CAP.5 - RISPOSTA AD UN IMPULSO

5.1 NATURA DEI CARICHI IMPULSIVI

Un carico impulsivo consiste in un unico impulso simile a quello rappresentato nella fig.5.1, generalmente di breve durata. I carichi impulsivi, per esempio gli urti, sono di grande importanza nel calcolo di certe strutture, come per esempio gli autoveicoli o le gru su ruote. Lo smorzamento presenta allora molta meno importanza per la risposta massima che non nel caso dei carichi periodici. La risposta massima ad un carico impulsivo verrà raggiunta in un intervallo di tempo molto corto, prima che le forze di smorzamento abbiano avuto il tempo di assorbire un'energia conseguente. Per questa ragione nel seguito si esaminerà solo la risposta non smorzata.

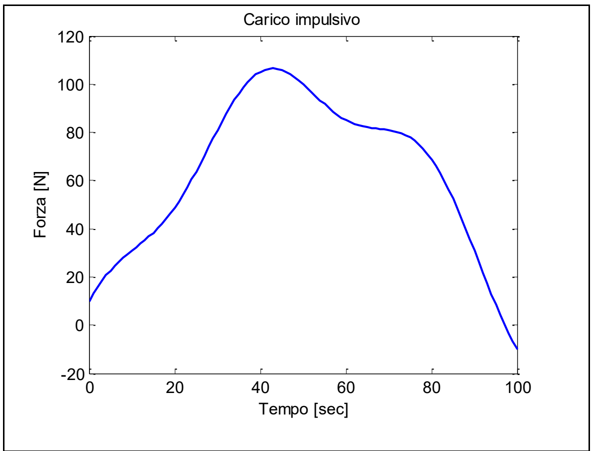

Fig.5.1 – Carico impulsivo qualunque.

5.2 IMPULSO DI FORMA SINUSOIDALE

Certi carichi impulsivi possono essere rappresentati per mezzo di funzioni analitiche semplici e le soluzioni delle equazioni del moto si possono ottenere in forma chiusa. Si consideri per esempio l'impulso sinusoidale rappresentata nella Fig.5.2. La risposta sarà divisa in due fasi, corrispondenti la prima all'intervallo durante il quale agisce il carico, e l'altra alla fase di oscillazione libera.

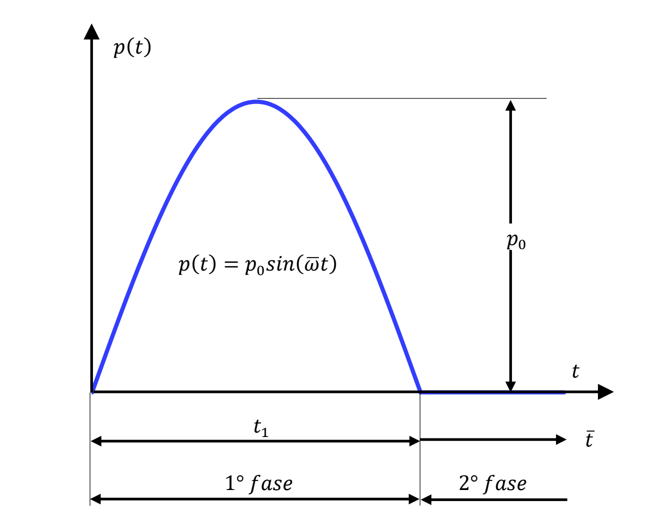

Fig.5.2 – Carico impulsivo sinusoidale

1° FASE: La struttura è sottoposta ad un carico sinusoidale iniziato a riposo. La risposta non smorzata, che comprende il transitorio ed il termine di regime permanente, è data dall'eq. (3.9):

$$\text{per} \qquad 0 \le t \le t_1 \qquad v(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}[sin(\bar{\omega}t) - \beta sin(\omega t)] \qquad (5.1)$$

2° FASE: Il movimento di vibrazione libera che si produce in seguito dipende dallo spostamento $v(t_1)$ e dalla velocità $\dot{v}(t_1)$ alla fine della 1° fase, e si può esprimere nel modo seguente (vedi eq.2.10):

$$\text{per} \qquad \bar{t} = t - t_1 \ge 0 \qquad v(\bar{t}) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} sin(\omega\bar{t}) + v(t_1)cos(\omega\bar{t}) \qquad (5.2)$$

L'ampiezza della risposta dinamica prodotta dal carico impulsivo dipende dal rapporto tra la durata del carico ed il periodo della vibrazione propria della struttura. Il **fattore della risposta**:

$$R(t) = \frac{v(t)}{p_0/k}$$

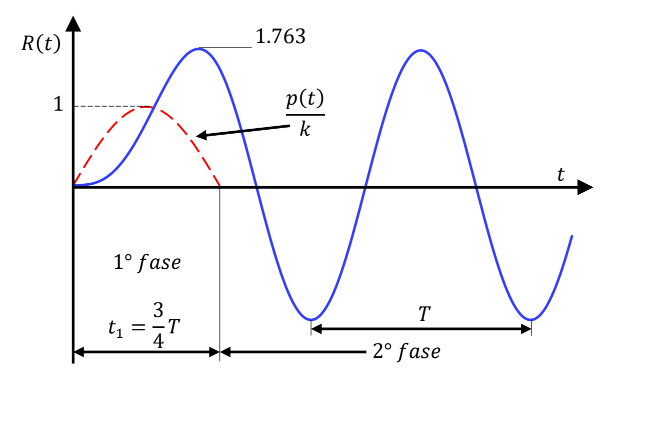

Fig.5.3 – Fattore di risposta ad un carico sinusoidale.

è rappresentato nella Fig.5.3 nel caso in cui $t_1/T = 3/4$. Per un confronto, sullo stesso diagramma è stato tracciato di colore rosso anche il rapporto $p(t)/k$, che presenta un valore massimo unitario nella scala del fattore della risposta.

Nella meccanica strutturale, la risposta massima prodotta dal carico impulsivo presenta spesso più interesse che la storia completa. L'istante in cui si presenta può determinarsi annullando la derivata rispetto al tempo dell'eq.(5.1).

Si ottiene quindi:

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}[\overline{\omega}cos(\overline{\omega}t) - \beta\omega cos(\omega t)] = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}[\overline{\omega}cos(\overline{\omega}t) - \overline{\omega}cos(\omega t)]$$

da cui:

$$cos(\overline{\omega}t) = cos(\omega t) \qquad \overline{\omega}t = 2\pi n \pm \omega t \qquad n = 0, \pm 1, 2, 3, \ldots \qquad (5.3)$$

Poiché il carico termina di agire quando $t_1 = \pi/\overline{\omega}$, è possibile applicare questa espressione fintanto che $\overline{\omega}t \leq \pi$, cioè se la risposta massima si produce durante l'applicazione del carico. Nel caso particolare in cui la frequenza del carico sia prossima a quella della vibrazione libera, cioè quando $\overline{\omega} \to \omega$, il momento in cui si produce la risposta massima si ottiene ponendo $n = 1$ ed utilizzando il segno negativo dell'eq.(5.3), si ottiene l'espressione:

$$\overline{\omega}t = 2\pi - \omega t \qquad \text{da cui} \qquad t = \frac{2\pi}{\overline{\omega} + \omega} \qquad \text{e quindi} \qquad \overline{\omega}t = \overline{\omega}\frac{2\pi}{\overline{\omega} + \omega} = \frac{2\pi}{1 + \omega/\overline{\omega}} \qquad (5.4)$$

L'ampiezza della risposta massima si può allora ottenere sostituendo l'eq.(5.4) nell'eq.(5.1); il risultato è applicabile solo quando $\overline{\omega}t \leq \pi$, il che avviene se $\beta \leq 1$, cioè se $\overline{\omega} < \omega$.

Per $\beta > 1$ (cioè per $\overline{\omega} > \omega$), la risposta massima si manifesta durante la fase di vibrazione libera (2° fase). Gli spostamenti e le velocità iniziali di questa fase si ottengono introducendo $\overline{\omega}t_1 = \pi$ nell'eq.(5.1):

$$\begin{cases} v(t_1) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left[0 - \beta sin\left(\omega\frac{\pi}{\overline{\omega}}\right)\right] = \frac{p_0}{k}\frac{-\beta}{(1-\beta^2)}sin\left(\frac{\pi}{\beta}\right) \\ \dot{v}(t_1) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left[-\overline{\omega} - \beta\omega cos\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right] = \frac{p_0}{k}\frac{-\overline{\omega}}{(1-\beta^2)}\left[1 + cos\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right] \end{cases} \qquad (5.5)$$

L'ampiezza di questo moto di vibrazione libera è allora data dall'eq.(2.14), cioè:

$$\rho = \sqrt{\left[\frac{\dot{v}(t_1)}{\omega}\right]^2 + [v(t_1)]^2} = \frac{p_0}{k}\frac{\beta}{(1-\beta^2)}\sqrt{2 + 2cos\left(\frac{\pi}{\beta}\right)}$$

Ricordando la formula trigonometrica di bisezione:

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(\alpha)}{2}} \qquad \text{da cui:} \qquad 2\sqrt{\frac{1 + cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{2 + 2cos(\alpha)} = 2cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

il fattore d'amplificazione dinamico in questo caso vale:

per $\beta \leq 1$ $\quad 0 \leq t \leq t_1$ $$D = \frac{v_{max}}{p_0/k} = \frac{1}{(1-\beta^2)}\left[sin\left(\frac{\beta}{1+\beta}2\pi\right) - \beta sin\left(\frac{1}{1+\beta}2\pi\right)\right] \quad (5.6a)$$

per $\beta > 1$ $\quad t \geq t_1$ $$D = \frac{v_{max}}{p_0/k} = \frac{2\beta}{(1-\beta^2)}cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) \quad (5.6b)$$

ESEMPIO E5.1 – Si chiede di determinare la risposta massima ad un impulso sinusoidale di *lunga durata* per il quale il massimo si manifesta quando il carico sta ancora agendo. Si consideri il caso in cui $\beta = 2/3$, da cui risulta $t_1 = (3/4)T$: sostituendo questo valore nell'eq.(5.6a), il fattore d'amplificazione dinamica diventa:

$$D = \frac{1}{\left(1-\frac{4}{9}\right)}\left[sin\left(\frac{4}{5}\pi\right) - \frac{2}{3}sin\left(\frac{6}{5}\pi\right)\right] = 1.763$$

Come esempio specifico d'impulso di *breve durata* per il quale la risposta massima si produce durante la fase in vibrazione libera, si prenda il caso in cui $\beta = 4/3$ da cui risulta $t_1 = (3/8)T$; sostituendo questo valore nell'eq.(5.6b), il fattore d'amplificazione dinamica diventa:

$$D = \frac{2(4/3)}{\left(1-\frac{16}{9}\right)}cos\left[\frac{\pi}{2(4/3)}\right] = 1.312$$

Con una procedura analoga, dall'eq.(3.31) (cioè dall'equazione della risonanza) si può dedurre la risposta massima a un carico impulsivo risonante ($\beta = 1$). In questo caso la risposta massima si manifesta alla fine dell'impulso, $\overline{\omega}t = \pi$ e il fattore di amplificazione dinamica vale:

$$D = \frac{1}{2}[sin(\omega t) - \omega t\, cos(\omega t)] = \frac{1}{2}[sin(\pi) - \pi\, cos(\pi t)] = \frac{\pi}{2} = 1.571$$

5.3 IMPULSO DI FORMA RETTANGOLARE

Il secondo tipo d'impulso che si prenderà in considerazione è rettangolare. La risposta sarà ancora una volta divisa in due fasi: caricamento e vibrazioni libere.

1° FASE: La struttura è sottoposta ad un carico che raggiunge il massimo in un istante e che è applicato costantemente per un dato tempo. La soluzione particolare per un carico di questo tipo è semplicemente la freccia statica corrispondente:

$$v_p = \frac{p_0}{k} \quad (5.8)$$

Da questo risultato si ricava la soluzione generale con le costanti di vibrazione libera calcolate per soddisfare le condizioni iniziali (a riposo):

per $\quad 0 \leq t \leq t_1 \quad$ $$v(t) = \frac{p_0}{k}[1 - cos(\omega t)] \quad (5.9)$$

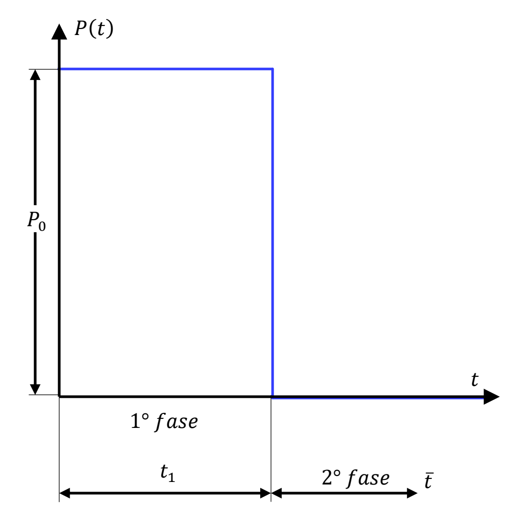

Fig.5.4 – Carico impulsivo rettangolare

2° FASE: Il movimento di vibrazione libera che si produce inseguito dipende dallo spostamento $v(t_1)$ e dalla velocità $\dot{v}(t_1)$ alla fine della 1° fase, e si può esprimere nel modo seguente (vedi eq.(5.2)):

per $\quad \bar{t} = t - t_1 \geq 0 \qquad v(\bar{t}) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} sin(\omega\bar{t}) + v(t_1)cos(\omega\bar{t}) \qquad (5.10)$

Per questo impulso rettangolare è evidente che la risposta massima si produrrà sempre nella prima fase se $t_1 \geq T/2$ e che il fattore di amplificazione dinamico D in questo caso vale 2. Per dei carichi di durata più breve, la risposta massima si produrrà durante la vibrazione libera della 2° fase e l'ampiezza della risposta sarà data dall'eq.(2.14):

$$\rho = v_{max} = \sqrt{\left[\frac{\dot{v}(t_1)}{\omega}\right]^2 + [v(t_1)]^2} \qquad (5.11)$$

Ponendo:

$$v(t_1) = \frac{p_0}{k}[1 - cos(\omega t_1)] \qquad \dot{v}(t_1) = \frac{\omega p_0}{k} sin(\omega t_1)$$

Si ottiene:

$$v_{max} = \frac{p_0}{k}\sqrt{sin^2(\omega t_1) + [1 - cos(\omega t_1)]^2} = \frac{p_0}{k}\sqrt{sin^2(\omega t_1) + 1 - 2cos(\omega t_1) + cos^2(\omega t_1)} = \frac{p_0}{k}\sqrt{2 - 2cos(\omega t_1)}$$

da cui

$$D = \frac{v_{max}}{p_0/k} = \sqrt{2 - 2cos(\omega t_1)} = \sqrt{2 - 2cos\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right)} = 2sin\left(\frac{\pi t_1}{T}\right) \qquad \text{per} \qquad \frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2} \qquad (5.12)$$

Quindi il fattore di amplificazione dinamico varia come il seno del rapporto $\frac{t_1}{T}$ per i rapporti inferiori a $\frac{1}{2}$.

5.4 IMPULSO DI FORMA TRIANGOLARE

L'ultimo carico impulsivo che verrà preso in considerazione sarà l'impulso triangolare decrescente.

1° FASE: in questa fase il carico ha la forma $p_0\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$ e si può facilmente mostrare che la soluzione particolare corrispondente a questo carico è:

$$v_p(t) = \frac{p_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \qquad (5.13)$$

Supponendo condizioni iniziali nulle, il calcolo delle costanti della vibrazione libera fornisce:

$$v(t) = \frac{p_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) + Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{p_0}{kt_1} + A\omega cos(\omega t) - B\omega sin(\omega t)$$

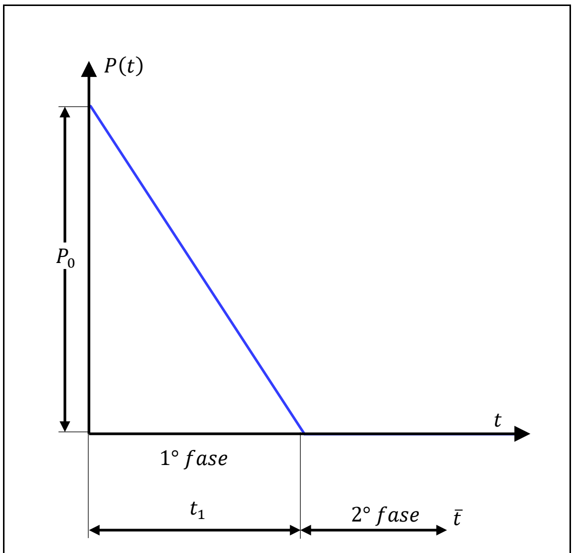

Fig.5.5 – Carico impulsivo triangolare

Al tempo $t = 0 \qquad v(t=0) = \frac{p_0}{k} + B = 0 \qquad$ da cui: $\qquad B = -\frac{p_0}{k}$

$\dot{v}(t=0) = -\frac{p_0}{kt_1} + A\omega = 0 \qquad$ da cui: $\qquad A = \frac{p_0}{k\omega t_1}$

da cui:

$$v(t) = \frac{p_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) + \frac{p_0}{k\omega t_1} sin(\omega t) - \frac{p_0}{k} cos(\omega t) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{sin(\omega t)}{\omega t_1} - cos(\omega t) + 1 - \frac{t}{t_1}\right) \qquad (5.14)$$

2° FASE: i valori dell'eq.(5.14) e della sua derivata prima alla fine della prima fase (al tempo $t = t_1$) valgono:

$$v(t = t_1) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{sin(\omega t_1)}{\omega t_1} - cos(\omega t_1)\right) \qquad (5.15)$$

$$\dot{v}(t = t_1) = \frac{p_0 \omega}{k}\left(\frac{cos(\omega t_1)}{\omega t_1} + sin(\omega t_1) - \frac{1}{\omega t_1}\right) \qquad (5.16)$$

Sostituendo queste equazioni nell'eq.(5.2) si ottiene la risposta in vibrazione libera della 2° fase. Come fatto nei casi precedenti, si determineranno i valori massimi di queste funzioni calcolando i loro valori nell'istante in cui la velocità si annulla. Quando il carico viene applicato per un tempo molto breve ($\frac{t_1}{T} < 0.4$), la risposta massima di manifesta durante la vibrazione libera nella 2° fase; negli altri casi essa si produrrà durante l'intervallo di carico (1° fase). La velocità durante la fase di carico vale:

$$\dot{v}(t) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{cos(\omega t)}{t_1} + \omega sin(\omega t) - \frac{1}{t_1}\right)$$

Questa espressione si annulla quando: $cos(\omega t) + \omega t_1 sin(\omega t) = 1$: se ciò capita per un tempo $t < t_1$ il massimo è raggiunto durante la 1° fase, quando cioè è ancora applicato il carico. In caso contrario, il massimo è raggiunto nella seconda fase, per cui è sufficiente calcolare l'ampiezza con l'eq. (5.11)

Nella seguente tabella sono stati riportati i valori del fattore di amplificazione dinamico *D* per diverse durate di carico.

t_1/T	0.2	0.4	0.5	0.75	1.00	1.50	2.00
D	0.601	1.051	1.196	1.422	1.550	1.689	1.763

Tab. 5.1 – Fattore d'amplificazione dinamica nel caso d'impulso triangolare decrescente

5.5 SPETTRO DELLA RISPOSTA

In seguito ai risultati precedenti si osserva che la risposta massima prodotta in una struttura sotto-smorzata ad un solo grado di libertà da una data forma di carico impulsivo, dipende dal rapporto $\frac{t_1}{T}$ tra la durata del carico ed il periodo naturale della struttura. E' dunque interessante tracciare il fattore di amplificazione dinamico *D* in funzione di $\frac{t_1}{T}$ per diverse forme di carichi impulsivi. Per esempio, il contenuto della tabella 5.1 è stato tracciato sotto forma di curva nella Fig. 5.6. Su questo diagramma appaiono anche gli analoghi tracciati corrispondenti ad altre forme di carichi impulsivi;

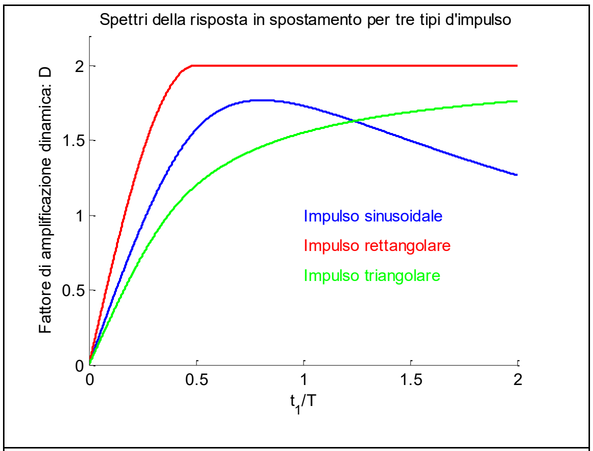

Fig. 5.6 – Spettri della risposta in spostamento

queste curve sono note sotto il nome di *spettri di risposta in spostamento* o semplicemente ***spettri di risposta*** dei carichi impulsivi. Questo genere di grafici può essere utilizzato per ottenere un'approssimazione accettabile dell'effetto massimo che ci si può aspettare da un tipo di carico impulsivo che agisce su una semplice struttura.

Questi spettri delle risposta permettono anche di prevedere la risposta della struttura ad un'accelerazione impulsiva applicata alla sua base. Se questa accelerazione vale $\ddot{v}_g(t)$, produrrà un carico impulsivo effettivo $p_{eff}(t) = -m\ddot{v}_g(t)$. Se $\ddot{v}_{g0}$ indica l'accelerazione massima della base, il massimo carico impulsivo effettivo sarà $p_{0,eff}(t) = -m\ddot{v}_{g0}$. Il fattore di amplificazione dinamica diventa dunque:

$$D = \left| \frac{v_{max}^t}{m\ddot{v}_{g0}/k} \right| \tag{5.14}$$

in cui, in generale, presenta un certo interesse solo il modulo della risposta. Si può anche scrivere:

$$D = \left| \frac{\ddot{v}_{max}^t}{\ddot{v}_{g0}} \right| \tag{5.15}$$

dove $\ddot{v}_{max}^t$ è l'accelerazione totale massima della massa; ciò deriva dal fatto che in un sistema non smorzato il prodotto della massa e dell'accelerazione totale devono essere uguali in modulo alla forza di richiamo elastico kv_{max}. E' dunque evidente che gli spettri della risposta dalla fig.5.6 possono essere utilizzati per determinare la risposta massima in termini di accelerazione quando agiscono carichi impulsivi. Utilizzati a questo scopo, questi tracciati vengono generalmente chiamati spettri d'urto.

ESEMPIO E5.2 - Si utilizzi uno spettro d'urto per valutare la risposta massima di una struttura a un carico impulsivo. Il sistema della fig.E5.1 rappresenta un edificio ad un solo piano sottoposto ad una esplosione. Per il peso e la rigidezza date e indicate nello schema, il periodo della vibrazione vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\times 10^5}{1.75\times 10^9}} = 0.0823\ [s]$$

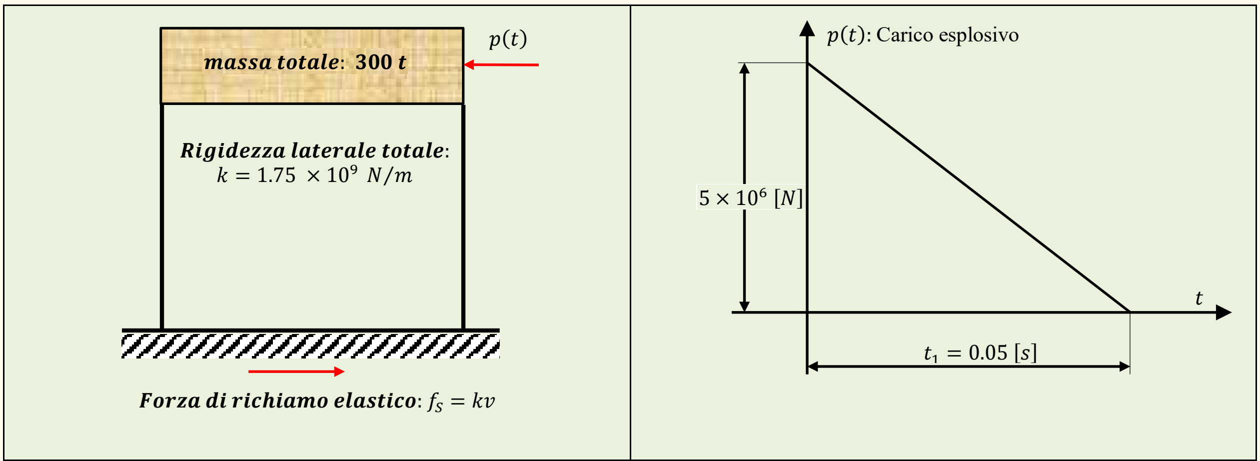

Fig. E5.1 – Edificio sottoposto ad un'esplosione, modellato con un solo grado di libertà.

Il rapporto della durata dell'impulso è dunque:

$$\frac{t_1}{T} = \frac{0.05}{0.0823} = 0.608$$

e vita la fig.5.6, il fattore d'amplificazione dinamica vale $D = 1.33$. Lo spostamento massimo sarà dunque:

$$v_{max} = D\frac{p_0}{k} = 1.33\frac{5\times 10^6}{1.75\times 10^9} = 3.8\times 10^{-3}[m] = 3.8\ [mm]$$

e le forze elastiche massime prodotte saranno:

$$f_{S,max} = kv_{max} = (1.75\times 10^9)(3.8\times 10^{-3}) = 6.65\times 10^6\ [N]$$

Se la durata dell'impulso fosse stato dieci volte più breve ($t_1 = 0.005\ [s]$), il fattore di amplificazione dinamica per il rapporto $\frac{t_1}{T} = 0.0608$ sarebbe stato solo $D = 0.44$ e le forze resistenti elastiche si sarebbero ridotte a $f_{S,max} = kv_{max} = 2.2\times 10^6\ [N]$. Quindi, per un impulso di durata molto breve, gran parte del carico applicato è assorbito dall'inerzia della struttura e gli sforzi sono molto più bassi rispetto a quelli che ci sarebbero stati con un carico di durata più lunga.

5.6 CALCOLO APPROSSIMATO DELLA RISPOSTA AD UN CARICO IMPULSIVO

Lo studio degli spettri della risposta presentati in fig.5.6 per gli impulsi sinusoidale, rettangolare e triangolare e per altri casi di carico ci permette di esprimere le seguenti conclusioni:

1) Nel caso di carichi di lunga durata, per esempio $t_1/T > 1$, il fattore di amplificazione dinamico dipende principalmente dalla velocità alla quale la forza raggiunge il suo valore massimo. Un carico rettangolare applicato durante un tempo sufficientemente lungo produce un fattore di amplificazione dinamico D pari a 2. Una crescita lenta della forza conduce ad un fattore uguale all'unità;
2) Nel caso di carichi di breve durata, per esempio $t_1/T < 0.25$, l'ampiezza dello spostamento massimo v_{max} dipende principalmente dal valore dell'impulso applicato ($I_{Rect} > I_{Sin} > I_{Tri}$):

$$I = \int_0^{t_1} p(t)dt \qquad \begin{cases} Impulso\ rettangolare: I_{Rect} = p_0 \int_0^{t_1} dt = p_0 t_1 \\ Impulso\ sinusoidale: \ I_{Sin} = p_0 \int_0^{t_1} sin(\overline{\omega} t)dt = \frac{2}{\pi} p_0 t_1 \\ Impulso\ triangolare: \ I_{Tri} = p_0 \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) dt = \frac{1}{2} p_0 t_1 \end{cases}$$

ed è poco influenzata dalla sua forma. Il fattore di amplificazione dinamico D, viceversa, dipende direttamente dalla forma della funzione di carico in quanto è proporzionale al rapporto tra l'area delimitata dalla funzione di carico e l'ampiezza massima al picco di questa stessa funzione. Ciò appare molto bene sulla Fig.5.6 se ci si interessa alla risposta nel dominio dei piccoli periodi. L'ampiezza v_{max} è dunque la grandezza più significativa che permette di misurare la risposta.

Un metodo comodo per approssimare la risposta massima ad un carico impulsivo di corta durata consiste quindi nell'esprimere la variazione della quantità di moto della massa m. Partendo dall'equazione del moto:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t)$$

Trascurando lo smorzamento si ottiene:

$$m\frac{d\dot{v}(t)}{dt} + kv(t) = p(t)$$

Portando la rigidezza a destra dell'equazione si ottiene:

$$m\frac{d\dot{v}(t)}{dt} = p(t) - kv(t)$$

ed integrando:

$$m\Delta\dot{v} = \int_0^{t_1} [p(t) - kv(t)]dt \tag{5.16}$$

dove $\Delta\dot{v}$ è la variazione della velocità prodotta dall'applicazione dell'impulso $p(t)$. Si noterà che per impulsi di breve durata t_1 lo spostamento $v(t_1)$ prodotto è dell'ordine di grandezza di t_1^2, mentre la variazione della velocità $\Delta\dot{v}$ è dell'ordine della grandezza t_1. Poiché l'ordine di grandezza dell'impulso applicato è t_1, il termine relativo al richiamo elastico $kv(t)$ tende a zero con t_1 ed è trascurabile in questa equazione nel caso di impulsi di breve durata. E' quindi possibile scrivere l'equazione precedente nel modo seguente:

$$m\Delta\dot{v} = \int_0^{t_1} p(t)dt \tag{5.17}$$

o anche

$$\Delta\dot{v} = \frac{1}{m}\int_0^{t_1} p(t)dt \tag{5.18}$$

Per $t > t_1$, la forza applicata è nulla e la risposta è una vibrazione libera:

$$v(\bar{t}) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} sin(\omega\bar{t}) + v(t_1) cos(\omega\bar{t})$$

dove $\bar{t} = t - t_1$. In pratica $v(t_1)$ è sufficientemente piccolo e quindi può essere trascurato; in oltre $\dot{v}(t_1) = \Delta\dot{v}$. E' allora possibile utilizzare la seguente espressione approssima:

$$v(\bar{t}) \cong \frac{1}{m\omega}\left[\int_0^{t_1} p(t)dt\right] \cdot sin(\omega\bar{t}) \tag{5.19}$$

ESEMPIO E5.3 - Si illustra l'uso di questa formula approssimata con la struttura e il carico impulsivo descritti nella fig. E5.2. In questo caso:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.14 \left[\frac{rad}{s}\right] \qquad \text{e} \qquad \int_0^{t_1} p(t)dt = 5 \times 10^4 \ [N\ s]$$

La risposta è dunque approssimativamente:

$$v(\bar{t}) \cong \frac{1}{m\omega}\left[\int_0^{t_1} p(t)dt\right] \cdot sin(\omega\bar{t}) = \frac{5 \times 10^4}{10^6\ (3.14)} \cdot sin(\omega\bar{t})$$

Il massimo della risposta si ottiene quando $sin(\omega\bar{t}) = 1$ e vale:

$$v_{max} \cong 15.9\ [mm]$$

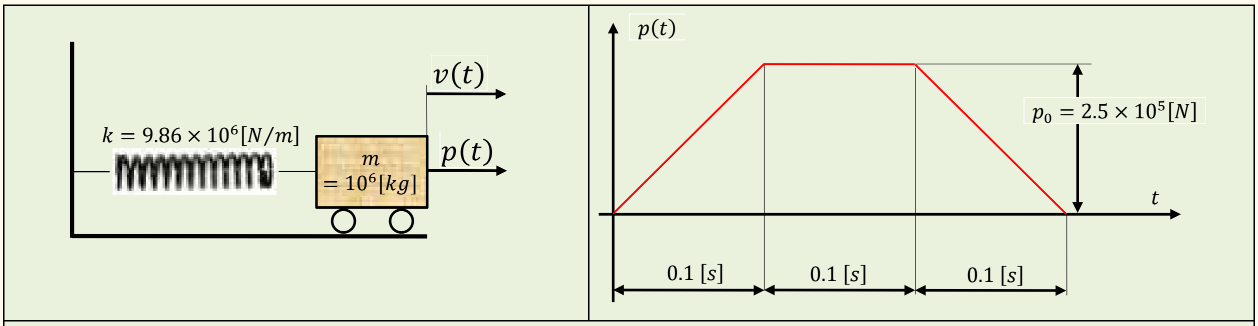

Fig. E5.2 – Studio approssimato della risposta ad un'esplosione.

Lo sforzo elastico massimo prodotto nella struttura vale quindi:

$$f_{S,max} = kv_{max} = (9.86 \times 10^6)(1.59 \times 10^{-2}) = 1.57 \times 10^5\ [N]$$

L'uso del metodo d'integrazione diretta avrebbe condotto ad uno spostamento massimo pari a $v_{max} \cong 15.6\ [mm]$, con un errore inferiore al 2%.