



CAP.6 - RISPOSTA AD UN CARICO DINAMICO QUALSIASI

6.1 INTEGRALE DI DUHAMEL PER UN SISTEMA NON SMORZATO

La procedura esposta precedentemente che fornisce la risposta approssimata ad un impulso di corta durata, può essere estesa al caso di un carico dinamico qualsiasi $p(t)$. Durante la frazione di tempo $d\tau$ il carico fa subire alla struttura un impulso pari a $p(t)d\tau$ ed è possibile utilizzare l'eq.(5.19) per calcolare la risposta. Benché si tratti di un metodo approssimato valido per un intervallo di tempo corto ma finito, la procedura diventa esatta quando $d\tau$ tende a zero. Quindi, per $t > \tau$ la risposta prodotta dal carico $p(t)$ è:

$$dv(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega} \cdot \sin[\omega(t - \tau)] \quad (6.1)$$

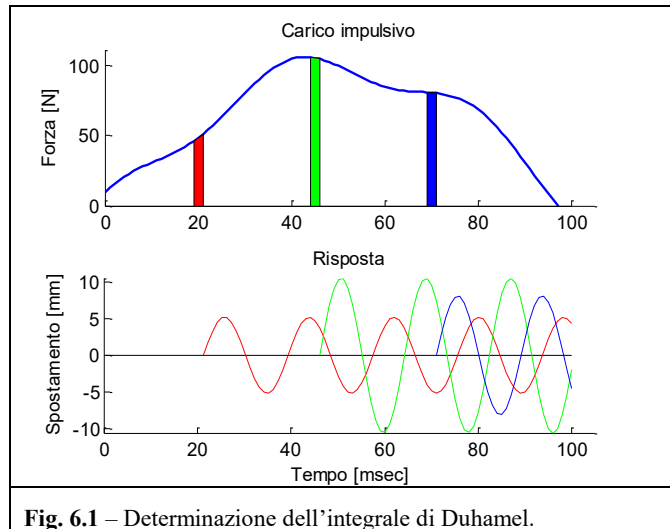


Fig. 6.1 – Determinazione dell'integrale di Duhamel.

In questa espressione matematicamente esatta, $dv(t)$ è l'espressione differenziale della risposta all'impulso $p(\tau)d\tau$, per $t > \tau$: non è quindi la variazione dello spostamento v durante il tempo dt .

La funzione completa può allora essere considerata come una successione d'impulsi, ognuno dei quali produce una risposta del tipo espresso dall'equazione precedente. Integrando da zero a t , si ottiene dunque la risposta di questo sistema **lineare** all'istante t :

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau \quad (6.2)$$

espressione generalmente nota sotto il nome di **integrale di Duhamel** per i sistemi non smorzati. L'equazione può essere utilizzata per calcolare la risposta di un sistema ad un grado di libertà, non smorzato, sottoposto ad un carico qualsiasi. Nel caso di una funzione di carico del tutto casuale, si farà ricorso ad un'integrazione numerica.

L'eq.(6.2) può anche scriversi nel modo seguente:

$$v(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6.3)$$

dove

$$h(t - \tau) \equiv \frac{1}{m\omega} \sin[\omega(t - \tau)] \quad (6.4)$$

L'eq.(6.4) è chiamato *integrale di convoluzione*. Quando si calcola la risposta di una struttura ad un carico arbitrario utilizzando l'equazione precedente, si può parlare di calcolo della risposta nel dominio del tempo. La funzione $h(t - \tau)$ è generalmente chiamata *risposta ad un impulso unitario* (definita qui per un sistema non smorzato) perché esprime la risposta del sistema ad un impulso di valore unitario applicato all'istante $t = \tau$.

Nel caso in cui il carico sia rappresentabile da una funzione analitica semplice, è possibile risolvere l'integrale di Duhamel in forma chiusa. Per esempio nel caso di carico costante pari a p_0 si ottiene:

$$v(t) = \frac{p_0}{m\omega} \int_0^t \sin[\omega(t - \tau)] d\tau = \frac{p_0}{m\omega^2} [\cos[\omega(t - \tau)]]_0^t = \frac{p_0}{k} [1 - \cos(\omega t)]$$

Nel caso di una rampa crescente: $p(\tau) = p_0\tau$ l'equazione del moto diventa (si veda l'[appendice A](#)):



$$v(t) = \frac{p_0}{m\omega} \int_0^t \tau \sin[\omega(t - \tau)] d\tau = \frac{p_0}{k} \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]$$

Nell'eq.(6.2) si è fatta l'ipotesi che all'istante $t = 0$ il sistema fosse a riposo. In caso contrario, se $v(0) \neq 0$ oppure $\dot{v}(0) \neq 0$, la soluzione generale comprende dei termini complementari di vibrazione libera. Nel caso generale:

$$v(\bar{t}) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + v(0) \cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau \quad (6.5)$$

6.2 CALCOLO NUMERICO DELL'INTEGRALE DI DUHAMEL PER UN SISTEMA NON SMORZATO

Se la funzione che descrive il carico applicato è integrabile, la risposta dinamica della struttura può essere determinata per mezzo di una delle formule d'integrazione, la (6.2) oppure (6.5). D'altra parte in molti casi il carico è fornito non sotto forma di una funzione, ma come una serie di dati sperimentali e la risposta deve essere calcolata per mezzo di una procedura numerica. Ricordando che:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

è possibile scrivere l'eq.(6.2) nella seguente forma, valida quando le condizioni iniziali sono nulle:

$$v(t) = \frac{\sin(\omega t)}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau - \frac{\cos(\omega t)}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega \tau) d\tau$$

oppure:

$$v(t) = \bar{A}(t) \sin(\omega t) - \bar{B}(t) \cos(\omega t) \quad (6.6)$$

in cui:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \quad \bar{B}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega \tau) d\tau \quad (6.7)$$

Il calcolo numerico dell'integrale di Duhamel richiede dunque il calcolo numerico degli integrali $\bar{A}(t)$ e $\bar{B}(t)$. Si consideri per esempio il primo integrale: la funzione da integrare è descritta graficamente nella Fig.6.2. Per semplificare il lavoro numerico, la funzione è stata calcolata per degli incrementi di tempo uguali a $\Delta\tau$ ed i valori successivi della funzione sono individuati con degli indici interi. Il valore dell'integrale può allora ottenersi in modo approssimato sommando queste ordinate dopo averle moltiplicate per degli opportuni fattori peso. (vedi [Appendice B](#)).

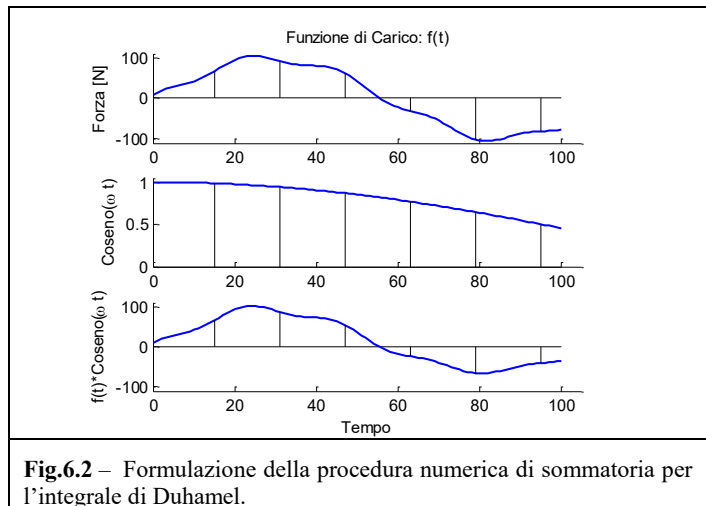


Fig.6.2 – Formulazione della procedura numerica di sommatoria per l'integrale di Duhamel.

Matematicamente:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y(\tau) d\tau \cong \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{A}}(t) \quad (6.8)$$

in cui $y(\tau) = p(\tau)\cos(\omega\tau)$ e $\frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{A}}$ rappresenta il processo di sommatoria numerica (la cui forma esatta dipende dall'ordine dell'approssimazione utilizzata).



Nei casi più elementari le somme si effettuano in uno dei tre modi seguenti:

- 1) Semplice somma ($\zeta = 1$):

$$\sum_1^{\bar{A}}(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} \quad (6.9a)$$

- 2) Metodo dei trapezi ($\zeta = 2$):

$$\sum_2^{\bar{A}}(t) = y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + y_N \quad (6.9b)$$

- 3) Metodo di Simpson ($\zeta = 3$):

$$\sum_3^{\bar{A}}(t) = y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{N-1} + y_N \quad (6.9c)$$

in cui $N = t/\Delta\tau$ deve essere un numero pari quando si usa il metodo di Simpson.

L'uso nell'eq. (6.8) di una qualunque delle sommatorie elencate conduce ad una approssimazione dell'integrale per l'istante considerato t . D'altra parte, in generale, si ricerca l'intera storia della risposta e non soltanto lo spostamento in un istante ben preciso; in altri termini, la risposta deve essere calcolata per una successione di istanti t_1, t_2, \dots , separati l'uno dall'altro, da un intervallo $\Delta\tau$ (oppure $2\Delta\tau$ se si utilizza il metodo di Simpson). Per ottenere la storia completa della risposta, è più comodo esprimere le sommatorie dell'eq.(6.9) sotto forma incrementale:

- 1) Semplice somma ($\zeta = 1$):

$$\sum_1^{\bar{A}}(t) = \sum_1^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau)\cos[\omega(t - \Delta\tau)] \quad (6.10a)$$

- 2) Metodo dei trapezi ($\zeta = 2$):

$$\sum_2^{\bar{A}}(t) = \sum_2^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau)\cos[\omega(t - \Delta\tau)] + p(t)\cos(\omega t) \quad (6.10b)$$

- 3) Metodo di Simpson ($\zeta = 3$):

$$\sum_3^{\bar{A}}(t) = \sum_3^{\bar{A}}(t - 2\Delta\tau) + p(t - 2\Delta\tau)\cos[\omega(t - 2\Delta\tau)] + 4p(t - \Delta\tau)\cos[\omega(t - \Delta\tau)] + p(t)\cos(\omega t) \quad (6.10c)$$

in cui $\sum_{\zeta}^{\bar{A}}(t - \Delta\tau)$ rappresenta il valore della sommatoria effettuata sino all'istante $t - \Delta\tau$ precedente.

Il calcolo del termine $\bar{B}(t)$ si può effettuare esattamente nello stesso modo, cioè:

$$\bar{B}(t) \cong \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{B}}(t) \quad (6.11)$$

in cui $\sum_{\zeta}^{\bar{B}}$ può essere calcolato con delle espressioni identiche alle (6.10), ma con la funzione seno al posto della funzione coseno. La sostituzione delle eq.(6.8) e (6.11) nell'eq.(6.6) conduce all'equazione della risposta finale per un sistema non smorzato:

$$v(t) = \bar{A}(t)\sin(\omega t) - \bar{B}(t)\cos(\omega t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \left[\sum_{\zeta}^{\bar{A}}(t) \sin(\omega t) - \sum_{\zeta}^{\bar{B}}(t) \cos(\omega t) \right] \quad (6.12)$$



ESEMPIO E6.1 – Si consideri la risposta dinamica di un serbatoio d'acqua sopraelevato ad un'esplosione. La modellazione della struttura e il carico sono rappresentati nella fig.E6.1. Per questo sistema la frequenza e il periodo della vibrazione valgono:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3.94 \times 10^7}{4.38 \times 10^4}} = 30 \text{ [rad/s]} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.209 \text{ [s]}$$

L'incremento di tempo scelto per l'integrazione numerica è stato: $\Delta\tau = 0.0025 \text{ [s]}$, che corrisponde ad un incremento angolare in vibrazione libera di $\omega\Delta\tau = 30 \times 0.0025 = 0.075 \text{ [rad]}$: un incremento più lungo probabilmente avrebbe fornito risultati altrettanto soddisfacenti. Non c'è smorzamento. Si utilizza il metodo di Simpson, cioè nelle equazioni comprese tra la (6.10) e la (6.12) è stato utilizzato il fattore $\zeta = 3$.

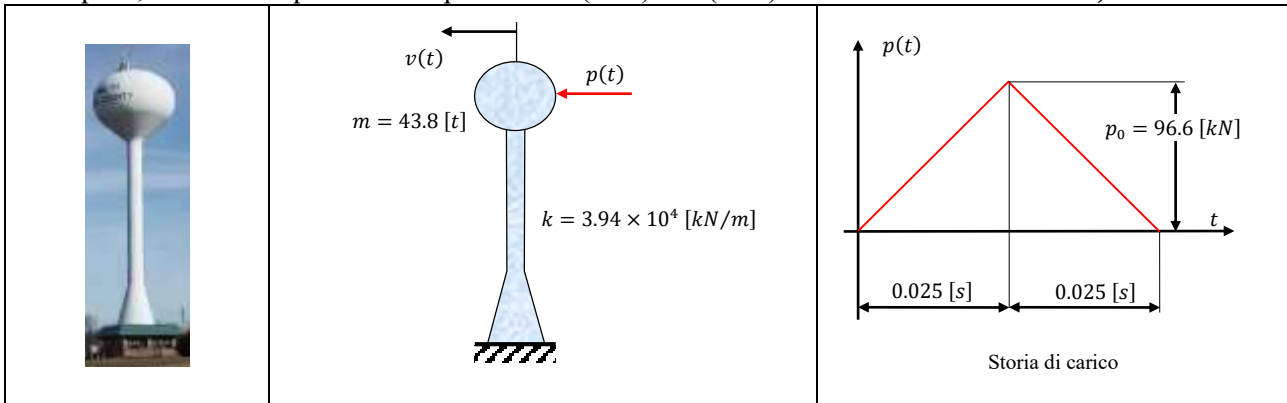


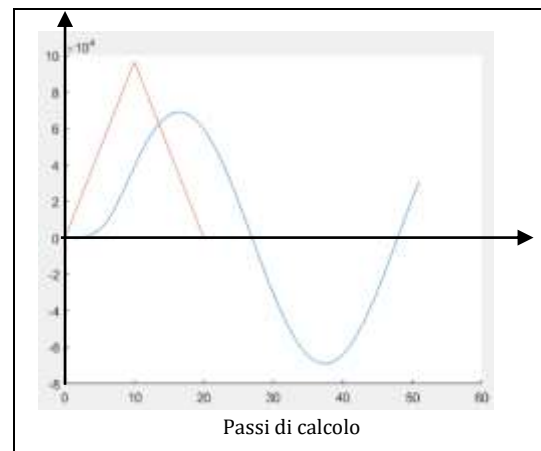
Fig.E6.1 – Serbatoio d'acqua sopraelevato sottoposto ad un'esplosione.

Nell'[appendice C](#) viene riportato un codice scritto in MATLAB per la soluzione dell'esercizio: per rendere più facile la sua lettura, il codice non è stato ottimizzato.

Il grafico a lato mette a confronto la forza di richiamo elastico (rappresentata con una linea di colore azzurro e ottenuta eseguendo il prodotto $f_s = kv(t)$), con la storia di carico rappresentata con una linea rossa.

Poiché l'azione dell'esplosione si conclude alla fine di questi dieci incrementi di tempo, i valori di \bar{A} e \bar{B} in seguito rimangono costanti; se li si indica con \bar{A}^* e \bar{B}^* , le vibrazioni libere successive all'interruzione del carico sono date da (si veda l'eq.(6.6)):

$$v(t) = \bar{A}^* \sin(\omega t) - \bar{B}^* \cos(\omega t)$$



e l'ampiezza del movimento vale: $v_{max} = \sqrt{(\bar{A}^*)^2 + (\bar{B}^*)^2}$. Il fattore di amplificazione dinamica vale:

$$D = \frac{v_{max}}{p_0/k} = \frac{1.749 \text{ [mm]}}{2.452 \text{ [mm]}} = 0.714$$

In questo caso l'integrale di Duhamel si sarebbe potuto facilmente calcolare in forma chiusa, ma il vantaggio della procedura numerica è che si può applicare a qualsiasi storia di carico, pure nel caso in cui i carichi fossero stati determinati sperimentalmente e non si possano esprimere in modo analitico.

Nell'[appendice D](#) viene riportato un codice scritto in MATLAB per il calcolo dello spettro della risposta in spostamento ad alcune funzioni di carico.

**6.3 RISPOSTA DI UN SISTEMA SMORZATO**

La determinazione dell'equazione con l'integrale di Duhamel per la risposta di un sistema smorzato ad un carico dinamico qualunque è praticamente la stessa che nel caso di un sistema non smorzato; d'altra parte in questo caso la vibrazione libera iniziata con un impulso elementare $p(\tau)d\tau$ decresce in modo esponenziale. Se nell'eq. (2.26) si sostituisce $\dot{v}(0) = [p(\tau)d\tau]/m$ e si pone $v(0) = 0$ si ottiene:

$$dv(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \left[\frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D} \sin[\omega_D(t-\tau)] \right] \quad t > \tau \quad (6.13)$$

in cui il decremento esponenziale comincia dopo l'applicazione del carico, cioè all'istante $t = \tau$. Integrando sulla durata totale del carico si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (6.14)$$

che è l'equazione corrispondente all'eq(6.2), ma con smorzamento.

Se si confronta l'eq.(6.14) con l'integrale di convoluzione dell'eq.(6.3), si vede che la risposta di un sistema smorzato ad un impulso unitario è data da:

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] \quad (6.15)$$

Per calcolare numericamente la risposta del sistema smorzato, si può scrivere l'eq.(6.14) in una forma analoga all'eq.(6.6):

$$v(t) = A(t)\sin(\omega_D t) - B(t)\cos(\omega_D t) \quad (6.16)$$

dove in questo caso si ottiene:

$$A(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \cos(\omega\tau) d\tau \quad B(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \sin(\omega\tau) d\tau \quad (6.17)$$

Questi integrali possono essere calcolati per mezzo di una procedura di sommatoria equivalente a quella utilizzata precedentemente, ma tenendo conto del decremento esponenziale. Il primo integrale è dato da:

$$A(t) \cong \frac{\Delta\tau}{m\omega_D} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^A(t) \quad (6.18)$$

in cui le sommatorie possono essere espresse per le diverse procedure considerate precedentemente nel modo seguente:

- 1) Semplice somma ($\zeta = 1$):

$$\sum_1^{\bar{A}}(t) = \left\{ \sum_1^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos[\omega_D(t - \Delta\tau)] \right\} e^{-\xi\omega\Delta\tau} \quad (6.19a)$$

- 2) Metodo dei trapezi ($\zeta = 2$):

$$\sum_2^{\bar{A}}(t) = \left\{ \sum_2^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos[\omega_D(t - \Delta\tau)] \right\} e^{-\xi\omega\Delta\tau} + p(t) \cos(\omega_D t) \quad (6.19b)$$

- 3) Metodo di Simpson ($\zeta = 3$):

$$\sum_3^{\bar{A}}(t) = \left\{ \sum_3^{\bar{A}}(t - 2\Delta\tau) + p(t - 2\Delta\tau) \cos[\omega_D(t - 2\Delta\tau)] \right\} e^{-\xi\omega 2\Delta\tau} + \quad (6.19c)$$



$$+ 4p(t - \Delta\tau)\cos[\omega_D(t - \Delta\tau)]e^{-\xi\omega\Delta\tau} + p(t)\cos(\omega_D t)$$

Il termine $B(t)$ può essere calcolato con delle espressioni identiche, ma con la funzione seno al posto della funzione coseno.

La precisione della soluzione che ci si può attendere da questo tipo di procedura numerica dipende naturalmente dall'intervallo $\Delta\tau$. In generale, deve essere scelto sufficientemente corto in modo tale che sia la funzione di carico che le funzioni trigonometriche siano sufficientemente ben definite:

$\Delta\tau \leq T/10$ è una regola pratica molto utilizzata e che generalmente fornisce buoni risultati.

La precisione e l'ammontare dei calcoli necessari crescono con l'ordine del processo di sommatoria; come regola generale, la precisione migliore fornita dal metodo di Simpson giustifica il suo uso non ostante la maggiore complessità numerica.

ESEMPIO E6.2 – Per dimostrare come sia facile includere lo smorzamento nel calcolo numerico dell'integrale di Duhamel, qui di seguito sarà ripetuto il calcolo della risposta del sistema rappresentato nella Fig. E6.1 utilizzando un rapporto di smorzamento ξ del 5%. Come fatto precedentemente, gli integrali saranno calcolati con il metodo di Simpson e quindi sarà utilizzata l'eq.(6.19c). La fig. E6.2 presenta i diagrammi delle forze di richiamo elastico nel caso di assenza o meno dello smorzamento. I calcoli sono stati eseguiti dal programma [appendice C](#). Si può osservare che lo smorzamento ha un effetto trascurabile durante la prima parte della risposta, ma successivamente provoca nel tempo una riduzione sensibile della risposta massima.

Lo spostamento massimo del sistema smorzato vale: $v_{max} = 1.625 [mm]$ e di conseguenza il Fattore d'amplificazione dinamica del sistema smorzato vale $D = 0.663$.

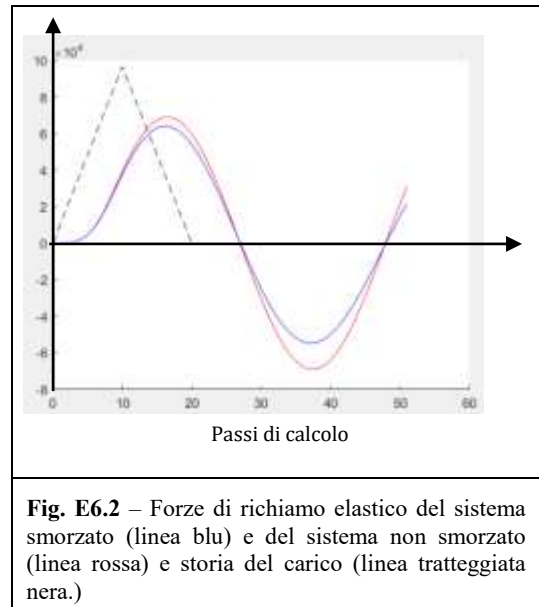


Fig. E6.2 – Forze di richiamo elastico del sistema smorzato (linea blu) e del sistema non smorzato (linea rossa) e storia del carico (linea tratteggiata nera.)

6.4 DETERMINAZIONE DELLA RISPOSTA SULL'INSIEME DEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Lo studio precedente nel dominio del tempo è completamente generale e può servire a determinare la risposta di qualsiasi sistema lineare ad un grado di libertà sottoposto ad una qualsiasi eccitazione; ma talvolta è più comodo effettuare lo studio nel dominio delle frequenze. Il calcolo nel dominio delle frequenze è sostanzialmente analogo allo studio in presenza di carichi periodici presentato nel capitolo 4. I due metodi consistono nell'esprimere il carico applicato per mezzo delle sue componenti armoniche, nel calcolare la risposta della struttura ad ogni carico armonico e nel sommare le risposte armoniche per ottenere la risposta totale. D'altra parte per estendere la tecnica dei carichi periodici a quelli di qualsiasi tipo, è necessario generalizzare l'applicazione delle serie di Fourier alla rappresentazione delle funzioni non periodiche. In quanto segue, sarà comodo utilizzare la forma esponenziale delle serie di Fourier, cioè le eq.(4.6) e (4.7) che qui vengono riproposte:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\bar{\omega}_1 t} \tag{4.6}$$

$$c_n = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot e^{-in\bar{\omega}_1 t} \cdot dt \tag{4.7}$$

Si consideri per esempio il carico non periodico qualunque della fig.6.3. Se questa funzione è rappresentata con una serie di Fourier, i coefficienti c_n ottenuti attraverso l'integrazione dell'eq.(4.7) nell'intervallo $0 < t < T_p$ definiscono in reltà la funzione periodica rappresentata con le linee tratteggiate e con le linee continue.

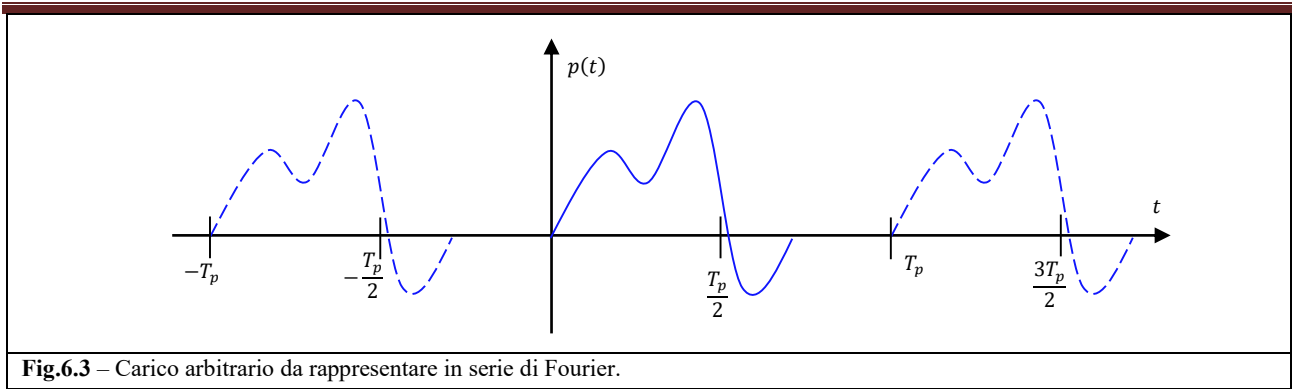


Fig.6.3 – Carico arbitrario da rappresentare in serie di Fourier.

Ma si può osservare che i carichi ripetitivi fittizi (quelli rappresentati con le linee tratteggiate) possono essere eliminati allungando il periodo di carico fino all'infinito. E' quindi necessario riformulare l'espressione della serie di Fourier in modo che si estenda su un intervallo di tempo infinito. A questo scopo si riscrivono le eq.(4.6) e (4.7) in forma leggermente modificata, utilizzando una notazione definita nel modo seguente:

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} \equiv \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \qquad n \bar{\omega}_1 = n \Delta\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}_n \qquad c_n \equiv \frac{1}{T_p} c(\bar{\omega}_n) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} c(\bar{\omega}_n)$$

Con queste nuove definizioni, le eq.(4.6) e(4.7) assumono la forma:

$$p(t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(\bar{\omega}_n) \exp(i\bar{\omega}_n t) \qquad (6.20)$$

$$c(\bar{\omega}_n) = T_p c_n = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} p(t) \cdot \exp(-i\bar{\omega}_n t) \cdot dt \qquad (6.21)$$

dove si è tenuto conto del fatto che gli estremi d'integrazione sono arbitrari purché permettano di coprire un periodo di carico completo.

Se il periodo di carico si estende fino all'infinito ($T_p \rightarrow \infty$), l'incremento delle frequenze diventa infinitesimo ($\Delta\bar{\omega} \rightarrow d\bar{\omega}$) e le frequenze discrete $\bar{\omega}_n$ diventano una funzione continua di $\bar{\omega}$. Quindi, al limite, l'espressione della serie di Fourier dell'eq.(6.20) diventa il seguente *integrale di Fourier*:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} c(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \qquad (6.22)$$

dove la funzione ampiezza armonica è data da:

$$c(\bar{\omega}) = \int_{t=-\infty}^{\infty} p(t) \cdot \exp(-i\bar{\omega}t) \cdot dt \qquad (6.23)$$

I due integrali che precedono sono noti sotto il nome di *formule di reciprocità di Fourier*, perché la funzione del tempo $p(t)$ si può dedurre dalla funzione della frequenza $c(\omega)$ e viceversa per mezzo di procedure equivalenti. Una condizione necessaria per l'esistenza della trasformata di Fourier è che l'integrale:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |p(t)| \cdot dt$$

sia finito.

Per analogia con l'espressione di Fourier dell'eq.(6.20), l'integrale di Fourier dell'eq.(6.22) si può interpretare come la rappresentazione di un carico qualsiasi sotto forma di una somma infinita di componenti armoniche, dove $\frac{1}{2\pi} c(\bar{\omega})$ definisce l'ampiezza per unità di $\bar{\omega}$ della componente del carico di frequenza $\bar{\omega}$. La risposta totale si può quindi ottenere sommando queste componenti della risposta sull'intero intervallo di



frequenze. L'espressione matematica di questa idea conduce all'equazione di base dello studio della risposta sull'insieme del dominio delle frequenze:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega})c(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \quad (6.24)$$

Per applicare questo metodo è necessario calcolare le componenti armoniche $c(\bar{\omega})$ del carico dato per mezzo dell'eq.(6.23) e utilizzare la funzione della risposta in frequenza complessa per una struttura ad un solo grado di libertà, data dall'eq.(4.11):

$$H(n\bar{\omega}_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1)} = \frac{1}{k[-(n/N)^2 + 2i(n/N)\xi + 1]} \quad (4.11)$$

6.5 STUDIO NUMERICO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

L'applicazione letterale dell'analisi in frequenza precedentemente descritta si limita ai casi in cui le trasformate di Fourier delle funzioni di carico siano note; e anche in questi casi il calcolo degli integrali che ne risultano possono rivelarsi lunghi e complessi. Conviene dunque rendere il metodo di più semplice accesso formulandolo in modo numerico. La procedura numerica sarà composta da due fasi:

- Formulazione delle espressioni della trasformata discreta di Fourier corrispondenti alle espressioni integrali delle eq.(6.22) e (6.23);
- Formulazione di una tecnica numerica efficace che permetta di calcolare le trasformate discrete di Fourier. La tecnica che viene abitualmente utilizzata prende il nome di FFT (*Fast Fourier Transform*).

Trasformata discreta di Fourier

Il primo passo per ottenere le espressioni nella loro versione discreta consiste nel supporre che il carico sia periodico, di periodo T_p . In generale questa ipotesi conduce ad una soluzione approssimata, ma è necessaria per sostituire l'integrale sul dominio infinito dell'eq.(6.23) con una somma finita. La scelta del periodo di carico serve anche a definire la frequenza più bassa che può essere considerata nell'analisi; quindi:

$$\bar{\omega}_1 = \Delta\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p}$$

Il periodo del carico è quindi diviso in N incrementi di tempo uguali $\Delta t = \frac{T_p}{N}$ e il carico è definito negli istanti $t_m = m\Delta t$. Il termine esponenziale nell'eq.(6.20) può quindi scriversi:

$$\exp(i\bar{\omega}_n t_m) = \exp(i n \Delta\bar{\omega} m\Delta t) = \exp\left(2\pi i \frac{n m}{N}\right)$$

dove si è posto: $\Delta\bar{\omega} \Delta t = \frac{2\pi}{N}$ Quindi l'eq.(6.20) assume la seguente forma discreta:

$$p(t_m) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} c(\bar{\omega}_n) \exp\left(2\pi i \frac{n m}{N}\right) \quad (6.25)$$

dove la frequenza più alta da considerare è stata arbitrariamente scelta uguale a $(N-1)\Delta\bar{\omega}$.

L'espressione discreta corrispondente alla funzione ampiezza $c(\bar{\omega}_n)$ si può ottenere semplicemente sostituendo la somma di una serie finita di termini discreti all'integrale dell'eq.(6.21), da cui si ottiene il seguente risultato:

$$c(\bar{\omega}_n) = \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} p(t_m) \cdot \exp\left(-2\pi i \frac{n m}{N}\right) \quad (6.26)$$

Le eq.(6.25) e (6.26) sono le trasformate discrete di Fourier che corrispondono alle trasformate continue delle eq.(6.22) e (6.23). Quando si usano le trasformate discrete è importante ricordare che si basano sull'ipotesi di carico periodico. Per minimizzare gli errori relativi allo studio di carichi non periodici, il periodo del carico può essere esteso con l'aggiunta di un buon intervallo di carico nullo nel periodo T_p ; la storia di



carico che ne risulterà assomiglierà a quella della fig.6.3. E' bene ricordare che la FFT è ottimizzata e fornisce i risultati più precisi e veloci quando il numero di punti N è una potenza intera di 2.

L'eq.(6.24) viene sostituita da:

$$v(t_m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n)c(n) \exp\left(-2\pi i \frac{n m}{N}\right) \quad (6.27)$$
$$H(n) = \frac{1}{k(-n^2 + 2n\xi i + 1)}$$



APPENDICE A

L'integrale:

$$\frac{p_0}{m\omega} \int_0^t \tau \sin[\omega(t - \tau)] d\tau$$

può essere eseguito per parti. Data la funzione $h(\tau) = f(\tau)g(\tau)$ la sua derivata rispetto al tempo vale:

$$\dot{h}(\tau) = \dot{f}(\tau)g(\tau) + f(\tau)\dot{g}(\tau)$$

da cui

$$f(\tau)\dot{g}(\tau) = \dot{h}(\tau) - \dot{f}(\tau)g(\tau)$$

L'integrale dell'espressione precedente vale:

$$\int f(\tau)\dot{g}(\tau) d\tau = h(\tau)|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{f}(\tau)g(\tau) d\tau$$

Posto:

$$f(\tau) = \tau$$

$$\dot{g}(\tau) = \sin[\omega(t - \tau)]$$

osservando che:

$$g(\tau) = \int \dot{g}(\tau) d\tau = \int \sin[\omega(t - \tau)] d\tau = \frac{\cos[\omega(t - \tau)]}{\omega} \quad \int \cos[\omega(t - \tau)] d\tau = -\frac{\sin[\omega(t - \tau)]}{\omega}$$

risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau \sin[\omega(t - \tau)] d\tau &= f(\tau)g(\tau)|_{t_1}^{t_2} - \int_0^t \dot{f}(\tau)g(\tau) d\tau = \\ &= \tau \frac{\cos[\omega(t - \tau)]}{\omega} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{\cos[\omega(t - \tau)]}{\omega} d\tau = \frac{t}{\omega} + \frac{\sin[\omega(t - \tau)]}{\omega^2} \Big|_0^t = \frac{t}{\omega} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} \end{aligned}$$

Ricordando che $\omega^2 = \frac{k}{m}$ risulta:

$$\frac{p_0}{m\omega} \int_0^t \tau \sin[\omega(t - \tau)] d\tau = \frac{p_0}{m\omega^2} \left\{ t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right\} = \frac{p_0}{k} \left\{ t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right\}$$

**APPENDICE B****Il metodo di Newton-Cotes per il calcolo dell'integrale di Duhamel**

La funzione $f(x)$ da integrare numericamente viene campionata in n punti disposti a passo costante Δx attraverso i quali si costruisce un polinomio interpolante $p_{n-1}(x)$ di ordine $n - 1$: l'integrale della funzione $f(x)$ viene approssimato dal valore dell'integrale del polinomio che si può calcolare facilmente in modo esatto. Se i punti di campionamento n sono numerosi, il polinomio interpolante sarà di ordine elevato e presenterà forti oscillazioni: ciò conduce, in generale, a stime inattendibili degli integrali. Di conseguenza si preferisce dividere la curva $f(x)$ in brevi tratti ognuno dei quali viene campionato in pochi punti e integrato separatamente: l'integrale complessivo della funzione $f(x)$ su tutto il suo dominio d'integrazione si otterrà sommando il contributo dei diversi integrali locali. Normalmente ogni singolo tratto compreso tra la coordinata x_1 e x_n viene campionato, a passo costante, in 2, 3 oppure 4 punti attraverso i quali viene fatto passare il polinomio:

$$p_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

L'integrale esatto verrà stimato nel modo seguente:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \cong \int_{x_1}^{x_n} p_{n-1}(x)dx$$

Per semplificare i calcoli si utilizza il seguente sistema di riferimento locale:

$$\xi = \frac{x - x_1}{x_n - x_1} = \frac{x - x_1}{\Delta x}$$

da cui risulta:

$$dx = \Delta x d\xi$$

Nel nuovo sistema di riferimento, il polinomio assumerà la forma:

$$p_{n-1}(\xi) = a_0 + a_1\xi + \dots + a_{n-1}\xi^{n-1}$$

L'integrale esatto verrà stimato nel modo seguente:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \cong \Delta x \int_0^1 p_{n-1}(\xi)d\xi = \Delta x \left[a_0\xi + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} \xi^n \right]_0^1 = \Delta x \left(a_0 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} \right)$$

1) Il metodo del trapezio

Consiste nel campionare il tratto di funzione in $n = 2$ punti. In questo caso il polinomio avrà la forma:

$$p_1(\xi) = a_0 + a_1\xi$$

La retta deve passare per i punti campionati quindi:

$$\begin{cases} \text{per } \xi = 0 & p_1(0) = a_0 = f(x_1) \\ \text{per } \xi = 1 & p_1(1) = a_0 + a_1 = f(x_2) \end{cases}$$

da cui:

$$a_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

Nel dominio d'integrazione $x_1 \div x_2$ l'integrale vale:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \cong \Delta x \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \right) = \Delta x \left[f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2} \right] = \frac{\Delta x}{2} [f(x_1) + f(x_2)]$$

dove $\Delta x = x_2 - x_1$.

2) Il metodo di Simpson

Consiste nel sostituire il tratto di curva con una parabola passante per $n = 3$ punti:



$$p_2(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2$$

La parabola deve passare per i punti campionati; è quindi possibile scrivere il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix}$$

I parametri del polinomio si trovano invertendo la matrice ed eseguendo il seguente prodotto:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ -3f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3) \\ f(x_1) - 4f(x_2) + 2f(x_3) \end{Bmatrix}$$

L' integrale vale:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_3} p_2(x) dx &\cong \Delta x \left(a_0 + a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{3} \right) \\ &= \Delta x \left(f(x_1) + \frac{-3f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)}{2} + \frac{2f(x_1) - 4f(x_2) + 2f(x_3)}{3} \right) \\ &= \Delta x \left(\frac{6f(x_1) - 9f(x_1) + 12f(x_2) - 3f(x_3) + 4f(x_1) - 8f(x_2) + 4f(x_3)}{6} \right) \\ &= \Delta x \left(\frac{f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)}{6} \right) \end{aligned}$$

Se si indica con p il passo tra i punti di campionamento, risulta che $\Delta x = 2p$ e quindi l'espressione precedente assume la forma:

$$\int_{x_1}^{x_3} p_2(x) dx \cong \frac{p}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)]$$

o, in altra forma:

$$\int_{x_1}^{x_3} p_2(x) dx \cong \frac{p}{3} [f(x_1) + 4f(x_1 + p) + f(x_2 + 2p)]$$

3) Divisione dell'intervallo in 3 tratti uguali: $n = 4$ punti di campionamento

Se si utilizzano 4 punti, il polinomio diventa una cubica che deve passare per i punti campionati; è quindi possibile scrivere il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & (1/3)^2 & (1/3)^3 \\ 1 & 2/3 & (2/3)^2 & (2/3)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{Bmatrix}$$

la cui soluzione si ottiene invertendo la matrice ed eseguendo il seguente prodotto:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 18 & -9 & 2 \\ 18 & -45 & 36 & -9 \\ -9 & 27 & -27 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 2f(x_1) \\ -11f(x_1) + 18f(x_2) - 9f(x_3) + 2f(x_4) \\ 18f(x_1) - 45f(x_2) + 36f(x_3) - 9f(x_4) \\ -9f(x_1) + 27f(x_2) - 27f(x_3) + 9f(x_4) \end{Bmatrix}$$

L' integrale vale:



$$\int_{x_1}^{x_4} p_3(x) dx \cong \Delta x \left(a_0 + a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{3} + a_3 \frac{1}{4} \right)$$

Sviluppando si ottiene:

$$\int_{x_1}^{x_4} p_3(x) dx \cong \frac{\Delta x}{2} \left(2f(x_1) + \frac{-11f(x_1) + 18f(x_2) - 9f(x_3) + 2f(x_4)}{2} \right. \\ \left. + \frac{18f(x_1) - 45f(x_2) + 36f(x_3) - 9f(x_4)}{3} + \frac{-9f(x_1) + 27f(x_2) - 27f(x_3) + 9f(x_4)}{4} \right)$$

Semplificando:

$$\int_{x_1}^{x_4} p_3(x) dx \cong \Delta x \left(\frac{f(x_1) + 3p_3 f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)}{8} \right)$$

Se si indica con p il passo tra i punti di campionamento, risulta che $\Delta x = 3p$ e quindi l'espressione precedente assume la forma:

$$\int_{x_1}^{x_4} p_3(x) dx \cong \frac{3}{8} p [f(x_1) + 3p_3 f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)]$$

o, in altra forma:

$$\int_{x_1}^{x_4} p_3(x) dx \cong \frac{3}{8} p [f(x_1) + 3p_3 f(x_1 + p) + 3f(x_1 + 2p) + f(x_1 + 3p)]$$



APPENDICE C

Integrale di Duhamel con il metodo di Simpson e presenza dello smorzamento

```
disp('Serbatoio d'acqua sopraelevato sottoposto ad un'esplosione');
disp('Integrale di Duhamel eseguito con il metodo di Simpson');
m = 4.38*10^4; % kg
k = 3.94*10^7; % N/m
xsi = 0.05; % Fattore di smorzamento pari al 5%
Omega = sqrt(k/m);
OmegaD = Omega*sqrt(1-xsi^2); % Pseudo-frequenza angolare
T = (2*pi)/Omega;
fprintf('Frequenza propria del sistema: Omega = %.3f [rad/s]\n',Omega);
fprintf('Periodo = %.3f [s]\n',T);
fprintf('Frequenza: f = %.3f [Hz]\n',Omega/(2*pi));
fprintf('Rapporto di smorzamento: xsi = %.3f\n',xsi);
fprintf('Pseudo-Frequenza angolare: OmegaD = %.3f [rad/s]\n',OmegaD);
disp(' ');

% Carico triangolare crescente tra 0 e t1
% poi triangolare decrescente tra t1 e t2
Pmax = 96600; % N
sstat = pmax/k; % Spostamento massimo se il carico fosse statico
t1 = 0.025; % sec
t2 = 0.05; % sec
t3 = 5*t2; % tempo finale del calcolo
passo = min(T/10,t2/20); % passo d'integrazione consigliato

% Per la regola di Simpson in ogni intervallo d'integrazione il numero di passi deve essere pari
Npassi = fix(t2/passo);
if mod(Npassi,2) == 1
    Npassi = Npassi + 1;
end
passo = t2/(Npassi-1);

fprintf('N. passi d'integrazione nel: Npassi = %u\n',Npassi);
fprintf('Passo d'integrazione: p = %f [s]\n',passo);
disp(' ');

% Genera la funzione di carico triangolare
NpassiTot = fix(t3/passo);
p = zeros(NpassiTot+1,1);
Coef = pmax/passo;
for i = 1: Npassi+1
    px = (i-1)*coef;
    p(i) = min(px,2*pmax-px);
end
s_iniz = 0; % Condizioni iniziali: Spostamento nullo
v_iniz = 0; % Condizioni iniziali: Velocità nulla

disp('Calcolo della risposta del sistema non smorzato');
[s, tempo] = Duhamel_Simpson(m, Omega, 0.0, p, passo, s_iniz, v_iniz); % Sistema non smorzato

disp('Calcolo della risposta del sistema smorzato');
[sD, tempo] = Duhamel_Simpson(m, Omega, xsi, p, passo, s_iniz, v_iniz); % Sistema smorzato

smax = max(s); % Spostamento del sistema non smorzato
smaxD = max(sD); % Spostamento del sistema smorzato
D = smaxD/vstat;
fprintf('Spostamento massimo se il carico fosse statico: vstat = %.3f [mm]\n',sstat*1000);
fprintf('Spostamento massimo del sistema non smorzato: s_max = %.3f\n',smax*1000);
fprintf('Spostamento massimo del sistema smorzato: s_max = %.3f\n',smaxD*1000);
fprintf('Fattore d'amplificazione dinamica del sistema smorzato: D = %.3f\n',D);

figure; hold on;
title('Spostamenti causati da un'esplosione');
plot(tempo, 1000*s, '-r'); % Spostamenti del sistema non smorzato in mm
plot(tempo, 1000*sD, '-b'); % Spostamenti del sistema smorzato in mm
input('INVIO ... per continuare', 's');

Fs = k*s; % Forza di richiamo elastico
FsD = k*sD; % Forza di richiamo elastico del sistema smorzato
figure; hold on;
plot(tempo, Fs, '-r')
plot(tempo, FsD, '-b')
```



```
Np1 = fix(t1/passo);  
Np2 = Np1 + fix((t2-t1)/passo);  
plot([0,Np1,Np2],[0,pmax,0], '--k');
```

```
function [v, tempo] = Duhamel_Simpson(m, Omega, xsi, p, Passot, s_iniz, v_iniz)  
%Duhamel_Simpson Integrale di Duhamel eseguito con il metodo di Simpson  
% m = Massa del sistema  
% Omega = Frequenza angolare propria del sistema  
% xsi = Rapporto di smorzamento  
% p = Storia di Carico  
% v = Risposta del sistema  
% tempo = Vettore degli istanti di tempo associati alla risposta  
% Passot = Passo temporale con il quale è stato generato il carico  
% s_iniz = Spostamento all'istante iniziale  
% v_iniz = Velocità all'istante iniziale  
% =====  
Np = 3; % Metodo di Simpson  
Npunti = size(p,1);  
if mod(Npunti,2) == 0  
    v = zeros(Npunti/2,1);  
    tempo = zeros(Npunti/2,1);  
else  
    v = zeros((Npunti-1)/2,1);  
    tempo = zeros((Npunti-1)/2,1);  
end  
OmegaD = Omega*sqrt(1-xsi^2); % Pseudo-frequenza angolare  
coef = Passot/(Np*m*OmegaD);  
A = 0;  
B = 0;  
d = -xsi*Omega*Passot;  
tau0 = 0;  
i = 1;  
v(1) = s_iniz;  
tempo(1) = 0;  
% Integrale di Duhamel  
for j2 = 3:2:Npunti % Punti campionati  
    j1 = j2 - 1;  
    j0 = j2 - 2;  
    tau1 = tau0 + Passot;  
    t = tau1 + Passot;  
    DA = 4*p(j1)*cos(OmegaD*tau1)*exp(d) + p(j2)*cos(OmegaD*t);  
    A = (A + p(j0)*cos(OmegaD*tau0))*exp(2*d) + DA;  
    DB = 4*p(j1)*sin(OmegaD*tau1)*exp(d) + p(j2)*sin(OmegaD*t);  
    B = (B + p(j0)*sin(OmegaD*tau0))*exp(2*d) + DB;  
    i = i + 1;  
    vp = coef*(A*sin(OmegaD*t) - B*cos(OmegaD*t)); % S. particolare  
    vo = exp(-xsi*Omega*t)*((v_iniz/Omega)*sin(OmegaD*t) + s_iniz*cos(OmegaD*t)); % S. omogenea  
    v(i) = vo + vp;  
    tempo(i) = t;  
    tau0 = t;  
end  
end
```



APPENDICE D

Calcolo dello spettro della risposta ad alcune forme della funzione di carico

```
clear;
pack;
clc;
close all;

disp('Calcolo dello spettro della risposta di alcune funzioni di carico');

m = 4.0*10^4;           % kg
k = 4.0*10^7;           % N/m
xsi = 0.0;              % Fattore di smorzamento assente
Omega = sqrt(k/m);     % Frequenza naturale del sistema
pmax = 10^5;            % Carico esterno in [N]
Sstatico = pmax/k;     % Spostamento statico
T = (2*pi)/Omega;
s_iniz = 0;             % Spostamento all'istante iniziale
v_iniz = 0;             % Velocità all'istante iniziale
Npassi = 1024;
fprintf('Massa = %.1f [kg]\n',m);
fprintf('Rigidezza = %.1f [N/m]\n',k);
fprintf('Frequenza angolare del sistema: Omega = %.3f [rad/s]\n',Omega);
fprintf('Periodo naturale del sistema: T = %.3f [s]\n',T);
fprintf('Frequenza naturale: f = %.3f [Hz]\n',Omega/(2*pi));
fprintf('Spostamento statico: vstat = %.3e\n',Sstatico);
disp(' ');

% =====
% Scegli la forma del carico esterno
% =====
D = zeros(100,4);
t1sT = zeros(100,1);
for tipo = 1:4
    j = 0;
    for r1 = 0.02:0.02:2           % Calcola lo spettro nell'intervallo 0.1 < t1/T < 2
        j = j + 1;
        t1sT(j) = r1;
        t1 = r1*T;
        Tp = 4*T;
        OmegaP = 2*pi/Tp;         % Frequenza angolare del carico
        passo = Tp/(Npassi-1);
        Beta1 = OmegaP/Omega;

        % =====
        % Genera il carico esterno
        % =====
        p = zeros(Npassi,1);
        Tf = zeros(Npassi,1);
        if tipo == 1             % Impulso di forma sinusoidale
            Tf = 0:passo:Tp;
            i = 0;
            omega = pi/t1;
            for t = 0: passo: t1
                i = i + 1;
                p(i) = pmax*sin(omega*t);
            end
        elseif tipo == 2         % Impulso a gradino
            Tf = 0:passo:Tp;
            i = 0;
            for t = 0: passo: t1
                i = i + 1;
                p(i) = pmax;
            end
        elseif tipo == 3         % Impulso triangolare decrescente
            Tf = 0:passo:Tp;
            i = 0;
            coef = -pmax/t1;
            for t = 0: passo: t1
                i = i + 1;
                p(i) = coef*t + pmax ;
            end
        end
    end
end
```



```
elseif tipo == 4      % Impulso triangolare sali/scendi
    Tf = 0:passo:Tp;
    i = 0;
    coef = 2*pmax/t1;
    for t = 0: passo: t1/2
        i = i + 1;
        p(i) = coef*t ;
    end
    coef = -2*pmax/t1;
    for t = t1/2+passo: passo: t1
        i = i + 1;
        p(i) = coef*t + 2*pmax;
    end
end

[v, tempo] = Duhamel_Simpson(m, Omega, 0.0, p, passo, s_iniz, v_iniz);
D(j,tipo) = max(abs(v))/Sstatico;
end
end
title('Spettro di alcune funzioni di carico')
figure(1); hold on;
plot(t1sT,D);

input('INVIO ... per continuare');
close all;
```