà mai essere un punto di equilibrio se non, ipotizzando di poter modificare la dissipazione nel secondo serbatoio, ovvero modificando C_2 ad esempio attraverso l’inserimento di una valvola sullo scarico in grado di modularne l’efflusso.

Infine, ipotizzando il sistema sul punto di equilibrio $\mathbf{h}_e = \bar{\mathbf{h}}_a$ e che il flusso di portata sia interrotto per $t \geq t_0$ ($q(t) = 0$), al fine di valutare quanto tempo dovrà trascorrere affinché il primo serbatoio risulti completamente scarico, possiamo ancora ricorrere al criterio diretto di Lyapunov.

In particolare, poiché il serbatoio risulterà vuoto dopo un ben determinato intervallo di tempo $\Delta T = t' - t_0$, è chiaro che dovremo cercare una funzione di Lyapunov $\bar{V}(t)$ tale che la sua derivata assuma una forma del tipo:

$$\dot{\bar{V}}(t) = -\mu \cdot \bar{V}(t)^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha < 1$$

Per cui posta $q = 0$, il modello dinamico del primo serbatoio risulterà essere il seguente:

$$\dot{h}_1(t) = -\frac{C_1}{a \cdot w} \cdot \sqrt{h_1(t)}$$

Successivamente scelta come funzione di Lyapunov candidata per il singolo serbatoio la (8) (non consideriamo gli altri serbatoi in quanto il primo serbatoio è fisicamente disaccoppiato dai restanti) o alternativamente la seguente funzione:

$$\bar{V}(t) = |h_1(t)| \quad \text{con} \quad h_1(t) \geq 0 \quad \forall t$$

Derivando rispetto al tempo risulta:

$$\dot{\bar{V}}(t) = \text{sign}(h_1(t)) \cdot \dot{h}_1(t) = \dot{h}_1(t) = -\frac{C_1}{a \cdot w} \cdot \sqrt{h_1(t)} = -\mu \cdot \bar{V}(t)^{0.5}$$

da cui è possibile ricavare ΔT risolvendo la seguente equazione differenziale del primo ordine come segue:

$$\frac{d\bar{V}(t)}{dt} = -\mu \cdot \bar{V}(t)^{0.5}$$

$$\int_{\bar{V}(t_0)}^{\bar{V}(t')} \frac{1}{\bar{V}(t)^{0.5}} \cdot d\bar{V} = -\mu \cdot \int_{t_0}^{t'} dt \rightarrow$$

$$2 \cdot \sqrt{\bar{V}} \Big|_{\bar{V}(t_0)}^{\bar{V}(t')} = \mu \cdot (t_0 - t') \rightarrow$$

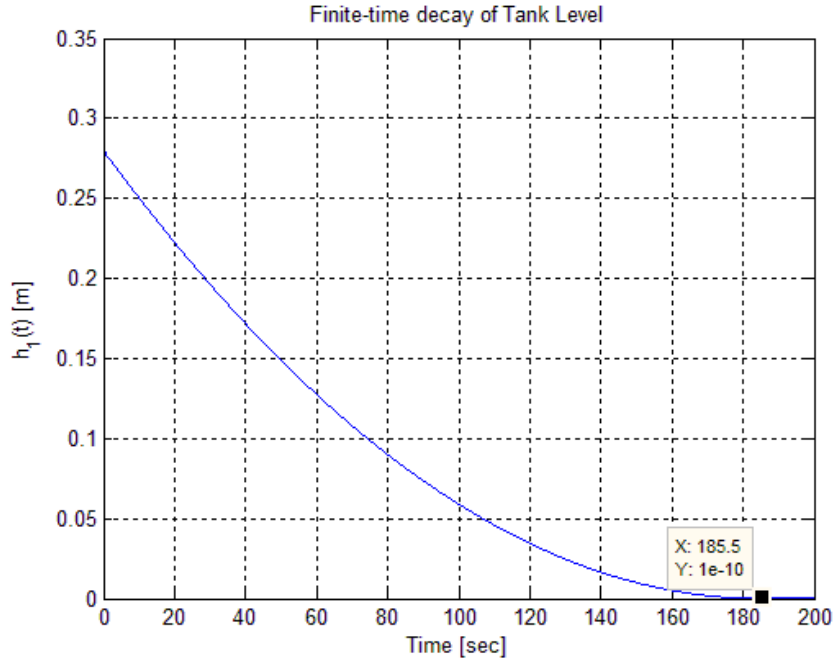
$$\bar{V}(t') = \left(\sqrt{\bar{V}(t_0)} + \frac{\mu}{2} \cdot (t_0 - t') \right)^2$$

Per cui, risulterà che la $\bar{V}(t)$ sarà pari a zero e quindi il serbatoio 1 completamente vuoto dopo esattamente 185.21 secondi dall'interruzione della portata, come di seguito dimostrato.

$$\sqrt{\bar{V}(t_0)} + 2 \cdot \mu \cdot (t_0 - t') = 0 \rightarrow t' \geq t_0 + \frac{\bar{V}(t_0)}{2\mu}$$

$$\Delta T = t' - t_0 = \frac{2}{\mu} \sqrt{\bar{V}(t_0)} = \frac{2 \cdot a \cdot w}{C_1} \cdot \sqrt{\bar{V}(t_0)} = \frac{2 \cdot 0.25 \cdot 0.035}{5 \cdot 10^{-5}} \sqrt{0.28} \approx 185.21 \text{ sec}$$

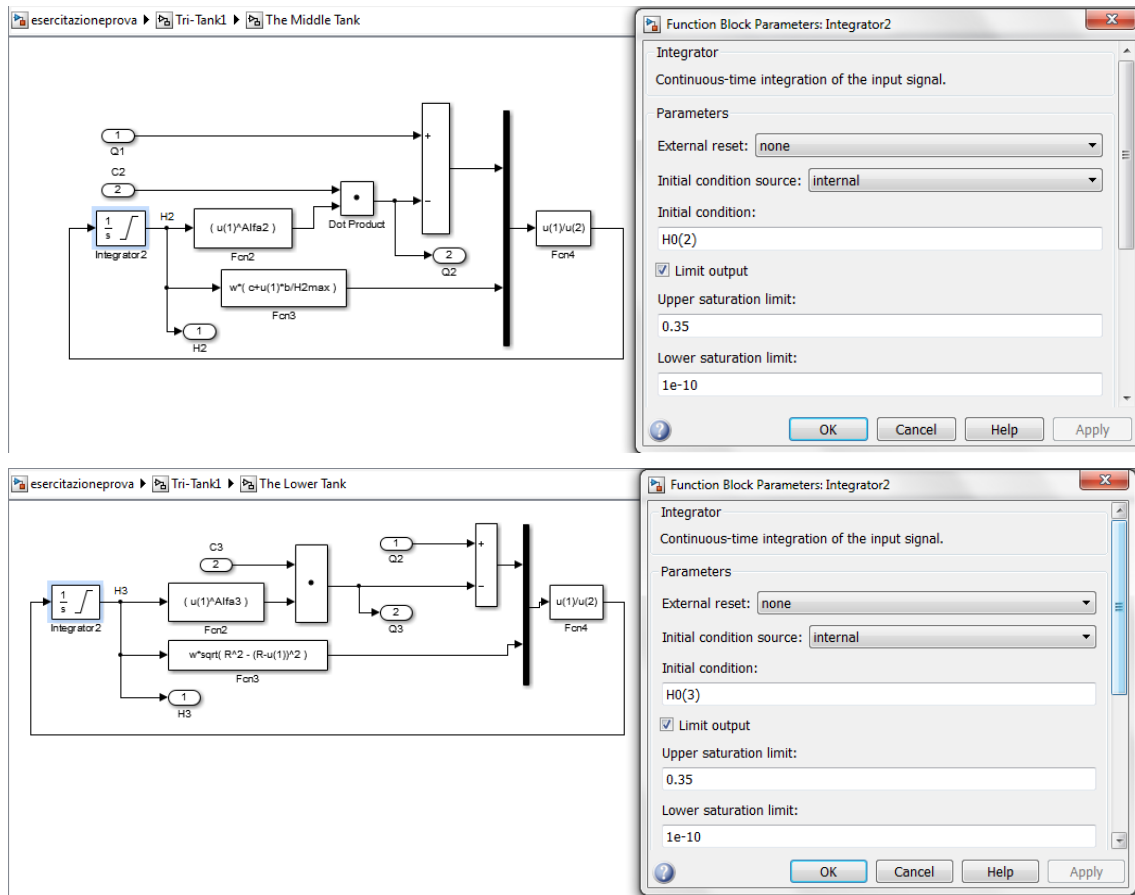
A conferma, in Figura 1 è riportata l'andamento del livello $h_1(t)$ per lo scenario considerato.



The screenshot displays the MATLAB/Simulink environment. The top toolbar shows the 'esercitazioneprova' folder, the 'Tri-Tank1' model, and the 'The Upper Tank' subsystem. The main workspace contains a Simulink model of a control system. The model includes an 'Integrator1' block (highlighted with a blue box), a 'Fcn1' block, a 'Dot Product' block, and a 'Gain' block. The 'Integrator1' block is connected to the 'Fcn1' block, which outputs 'H1'. The 'H1' signal is fed back into the 'Integrator1' block. The 'Fcn1' block also receives a 'Control' input (labeled '1') and outputs to the 'Dot Product' block. The 'Dot Product' block receives a 'C1' input (labeled '2') and outputs to the 'Gain' block. The 'Gain' block outputs to a 'Q1' output (labeled '2').

The 'Function Block Parameters: Integrator1' dialog box is open on the right side of the screen. It contains the following parameters:

- Integrator**: Continuous-time integration of the input signal.
- Parameters**:
 - External reset: none
 - Initial condition source: internal
 - Initial condition: H0(1)
 - ☒ Limit output
 - Upper saturation limit: 0.35
 - Lower saturation limit: 1e-10
- Buttons**: OK, Cancel, Help, Apply



Authors: Prof. Elio Usai¹, Ing. Alessandro Pilloni¹.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.