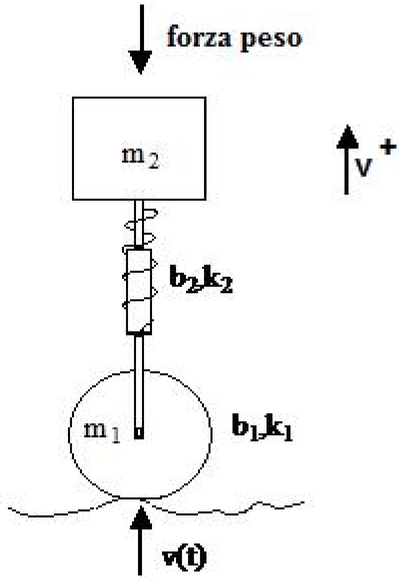
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CAGLIARI
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA ED ELETTRONICA
Piazza d'Armi - 09123 CAGLIARI (I)
Tel. +39 070 675 5889 - Fax +39 070 675 5900
http://www.diee.unica.it

Esercitazione di Analisi e Controllo dei Sistemi Multivariabili – n°1

Dato il sistema "sospensione passiva" rappresentato in figura:

1. Definire il modello meccanico
2. Valutare il numero di variabili necessarie a definire l'energia interna del sistema, ovvero il suo ordine;
3. Fornire una rappresentazione del sistema in termini di variabili di stato;



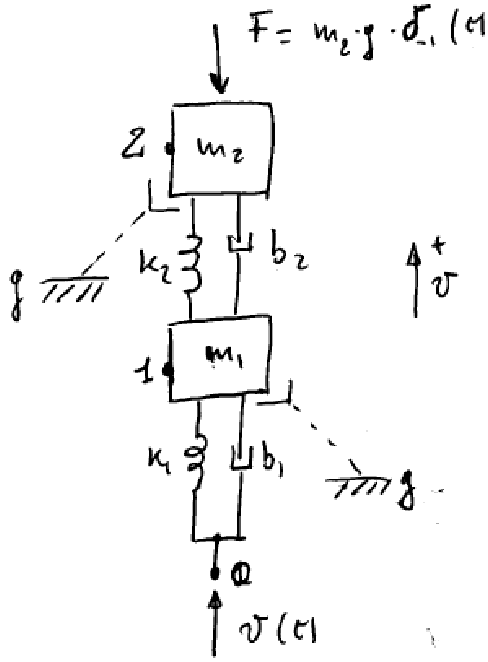
Valutare i modi del sistema e la matrice di transizione dello stato nell'ipotesi che i parametri assumano i seguenti valori:

- massa di ¼ del corpo macchina: $m_2 = 208$ kg
- massa della ruota: $m_1 = 28$ kg
- coefficiente elastico della sospensione: $k_2 = 18709$ N/m
- coefficiente di dissipazione della sospensione: $b_2 = 1300$ Nm/s
- coefficiente elastrico dello pneumatico: $k_1 = 127200$ N/m
- coefficiente di dissipazione della sospensione: $b_1 = 10$ Ns/m

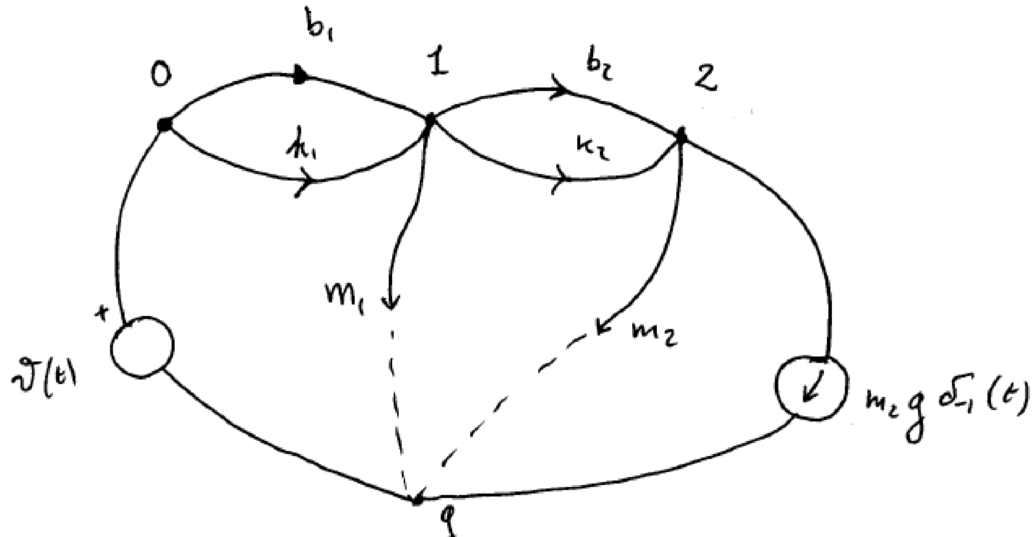
Valutare se il sistema è diagonalizzabile; calcolare la matrice modale e di transizione dello stato.

Il movimento di avanzamento della vettura comporta la variazione del punto di contatto tra ruota e suolo in direzione verticale. Tenendo conto della velocità di avanzamento ciò si traduce nell'imposizione di una velocità di spostamento verticale del punto di contatto nota, nell'ipotesi di mantenimento del contatto ruota-terreno.

Nell'ipotesi di trascurare la forza peso sulla ruota, lo schema equivalente del sistema considerato è riportato di seguito.



Sono presenti 4 elementi in grado di immagazzinare energia (2 molle e 2 masse) e quindi l'ordine del sistema è al più pari a 4.
Lo schema meccanico può essere ricondotto al grafo seguente, considerando le velocità come variabili di nodo e le forze come variabili di flusso



Si considerano le segenti variabili di stato:

v_1: velocità di spostamento del baricento della ruota;
v_2: velocità di spostamento del baricento dello chassis
f_1: forza di deformazione dello pneumatico
f_2: forza di deformazione della molla della sospensione

Equilibrio delle forze al nodo 1

$$f_1+b_1(v(t)-v_1)=m_1\frac{dv_1}{dt}+f_2+b_2(v_1-v_2)$$

Equilibrio delle forze al nodo 2

$$f_2+b_2(v_1-v_2)=m_2\frac{dv_2}{dt}+m_2 g\,\delta_{-1}(t)$$

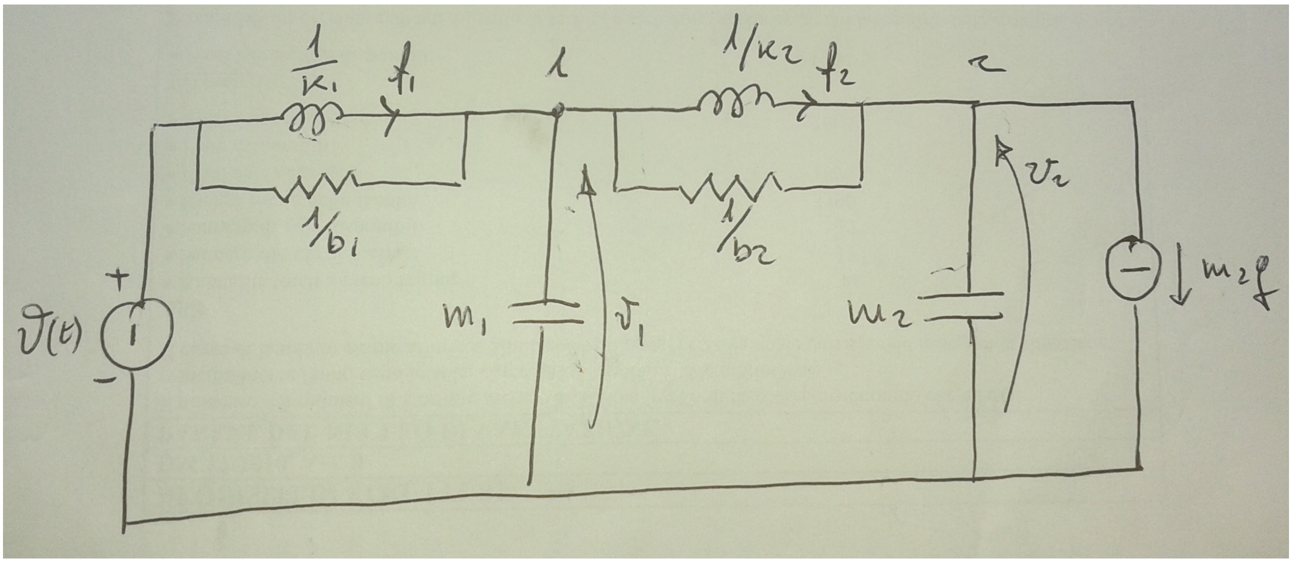
Equazione costitutiva della molla equivalente allo pneumatico

$$\frac{df_1}{dt}=k_1(v(t)-v_1)$$

Equazione costitutiva della molla della sospensione

$$\frac{df_2}{dt}=k_2(v_1-v_2)$$

Considerando l'equivalenza elettro-meccanica tensione-velocità, corrente-forza, il grafo è equivalente al seguente circuito elettrico



Bozza soluzione esercitazione n° 1 di Analisi e controllo dei sistemi multivariabili

Modello

$x_1 = v_1;\quad x_2 = v_2;\quad x_3 = f_1;\quad x_4 = f_2;\quad u_1 = v(t);\quad u_2 = g$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-(b_1+b_2)}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} & \frac{1}{m_1} & \frac{-1}{m_1} \\ \frac{b_2}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} & 0 & \frac{1}{m_2} \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{m_2} \\ k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t)$$

Matlab Code

Assegnamento delle variabili simboliche

```
>> syms s m1 m2 k1 k2 b1 b2

>> A=[-(b1+b2)/m1 b2/m1 1/m1 -1/m1;
        b2/m2 -b2/m2 0 1/m2;
       -k1 0 0 0;
        k1 -k2 0 0]

A =
[ -(b1 + b2)/m1,  b2/m1, 1/m1, -1/m1]
[        b2/m2, -b2/m2,    0,  1/m2]
[          -k1,      0,    0,     0]
[           k1,    -k2,    0,     0]

>> B=[b1/m1 0; 0 -1/m2; k1 0; 0 0]
B =
[ b1/m1,     0]
[     0, -1/m2]
[    k1,     0]
[     0,     0]
```

Calcolo della matrice (sI-A)

```
>> H=s*eye(4)-A
H =
[ s + (b1 + b2)/m1,    -b2/m1, -1/m1,  1/m1]
[           -b2/m2, s + b2/m2,     0, -1/m2]
[               k1,         0,     s,     0]
[              -k1,        k2,     0,     s]
```

Calcolo del polinomio caratteristico

```
>> Q=collect(simplify(det(H)),s)
Q =
s^4 + ((b1*m2 + b2*m1 + b2*m2)*s^3)/(m1*m2) + ((b1*b2 + 2*k1*m2 + k2*m1)*s^2)/(m1*m2) + ((b1*k2 +
b2*k1)*s)/(m1*m2) + (k1*k2)/(m1*m2)
```

Assegnamento dei valori ai parametri del modello

```
>> m1=208;
>> m2=28;
>> k2=18709;
>> b2=1300;
>> k1=127200;
>> b1=10;
```

Calcolo della matrice A coi parametri assegnati

```
>> Aa=eval(A)
Aa =
1.0e+05 *
   -0.0001    0.0001    0.0000   -0.0000
    0.0005   -0.0005         0    0.0000
   -1.2720         0         0         0
    1.2720   -0.1871         0         0
```

Calcolo degli autovalori della matrice A

```
>> eig(Aa)
ans =
-20.512687900785128 +24.235051708395400i
-20.512687900785128 -24.235051708395400i
 -5.850636275039005 +19.263968765357454i
 -5.850636275039005 -19.263968765357454i
```

Calcolo della matrice (sI-A)

```
>> Ha=s*eye(4)-Aa
Ha =
[ s + 655/104,     -25/4, -1/208, 1/208]
[      -325/7, s + 325/7,      0, -1/28]
[      127200,         0,      s,     0]
[     -127200,     18709,      0,     s]
```

Calcolo del polinomio caratteristico

```
>> Qa=collect(simplify(det(Ha)),s)
Qa =
s^4 + (38385*s^3)/728 + (1378459*s^2)/728 + (82773545*s)/2912 + 74368275/182
```

Calcolo delle radici del polinomio caratteristico (altro modo per il calcolo degli autovalori)

```
>> roots([1 38385/728  1378459/728  82773545/2912  74368275/182])
ans =
-20.512687900785188 +24.235051708395396i
-20.512687900785188 -24.235051708395396i
 -5.850636275039008 +19.263968765357465i
 -5.850636275039008 -19.263968765357465i
```

Tutti gli autovalori sono distinti quindi il sistema è diagonalizzabile
Calcolo della matrice modale e della matrice diagonale

```
>> [V, D]=eig(Aa)
V =
  -0.0000 + 0.0001i   -0.0000 - 0.0001i    0.0001 + 0.0001i    0.0001 - 0.0001i
   0.0007 - 0.0005i    0.0007 + 0.0005i    0.0006 - 0.0002i    0.0006 + 0.0002i
  -0.4105 + 0.1351i   -0.4105 - 0.1351i   -0.4036 + 0.5112i   -0.4036 - 0.5112i
   0.9018 + 0.0000i    0.9018 + 0.0000i    0.7588 + 0.0000i    0.7588 + 0.0000i

D =
 -20.5127 +24.2351i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i -20.5127 -24.2351i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -5.8506 +19.2640i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -5.8506 -19.2640i
```

Poichè gli autovalori sono complessi e coniugati le matrici modale e diagonale sono definite in campo complesso.

È possibile definire una matrice "modale" in campo reale che trasforma il sistema in un sistema diagonale a blocchi in cui ad ogni coppia di autvalori complessi e coniugati corrisponde una sottomatrice 2x2 con la parte reale egli autovalori sulla diagonale e la controdiagonale contenente le parti immaginarie.

```
>> P=[real(V(:,1)), imag(V(:,1)), real(V(:,3)), imag(V(:,3))]
P =
  -0.0000    0.0001    0.0001    0.0001
   0.0007   -0.0005    0.0006   -0.0002
  -0.4105    0.1351   -0.4036    0.5112
   0.9018         0    0.7588         0
```

Calcolo della rappresentazione diagonale a blocchi

```
>> inv(P)*Aa*P
ans =
  -20.5127   24.2351    0.0000    0.0000
  -24.2351  -20.5127    0.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000   -5.8506   19.2640
   -0.0000    0.0000  -19.2640   -5.8506
```

Matrice di transizione dello stato della forma diagonale a blocchi

$$e^{Dt}=\begin{bmatrix} e^{-20.5127t}\cos(24.2351t) & e^{-20.5127t}\sin(24.2351t) & 0 & 0 \\ -e^{-20.5127t}\sin(24.2351t) & e^{-20.5127t}\cos(24.2351t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5.8506t}\cos(19.2640t) & e^{-5.8506t}\sin(19.2640t) \\ 0 & 0 & -e^{-5.8506t}\sin(19.2640t) & e^{-5.8506t}\cos(19.2640t) \end{bmatrix}$$

Calcolo della matrice di transizione dello stato nella forma corrispondente alla matrice A.

$$e^{At}=P\,e^{Dt}\,P^{-1}$$