CAP.4 - RISPOSTA AD UN QUALSIASI CARICO PERIODICO

4.1 SVILUPPO DEL CARICO APPLICATO IN SERIE DI FOURIER

Sviluppando il carico in serie di Fourier è possibile utilizzare le stesse espressioni viste precedentemente per scrivere la risposta ad un carico periodico qualsiasi. La risposta corrispondente a ogni termine della serie è allora semplicemente la risposta ad un carico armonico; utilizzando il principio di sovrapposizione, si ricava la risposta totale come somma delle risposte causate da ogni termine della serie.

Si consideri un carico periodico qualsiasi espresso in serie di Fourier:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot sin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) \tag{4.1}$$

dove T_p è il periodo del carico. I coefficienti della serie si ottengono per mezzo delle seguenti espressioni:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) \cdot dt \tag{4.2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot sin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) \cdot dt$$

4.2 RISPOSTA AD UN CARICO ESPRESSO IN SERIE DI FOURIER

Un carico periodico arbitrario espresso in serie di Fourier comprende una forza costante (la forza media rappresentata dal coefficiente a_0) e una serie di carichi armonici di frequenza $\bar{\omega}_n$ e di ampiezza a_n e b_n. Per un sistema ad un grado di libertà, la componente permanente della risposta prodotta da ogni termine in seno della serie è data da un'espressione della forma dell'eq. (3.9) senza il termine transitorio:

$$[\textbf{Termini in seno}]: \quad v_p(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)} sin(n\bar{\omega}_1 t) \tag{4.3a}$$

in cui:

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{nT}{T_n} = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}$$

In modo simile, la risposta in regime permanente per i termini in coseno è data da:

$$[\textbf{Termini in coseno}]: \quad v_p(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)} cos(n\bar{\omega}_1 t) \tag{4.3b}$$

e la risposta dovuta al termine costante è lo spostamento statico:

$$[\textbf{Termini costante}]: \quad v_o(t) = \frac{a_0}{k} \tag{4.3c}$$

La risposta totale diventa quindi:

$$v(t) = \frac{1}{k}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)} \{a_n \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) + b_n \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t)\}\right] \tag{4.3}$$

in cui i coefficienti a_n e b_n sono dati dalle formule delle eq.(4.2).

Per prendere in considerazione lo smorzamento di un sistema ad un grado di libertà sottoposto ad un carico periodico, è sufficiente sostituire alle equazioni appena utilizzate, l'espressione (3.20) ottenuta per un sistema smorzato sottoposto ad un carico sinusoidale. In questo caso, la risposta totale in regime permanente diventa:

$$v(t) = \frac{1}{k}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\{[a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)]sin(n\bar{\omega}_1 t) + [a_n(1-\beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n]cos(\bar{\omega}t)\}\right] \quad (4.4)$$

ESEMPIO E4.1 – Si consideri un sistema caricato dalla forza periodica indicata nella Fig.E4.1. Il calcolo dei coefficienti della serie di Fourier conduce ai seguenti risultati:

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\cdot\int_0^{T_p/2} p_0 sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\cdot dt = \frac{p_0}{T_p}\left[-\frac{T_p}{2\pi}cos\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\right]_0^{T_p/2} = -\frac{p_0}{2\pi}[cos(\pi) - cos(0)] = \frac{p_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\cdot\int_0^{T_p} p_0 sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\cdot cos\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)\cdot dt = \begin{cases} 0 & se\ n\ è\ dispari \\ \dfrac{p_0}{\pi}\dfrac{2}{(1-n^2\ )} & se\ n\ è\ pari \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\cdot\int_0^{T_p} p_0 sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\cdot sin\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)\cdot dt = \begin{cases} \dfrac{p_0}{2} & se\ n = 1 \\ 0 & se\ n\ > 1 \end{cases}$$

Posto:
$$\bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p}$$

Si ottiene:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot sin(n\bar{\omega}_1 t) =$$
$$= \frac{p_0}{\pi} + b_1\cdot sin(\bar{\omega}_1 t) + a_2\cdot cos(2\bar{\omega}_1 t) + a_4\cdot cos(4\bar{\omega}_1 t) + a_6\cdot cos(6\bar{\omega}_1 t) + \cdots =$$
$$= \frac{p_0}{\pi} + \frac{p_0}{2}sin(\bar{\omega}_1 t) + \frac{p_0}{\pi}\frac{2}{(1-2^2\ )}cos(2\bar{\omega}_1 t) + \frac{p_0}{\pi}\frac{2}{(1-4^2\ )}cos(4\bar{\omega}_1 t) + \frac{p_0}{\pi}\frac{2}{(1-6^2\ )}cos(6\bar{\omega}_1 t) + \cdots =$$
$$= \frac{p_0}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}sin(\bar{\omega}_1 t) - \frac{2}{3}cos(2\bar{\omega}_1 t) - \frac{2}{15}cos(4\bar{\omega}_1 t) - \frac{2}{35}\cdot cos(6\bar{\omega}_1 t) + \cdots\right] \quad (a)$$

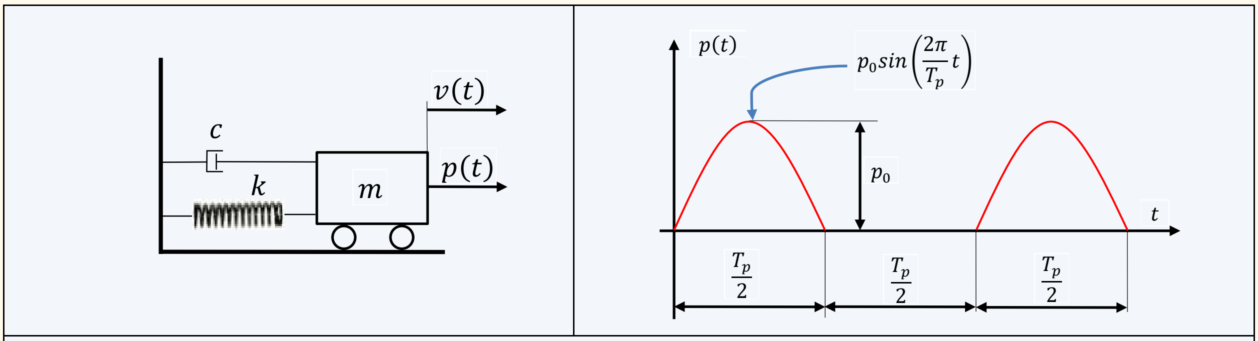

Fig.E4.1 – Esempio per l'analisi della risposta ad un carico periodico: (a) sistema ad un grado di libertà; (b) carico periodico.

Se si considera che il sistema non è ammortizzato e se per esempio il periodo del carico è uguale a $4/3$ del periodo proprio del sistema, cioè se:

$$\frac{T_p}{T} = \frac{4}{3} \qquad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} \equiv \beta_1 = \frac{3}{4} \qquad \frac{2\bar{\omega}_1}{\omega} \equiv \beta_2 = \frac{3}{2} \quad (b)$$

la risposta in regime permanente sarà data da un'equazione della forma dell'eq.(4.3). Utilizzando i valori trovati in (a) e (b), la risposta totale diventa:

$$v(t) = \frac{p_0}{k\pi}\left[1 + \frac{8\pi}{7}sin(\bar{\omega}_1 t) + \frac{8}{15}cos(2\bar{\omega}_1 t) + \frac{1}{60}cos(4\bar{\omega}_1 t) + \cdots\right] \quad (c)$$

Se il sistema è ammortizzato, si procederà nello stesso modo, ma utilizzando l'eq.(4.4) al posto dell'eq. (4.3).

4.3 FORMA ESPONENZIALE DELLA SOLUZIONE ESPRESSA IN SERIE DI FOURIER

Le equazioni relative alle serie di Fourier, eq.(4.1) e (4.2), si possono scrivere anche in forma esponenziale sostituendo alle funzioni trigonometriche le seguenti espressioni esponenziali che si ricavano **dall'equazione di Eulero**:

$$e^{\pm i\omega t} = cos(\omega t) \pm i \cdot sin(\omega t)$$

da cui:

$$cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \qquad sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \tag{4.5}$$

Il risultato è il seguente (vedi Appendice A):

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\bar{\omega}_1 t} \tag{4.6}$$

in cui

$$c_n = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot e^{-in\bar{\omega}_1 t} \cdot dt \tag{4.7}$$

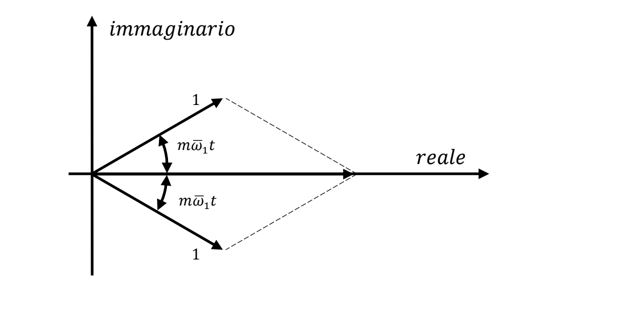

Fig.4.1 – Rappresentazione vettoriale di un carico esponenziale.

A ogni valore positivo di n, per esempio $n = +m$, corrisponde un $n = -m$. I due termini $e^{im\bar{\omega}_1 t}$ e $e^{-im\bar{\omega}_1 t}$ possono essere rappresentati con dei vettori unitari rotanti rispettivamente in senso positivo e negativo con velocità angolare pari a $m\bar{\omega}_1$. Le componenti immaginarie di questi vettori si annullano. Si può anche notare nell'eq.(4.7) che c_{+m} è il complesso coniugato di c_{-m}, quindi tutti i termini immaginari dell'equazione si annullano. Ciò è corretto in quanto $p(t)$ è una funzione di numeri reali che rappresenta il carico.

Espresso il carico periodico in forma esponenziale, è necessario adesso scrivere le equazioni della risposta ad un carico sinusoidale in forma esponenziale. Nel seguito verrà presa in considerazione solo la risposta in regime permanente: si supporrà che il carico sia stato applicato per un tempo sufficientemente lungo che abbia smorzato il transitorio. Introdurre la funzione complessa del carico unitario $e^{i\bar{\omega}t}$ nell'equazione del moto (3.1) conduce a:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = e^{i\bar{\omega}t} \tag{4.8}$$

la cui soluzione in regime permanente ha la forma seguente:

$$v(t) = H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} \tag{4.9}$$

Risulta quindi che la velocità e l'accelerazione della massa valgono rispettivamente:

$$\dot{v}(t) = i\bar{\omega}\, H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} \qquad \ddot{v}(t) = (i\bar{\omega})^2 H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} = -\bar{\omega}^2 H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}$$

Se nell'eq.(4.8) si sostituisce l'eq.(4.9) e le sue derivate rispetto al tempo e se si mette in evidenza il termine comune $H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t}$ si trova:

$$[-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k]H(\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t} = e^{i\bar{\omega}t}$$

Eliminando il termine comune $e^{i\bar{\omega}t}$ (sempre diverso da zero), è possibile calcolare la funzione $H(\bar{\omega})$, che d'ora in avanti verrà chiamata **funzione della risposta in frequenza complessa**:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} \tag{4.10}$$

Ricordando le seguenti relazioni:

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad c = \xi c_{cr} = \xi 2m\omega$$

si può ricavare che:

$$\bar{\omega}^2 = (\beta\omega)^2 = \beta^2 \frac{k}{m} \qquad \bar{\omega}c = (\beta\omega)(2\xi m\omega) = 2\xi\beta m\omega^2 = 2\xi\beta m \frac{k}{m} = 2\xi\beta k$$

da cui:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} = \frac{1}{-\beta^2 \frac{k}{m} m + i2\xi\beta k + k} = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)} \tag{4.11}$$

La risposta in frequenza complessa ad un carico di frequenza $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$ sarà dunque:

$$H(n\bar{\omega}_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1)} \tag{4.12}$$

in cui $\beta_1 = \bar{\omega}_1/\omega$. Osservando la forma dell'eq.(4.10) si può vedere che $H(n\bar{\omega}_1)$ è il complesso coniugato di $H(-n\bar{\omega}_1)$. E' dunque possibile esprimere la risposta permanente di un sistema ad un solo grado di libertà alla funzione di carico che rappresenta ogni termine della serie di Fourier.

Per il **Principio di sovrapposizione degli effetti**, ne deriva che la risposta totale permanente del sistema ad ogni funzione di carico periodica può scriversi:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\bar{\omega}_1) c_n e^{in\bar{\omega}_1 t} \tag{4.13}$$

La semplicità della forma esponenziale (4.13) appare chiaramente se la si confronta all'espressione trigonometrica equivalente (4.4). Nell'APPENDICE B è riportato un semplice codice scritto in MATLAB per il calcolo della risposta in frequenza di un sistema smorzato ad un solo grado di libertà.

APPENDICE A

Data **l'equazione di Eulero**:

$$e^{\pm i\omega t} = cos(\omega t) \pm i \cdot sin(\omega t)$$

si ricava che:

$$cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \qquad sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

Risulta quindi che:

$$c_n = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot e^{-in\bar{\omega}_1 t} \cdot dt = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot [cos(n\bar{\omega}_1 t) - i \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t)] \cdot dt$$

Risulta cioè che i coefficienti c_n sono numeri complessi:

$$Re[c_n] = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) \cdot dt \qquad Im[c_n] = -\frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t) \cdot dt$$

Risulta quindi che:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\bar{\omega}_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, [cos(n\bar{\omega}_1 t) + i \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t)] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re[c_n] \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) - \sum_{n=-\infty} Im[c_n] \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t)$$

Ricordando le espressioni (4.2) risulta:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot dt = Re[c_0]$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) \cdot dt = 2 \cdot Re[c_n]$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} p(t) \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t) \cdot dt = -2 \cdot Im[c_n]$$

e quindi:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\bar{\omega}_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re[c_n] \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} Im[c_n] \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{2} \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{2} \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t) =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot cos(n\bar{\omega}_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot sin(n\bar{\omega}_1 t)$$

APPENDICE B

```
function [s, tempo] = Risposta_in_Frequenza_FFT(Stiff, T, Tp, xsi, p)
%Risposta_in_Frequenza_FFT Convoluzione del carico per la risposta ad un carico unitario
%     Stiff = Rigidezza del sistema
%         T = Periodo naturale del sistema
%        Tp = Periodo del sistema di carico
%       xsi = Rapporto di smorzamento
%         p = Funzione di carico
%         s = Risposta del sistema (spostamento)
%     tempo = Vettore del tempo associato allo spostamento
% ======================================================================
Np = size(p,1);
y = fft(p);       % Trasformata di Fourier del carico

H = zeros(Np,1);  % H: funzione della risposta in frequenza complessa
beta1 = T/Tp;
j = complex(0,1);
for k = 1:Np/2+1
    nb = (k-1)*beta1;
    H(k) = (-(nb)^2 + 2*j*nb*xsi + 1);
end
for k = Np/2+2:Np
    nb =-(Np-k+1)*beta1;
    H(k) = (-(nb)^2 + 2*j*nb*xsi + 1);
end

% CONVOLUZIONE: Prodotto (1/H)*FFT(forza)
dBeta = 1.E-4;
for k = 1:Np
    if H(k) == 0          % In assenza di smorzamento e alla risonanza
       y(k) = y(k)/dBeta;
    else
       y(k) = y(k)/H(k);
    end
end
y = ifft(y/Stiff);       % Trasformata inversa di Fourier
s = real(y);

passo = Tp/(Np-1);
tempo = zeros(Np,1);
t = 0;
for i = 1:Np
    tempo(i) = t;
    t = t + passo;
end
end
```