

Esercitazione di Analisi e Controllo dei Sistemi Multivariabili – n°2

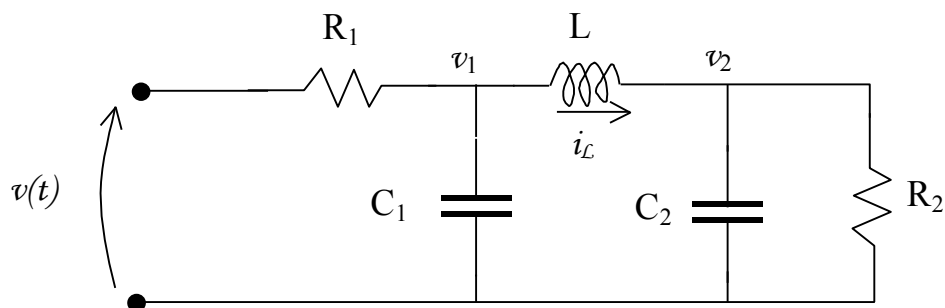
Rappresentare la dinamica della rete elettrica in figura in termini di variabili di stato, scegliendo quelle che permettono di definire l'energia interna del sistema in modo semplice ed intuitivo.

Valutare i modi caratteristici del sistema e la matrice di transizione dello stato.

Calcolare la matrice di trasferimento considerando come uscita il vettore di stato.

Valutare la controllabilità del sistema, e la sua osservabilità qualora si consideri come uscita una sola delle variabili di stato.

Valutare gli autovettori del sistema e la matrice modale.



$$R_1 = 10 \, \Omega$$

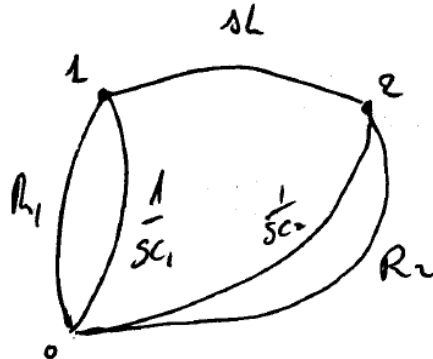
$$R_2 = 100 \, \Omega$$

$$C_1 = 10 \, \mu\text{F}$$

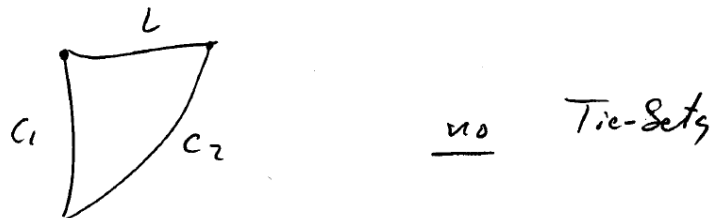
$$C_2 = 1 \, \mu\text{F}$$

$$L = 50 \, \text{mH}$$

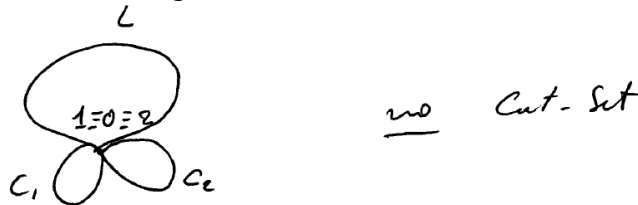
Alcune caratteristiche strutturali del sistema possono essere analizzate mediante la teoria dei grafi, sostituendo i generatori con il loro equivalente passivo ed utilizzando la rappresentazione mediante impedenze/ammittenze nel dominio di Laplace



Gli elementi in grado di immagazzinare energia (induttanze e capacità) sono 3 e, aprendo i rami resistivi, non si possono individuare maglie costituite da sole induttanze o sole capacità che costituirebbero un vincolo energetico derivante dal teorema della circuitazione.



Analogamente, cortocircuitando i rami resistivi il circuito collassa in un unico nodo, cosiché non sono presenti vincoli tra variabili energetiche derivanti dal teorema della divergenza.



Tale analisi porta ad affermare che non esistono vincoli strutturali tra le variabili di stato e che, avendo tenuto conto dell'influenza dei generatori, e quindi degli ingressi, non sono presenti vincoli che limitino la controllabilità del sistema.

La dinamica del sistema è ottenibile applicando le leggi di Kirchhoff:

Nodo 1:
$$\frac{1}{R_1}(v(t) - v_1(t)) = i_L(t) + C_1 \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Nodo 2:
$$i_L(t) = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{v_2(t)}{R_2}$$

Maglia 0-1-2-0:
$$L \frac{di_L(t)}{dt} = v(t) - v_2(t)$$

Indicando le seguenti variabili di stato $x_1=v_1$; $x_2=v_2$; $x_3=i_L$; $u=v$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & \frac{-1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comandi MATLAB

```
>> syms R1 R2 C1 C2 L s
>> A=[-1/(R1*C1) 0 -1/C1; 0 -1/(R2*C2) 1/C2; 1/L -1/L 0]
```

```
A =
[ -1/(C1*R1),      0,      -1/C1]
[      0,      -1/(C2*R2),  1/C2]
[      1/L,      -1/L,      0]
```

```
>> B=[1/(R1*C1);0;0]
```

```
B =
1/(C1*R1)
0
0
```

Calcolo della matrice di controllabilità

```
>> Co=simplify([B, A*B, A*A*B])
```

```
Co =
[ 1/(C1*R1),      -1/(C1^2*R1^2),      (- C1*R1^2 + L)/(C1^3*L*R1^3)]
[      0,          0,          1/(C1*C2*L*R1)]
[      0,          1/(C1*L*R1),      -1/(C1^2*L*R1^2)]
```

è evidente come la matrice di controllabilità abbia rango pieno e quindi il sistema sia controllabile, come rilevato dall'analisi topologica del grafo del circuito.

Calcolo della matrice di osservabilità misurando solo la variabile x_1

```
Os1=[[1 0 0];[1 0 0]*A;[1 0 0]*A*A]
```

```
Os1 =
[      1,          0,          0]
[ -1/(C1*R1),      0,      -1/C1]
[ 1/(C1^2*R1^2) - 1/(C1*L),  1/(C1*L),  1/(C1^2*R1)]
```

è evidente come la matrice di osservabilità abbia rango pieno e quindi il sistema sia osservabile misurando la tensione sul condensatore C_1 .

Calcolo della matrice di osservabilità misurando solo la variabile x_2

>> Os2=[[0 1 0];[0 1 0]*A;[0 1 0]*A^2]

Os2 =

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & -1/(C2*R2), & 1/C2 \\ 1/(C2*L), & 1/(C2^2*R2^2) - 1/(C2*L), & -1/(C2^2*R2) \end{bmatrix}$$

è evidente come la matrice di osservabilità abbia rango pieno e quindi il sistema sia osservabile misurando la tensione sul condensatore C_2 .

Calcolo della matrice di osservabilità misurando solo la variabile x_3

>> Os3=simplify([[0 0 1];[0 0 1]*A;[0 0 1]*A^2])

Os3 =

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1/L, & -1/L, & 0 \\ -1/(C1*L*R1), & 1/(C2*L*R2), & -(C1 + C2)/(C1*C2*L) \end{bmatrix}$$

è evidente come la matrice di osservabilità ha rango pieno e quindi il sistema sia osservabile misurando la corrente sull'induttore L solo se le costanti di tempo associate ai due condensatori non sono le medesime.

Con i valori dati $C_1 R_1 = C_2 R_2$ e quindi il sistema non è osservabile a causa di una "degenerazione parametrica". Poiché la matrice di osservabilità ha rango 2, una delle variabili di stato non sarà osservabile.

I modi del sistema sono definiti mediante gli autovalori della matrice $(sI-A)$ il cui polinomio caratteristico è

$$\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left[s \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right) + \frac{1}{L C_2} \right] + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right) = 0$$

La matrice di trasferimento, considerando lo stato completamente misurabile è un vettore di funzioni di trasferimento definito da

$$G(s) = I_3 (sI - A)^{-1} B$$

Comandi MATLAB

>> H=simplify(s*eye(3)-A)

H =

$$\begin{bmatrix} s + 1/(C1*R1), & 0, & 1/C1 \\ 0, & s + 1/(C2*R2), & 1/C2 \\ -1/L, & 1/L, & s \end{bmatrix}$$

>> P=collect(simplify(det(H)),s)

P =

$$s^3 + \frac{(C1*L*R1 + C2*L*R2)*s^2}{(C1*C2*L*R1*R2)} + \frac{(L + C1*R1*R2 + C2*R1*R2)*s}{(C1*C2*L*R1*R2) + (R1 + R2)/(C1*C2*L*R1*R2)}$$

```
>> R1=10;
>> R2=100;
>> C1=10e-6;
>> C2=1e-6;
>> L=10e-3;
>> R1*C1
ans = 1.0000e-04
>> R2*C2
ans = 1.0000e-04
```

Calcolo del polinomio caratteristico

```
>> Pa=eval(P)
```

Pa =

$$s^3 + 20000*s^2 + (7046430719999999*s)/33554432 + 450559999999999/4096$$

Calcolo delle radici del polinomio caratteristico

```
>> roots([1, 20000, 7046430719999999/33554432, 450559999999999/4096])
```

ans =

```
1.0e+04 *
-1.0000 + 0.0000i
-0.5000 + 0.9220i
-0.5000 - 0.9220i
```

Calcolo degli autovalori della matrice A

```
>> eig(eval(A))
```

ans =

```
1.0e+04 *
-1.0000 + 0.0000i
-0.5000 + 0.9220i
-0.5000 - 0.9220i
```

Calcolo degli autovettori e della matrice diagonale corrispondente alla matrice A

```
>> [V,D]=eig(eval(A))
```

V =

```
Columns 1 through 3
-0.7071 + 0.0000i    0.0995 - 0.0000i    0.0995 + 0.0000i
-0.7071 + 0.0000i   -0.9950 + 0.0000i   -0.9950 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i   -0.0050 - 0.0092i   -0.0050 + 0.0092i
```

D =

1.0e+04 *
Columns 1 through 3

```
-1.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
 0.0000 + 0.0000i   -0.5000 + 0.9220i    0.0000 + 0.0000i
 0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i   -0.5000 - 0.9220i
```

Poiché una coppia di autovalori sono complessi e coniugati sia la matrice degli autovettori che la matrice diagonalizzata hanno elementi complessi.

Per ottenere autovettori reali e una matrice diagonale a blocchi ma a coefficienti reali si deve elaborare la matrice modale tenendo conto degli autovalori reali e complessi e coniugati

$$\lambda_1 = -10000$$

$$\lambda_{2,3} = -500 \pm j922 = \alpha \pm j\omega$$

$$T = [\mathbf{p}_1 \quad \Re\{\mathbf{p}_2\} \quad \Im\{\mathbf{p}_2\}]$$

Comandi MATLAB

```
>> T=[V(:,1), real(V(:,2)), imag(V(:,2))]
```

T =

```
-0.7071    0.0995   -0.0000
 -0.7071   -0.9950    0
 -0.0000   -0.0050   -0.0092
```

```
>> J=inv(T)*eval(A)*T
```

J =

```
1.0e+04 *
 -1.0000   -0.0000   -0.0000
  0.0000   -0.5000    0.9220
  0.0000   -0.9220   -0.5000
```

La matrice di transizione dello stato nella rappresentazione diagonale a blocchi è

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos(\omega t) & e^{\alpha t} \sin(\omega t) \\ 0 & -e^{\alpha t} \sin(\omega t) & e^{\alpha t} \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice di transizione dello stato nella rappresentazione dello stato mediante le tensioni sui condensatori e la corrente nell'induttanza è

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

La matrice di trasferimento, considerando come uscite le tensioni ai capi dei condensatori, può essere calcolata anche utilizzando il metodo delle matrici delle ammettenze del circuito

$$\begin{bmatrix} sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + sC_2 + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasferimento sarà costituita dalla prima colonna dell'inversa della matrice delle ammettenze divisa per R_1 .

$$\begin{aligned} \det(Y) &= \left(sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} \right) \left(sC_2 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \right) - \left(\frac{1}{sL} \right)^2 = \\ &= \left(sC_1 + \frac{1}{R_1} \right) \left(sC_2 + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{sL} \left(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{sL} - \frac{1}{sL} \\ &= \frac{(sR_1C_1 + 1)(sR_2C_2 + 1)}{R_1 R_2} + \frac{1}{sL} \left(\frac{sR_1C_1 + 1}{R_1} + \frac{sR_2C_2 + 1}{R_2} \right) = \\ &= \frac{(sR_1C_1 + 1)(sR_2C_2 + 1)}{R_1 R_2} + \frac{R_2(sR_1C_1 + 1) + R_1(sR_2C_2 + 1)}{sL R_1 R_2} \\ &= \frac{sL(sR_1C_1 + 1)(sR_2C_2 + 1) + R_2(sR_1C_1 + 1) + R_1(sR_2C_2 + 1)}{sL R_1 R_2} \end{aligned}$$

La prima colonna della matrice aggiunta è

$$[Y]^+_{1^a \text{ colonna}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta L} + \Delta C_2 + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{\Delta L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta L} + \frac{\Delta C_2 R_2 + 1}{R_2} \\ \frac{1}{\Delta L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{R_2 + \Delta L (\Delta C_2 R_2 + 1)}{\Delta L R_2} \\ \frac{1}{\Delta L} \end{bmatrix} \quad ($$

$$V_1 = \frac{R_2 + \Delta L (\Delta C_2 R_2 + 1)}{\Delta L (\Delta R_1 C_1 + 1) (\Delta R_2 C_2 + 1) + R_2 (\Delta R_1 C_1 + 1) + R_1 (\Delta R_2 C_2 + 1)} \quad \checkmark$$

$$V_2 = \frac{R_2}{\Delta L (\Delta R_1 C_1 + 1) (\Delta R_2 C_2 + 1) + R_2 (\Delta R_1 C_1 + 1) + R_1 (\Delta R_2 C_2 + 1)} \quad \checkmark$$

$$V_1 - V_2 = \Delta L \bar{I}_L$$

$$\bar{I}_L = \frac{\Delta C_2 R_2 + 1}{\Delta L (\Delta R_1 C_1 + 1) (\Delta R_2 C_2 + 1) + R_2 (\Delta R_1 C_1 + 1) + R_1 (\Delta R_2 C_2 + 1)} \quad \checkmark$$

Se $R_1 C_1 = R_2 C_2 = \tau$ allora

$$V_2(s) = \frac{R_2}{sL(s\tau+1)^2 + (R_1+R_2)(s\tau+1)} \cdot V(s)$$

$$V_1(s) = \frac{R_2 + sL(s\tau+1)}{sL(s\tau+1)^2 + (R_1+R_2)(s\tau+1)} V(s)$$

$$\bar{I}_L(s) = \frac{s\tau+1}{sL(s\tau+1)^2 + (R_1+R_2)(s\tau+1)} V(s) =$$

$$= \frac{\cancel{s\tau+1}}{\cancel{(s\tau+1)} [sL(s\tau+1) + (R_1+R_2)]} V(s) \cdot$$

$$= \frac{1}{sL(s\tau+1) + (R_1+R_2)} V(s)$$

Si nota come la funzione di trasferimento tra la tensione in ingresso e la corrente nell'induttanza sia del 2° ordine, ovvero si è verificata una riduzione d'ordine a causa della perdita di osservabilità.