Analisi Superiore 1
Programma dettagliato (a.a. 2018/2019)

Nel seguito trovate il programma (molto) dettagliato del corso di *Analisi Superiore 1* relativo all'a.a. 2018/2019, che riporta esattamente ciò che è stato trattato durante le lezioni. I teoremi, proposizioni, proprietà da dimostrare sono seguite dalla dicitura "c.d." che sta per "con dimostrazione"; nelle parti in cui non viene specificato, significa che è richiesto solo l'enunciato o i risultati generali.

Introduzione all'analisi complessa.
Richiami: il campo dei numeri complessi; proprietà e operazioni con i numeri complessi; il piano di Gauss; forma cartesiana, forma trigonometrica e forma esponenziale di un numero complesso; il piano complesso esteso. Esempi.
Funzioni complesse di variabile complessa; intorno sferico di centro z_0 e raggio r e topologia in $\mathbb{C}$; limiti di funzioni complesse ed esempi; funzioni limitate; funzioni continue; funzioni derivabili in senso complesso; funzioni olomorfe; funzioni intere; teorema sull'algebra delle derivate; teorema sulla derivata di funzione composta; teorema sulla derivata di funzione inversa; esempi; derivabilità implica continuità ma non vale il viceversa: esempio di funzione continua ma non derivabile.
Relazione tra derivabilità e differenziabilità in senso complesso; relazione tra derivabilità di una funzione complessa e differenzabilità (in senso reale) della funzione a valori vettoriali ad essa associata e relazioni di Cauchy-Riemann (c.d.); esempi di funzioni intere e di funzioni derivabili e non derivabili; relazione tra il determinante jacobiano della funzione a valori vettoriali associata a una funzione complessa e il modulo della derivata complessa della funzione; condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari; condizione necessaria affinché una funzione derivabile in un disco aperto sia costante (c.d.); esempi di utilizzo di questo risultato.
Polinomi complessi: polinomi in (x, y) a coefficienti complessi e polinomi in z; esempi. Definizione di olomorfia tramite l'operatore di Cauchy-Riemann; analiticità delle funzioni olomorfe; esempio di funzione derivabile in un pun-

to ma non analitica in tale punto.
Alcune particolari funzioni complesse: funzioni polinomiali; zeri di un polinomio; teorema di Lucas. La funzione esponenziale complessa come serie di potenze; proprietà della funzione esponenziale. Le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche complesse; serie circolari e serie iperboliche. Proprietà e relazioni tra le funzioni trascendenti elementari.
La funzione radice quadrata principale come funzione inversa della funzione $f(z) = z^2$ definita nel semipiano destro; funzione radice principale n-esima complessa. Funzioni polidrome e loro caratteristiche; confronto tra le multifunzioni di variabile reale e quelle di variabile complessa; determinazioni delle multifunzioni. Punto di diramazione della funzione radice quadrata e linea di diramazione; continuità delle determinazioni nel piano complesso tagliato lungo le semirette uscenti dall'origine. Multifunzione logaritmo complesso, determinazione principale del logaritmo complesso e sue proprietà. Calcolo delle derivate della radice principale complessa e del logaritmo principale complesso anche utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari. La multifunzione z^w: casi particolari ed esempi.
Funzioni armoniche; armonicità delle parti reale e immaginaria di una funzione olomorfa. armonica coniugata di una funzione armonica in un insieme aperto semplicemente connesso; armoniche elementari.
Curve nel piano complesso; mappe conformi; utilizzo delle trasformazioni conformi per risolvere il problema del Dirichlet-Laplaciano; Teorema della mappa di Riemann. Trasformazione di particolari curve (rette verticali e orizzontali) tramite la funzione $f(z) = z^2$ (conforme per $z \neq 0$) e tramite la funzione $f(z) = e^z$.
Integrali curvilinei in $\mathbb{C}$; proprietà dell'integrale: linearità rispetto alla funzione integranda, linearità rispetto al cammino di integrazione e invarianza rispetto a cambi di parametro che non cambiano l'orientazione; stima dell'integrale di $f(z)$ lungo una curva in funzione della lunghezza della curva (disuguaglianza di Darboux); esempi.
Funzioni primitive; definizione; primitive di f in un dominio (c.d.); condizione necessaria per l'esistenza di primitive (c.d.); teorema fondamentale del calcolo integrale in $\mathbb{C}$ (c.d.); legami con gli integrali di forme differenziali lineari lungo una curva in $\mathbb{R}^2$; esempi. Condizione sufficiente per l'esistenza di primitive in un insieme semplicemente connesso; primitive in un insieme

semplicemente connesso; primitiva di f quando l'integrale di f lungo una curva non dipende dalla curva ma solo dai suoi estremi; teorema di Morera (c.d.); Teorema integrale di Cauchy con due formulazioni; dimostrazione del Teorema di Cauchy con ipotesi di semplice connessione del dominio (c.d.) e con ipotesi di interno di una curva chiusa contenuta nel dominio (c.d.); Teorema di Cauchy-Goursat (con ipotesi minime); esempi; forma complessa della formula di Gauss-Green. Domini limitati molteplicemente connessi (domini "con buchi"); Teorema di Cauchy per domini con "buchi" (c.d.); Teorema di Cauchy per "circuiti" equivalenti (c.d.) e sua utilità. Secondo teorema di Cauchy (formula integrale) (c.d.); formula integrale per curve non semplici; indice di avvolgimento di una curva rispetto a un punto; significato della formula integrale o formula di rappresentazione; olomorfia della derivata di una funzione olomorfa (c.d.); regolarità delle funzioni olomorfe e confronto con le funzioni reali di variabile reale; formula integrale di Cauchy per le derivate.

Richiami sulle serie di potenze in $\mathbb{C}$; teorema di analiticità delle funzioni olomorfe (c.d.); esempio di funzione reale di variabile reale infinitamente derivabile con continuità ma non analitica (con uno zero di ordine infinito); sviluppi in serie notevoli nel caso complesso (serie esponenziale, serie circolari, serie iperboliche, serie geometrica, serie logaritmica e serie binomiale); interpretazione della formula integrale di Cauchy come formula di valor medio; raggio di convergenza della serie di potenze di una funzione intera; stima di Cauchy per le derivate e confronto con il criterio di analiticità per funzioni infinitamente derivabili in campo reale; il teorema di Liouville (c.d.); il teorema fondamentale dell'algebra (c.d. tramite il Teorema di Liouville).

Proprietà delle funzioni olomorfe: zeri di ordine finito e di ordine infinito di una funzione olomorfa; una funzione olomorfa in un dominio ammette zeri di ordine infinito se e solo se è nulla nel dominio (c.d.); l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla in un dominio è un insieme discreto (c.d.); teorema degli zeri (la molteplicità di uno zero di una funzione olomorfa è univocamente determinato); principio di identità per funzioni olomorfe e suoi corollari (c.d.).

Conseguenze del principio di identità per funzioni olomorfe: confronto tra funzioni olomorfe e funzioni derivabili in senso reale; esempi; principio di identità come strumento per dimostrare in $\mathbb{C}$ alcune identità algebriche valide in campo reale. Prolungamento o estensione analitica di una funzione olomorfa in un aperto; esempi; prolungamento di una funzione olomorfa "attorno" a un punto di non derivabilità (isolato) di una funzione olomorfa; "barriera di singolarità" (esempio); funzione analitica espressa tramite serie di potenze formalmente diverse; esempi. Principio del massimo modulo (c.d.) e Corollari (c.d.); disuguaglianze di Cauchy (del massimo modulo).

Serie bilatere e loro convergenza in una corona circolare; sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare (c.d.); esempi. Disuguaglianze di Cauchy per le serie di Laurent; parte principale e parte regolare di una serie di Laurent; esempi; singolarità isolate e singolarità non isolate; esempi; sviluppo in serie di Laurent in un dominio privato si un punto singolare; classificazione delle singolarità isolate di una funzione e loro caratterizzazione tramite lo sviluppo in serie di Laurent di f; esempi. Teorema di Riemann sulle singolarità eliminabili. Punti singolari all'infinito; singolarità isolate per funzioni intere (funzioni costanti, polinomi e funzioni trascendenti intere); funzioni meromorfe; una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ ha al massimo un'infinità numerabile di poli (c.d.); le funzioni razionali non hanno singolarità essenziali (c.d.); zeri e poli di una funzione e del suo reciproco; ordine di una funzione razionale. Zeri e poli di una funzione razionale di ordine p; funzioni razionali di ordine 1: trasformazioni lineari; rapporto di funzioni olomorfe con zeri in comune: regola di de l'Hopital per funzioni complesse (c.d.); sviluppi in serie (di Taylor o di Laurent) di una funzione meromorfa; esempio; modulo di una funzione non limitato in un intorno di un polo o di una singolarità essenziale (c.d.); teorema di Casorati (c.d.); esempio e interpretazione dal punto di vista delle equazioni; teorema di Picard e teorema di Picard per funzioni meromorfe.

Residuo di una funzione in un punto singolare isolato; teorema dei residui (c.d.); osservazione: residuo in una singolarità eliminabile; formula per il calcolo dei residui in poli semplici e poli di ordine m (c.d.); residuo (nell'origine) di una funzione pari. Calcolo del residuo di una funzione rapporto di funzioni olomorfe con denominatore che ha uno zero semplice; esempi; legame tra olomorfia di una funzione in un punto ed residuo nullo; punti singolari isolati all'infinito; sviluppo in serie di Laurent di una funzione in un intorno di infinito: parte singolare e parte regolare; esempi; teorema della somma dei residui (c.d.); somma dei residui di una funzione con un numero

finito di singolarità isolate asintoticamente equivalente, per $|z| \to \infty$, a $\frac{1}{|z|^m}$, $m > 1$; calcolo di integrali curvilinei tramite il teorema dei residui; esempi.
Teorema dell'indicatore logaritmico (c.d.) o principio dell'argomento e conseguenze; una funzione meromorfa in C con un numero finito di poli ha numero di poli pari al numero di zeri; teorema di Rouché (c.d.) e conseguenza: teorema fondamentale dell'algebra; esempio di utilizzo per la localizzazione degli zeri di una funzione olomorfa.
Lemma di Jordan (c.d.) e sue diverse formulazioni. Calcolo di alcuni integrali tramite il teorema dei residui, l'applicazione del Lemma di Jordan e gli strumenti dell'analisi complessa: calcolo di integrali di funzioni razionali fratte (in $\mathbb{R}$) in cui il grado del denominatore supera di almeno 2 quello del numeratore (più in generale, calcolo di integrali in $\mathbb{R}$ di funzioni prolungabili in $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli che non stanno sull'asse reale; integrali in $\mathbb{R}$ "tipo trasformata di Fourier"; Lemma del piccolo cerchio (c.d.) e sua applicazione in integrali generalizzati in cui si deve "aggirare" un polo; calcolo di integrali in $\mathbb{R}$ "tipo trasformata di Fourier della funzione di Gauss"; integrali di Frésnel.

Elementi di analisi funzionale.
Spazi di Banach; proprietà della funzione norma; esempi: spazio delle funzioni continue su un compatto, spazio delle funzioni limitate e spazi di Lagrange; norme equivalenti; norme equivalenti in uno spazio di dimensione finita (c.d.); controesempio in $C([a,b])$ con la norma lagrangiana e con la norma indotta dalla metrica integrale del primo ordine; completezza di uno spazio normato di dimensione finita (c.d.) e corollari per sottospazi normati di dimensione finita; applicazione dei corollari allo spazio $C[a,b]$ e al sottospazio dei polinomi (teorema di approssimazione di Weierstrass). Definizione di spazio di Hilbert.
Disuguaglianze ausiliarie: disuguaglianza di Young (c.d.); disuguaglianza di Hölder (c.d.); disuguaglianza di Minkowsky (c.d.).
Spazio vettoriale delle successioni numeriche reali; convergenza per coordinate; spazi (normati) l^p di successioni a potenza p-esima sommabile e spazio delle successioni limitate; disuguaglianza di Hölder negli spazi l^p; teorema

di inclusione per spazi l^p.

Operatori lineari tra spazi vettoriali normati; esempi; funzionali lineari; esempi; operatori limitati e norma di un operatore (definizioni equivalenti); condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore sia limitato è che trasformi insiemi limitati in insiemi limitati (c.d.); esempio; limitatezza di un operatore $A : X \to Y$ con X di dimensione finita (c.d.); operatori continui e operatori uniformemente continui; esempio; la limitatezza di un operatore lineare implica la sua uniforme continuità e la continuità in un punto implica la limitatezza (c.d.). Spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ degli operatori lineari continui; spazio duale e norma duale; completezza di $\mathcal{L}(X, Y)$ se Y è uno spazio di Banach (c.d.); operatore lineare prodotto; operatori invertibili; esempi. condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore sia limitato è che trasformi insiemi limitati in insiemi limitati (c.d.).

Teorema di Helly-Hahn-Banach e corollari: Corollario 1 (c.d.), Corollario 2 e Corollario 3 (c.d.); Teorema di Banach-Steinhaus e Corollario 1 (c.d.), Corollario 2 (c.d.) e Corollario 3 (c.d.).

Il teorema della mappa aperta e corollari; il teorema del grafico chiuso. Spazio biduale; definizione di spazio riflessivo. Topologia iniziale e convergenza di successioni nella topologia iniziale; topologia debole in uno spazio di Banach; convergenza debole e sue proprietà (c.d.). Equivalenza della topologia debole e della topologia forte in uno spazio normato finito-dimensionale (c.d.); esempi di insiemi non debolmente chiusi e non debolmente aperti: la sfera unitaria e la bolla unitaria in uno spazio di dimensione infinita; non "metrizzabilità" della topologia debole in uno spazio di dimensione infinita; equivalenza di insiemi debolmente chiusi e fortemente chiusi in un sottoinsieme convesso di uno spazio di Banach. La topologia debole$*$ su uno spazio duale e sue proprietà; confronto tra topologia debole$*$, topologia debole e topologia forte in uno spazio duale; importanza delle topologie deboli; il Teorema di Riesz; il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki; topologie coincidenti in spazi di dimensione finita.

Spazi riflessivi; esempi; Teorema di Kakutani (c.d.); teorema di compattezza debole sequenziale e Teorema di Eberlein-Smulian; compattezza in uno spazio metrico e in uno spazio topologico; riflessività di un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach riflessivo (c.d.); riflessività di uno spazio di Banach e del suo duale (c.d.).

Spazi separabili: definizione e alcune proprietà: sottoinsiemi di spazi separabili; spazi separabili tali che il duale sia separabile; spazi separabili e riflessivi; spazi separabili e successioni limitate nello spazio duale.

Spazi uniformemente convessi; proprietà geometrica dell'uniforme convessità; esempio di norma uniformemente convessa equivalente a una norma che non lo è; Teorema di Milmann-Pettis; successioni debolmente convergenti in uno spazio uniformemente convesso.

Spazi L^p: definizione ($L^p(\Omega)$ nello spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ dove $\mathcal{M}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ e μ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$; L^p è uno spazio vettoriale (c.d.); L^p è uno spazio normato (c.d.); estremo superiore essenziale e spazio L^∞; modi equivalenti di definire la norma in L^∞ (c.d.); confronto tra sup e sup essenziale di una funzione; sup e sup essenziale per funzioni continue; esempi; L^∞ è uno spazio normato (c.d.); L^∞ è uno spazio di Banach (c.d.). Disuguaglianza di Hölder in L^p (c.d.). Disuguaglianza di Hölder generalizzata; utilizzo della disuguaglianza di Hölder per dimostrare la disuguaglianza triangolare in norma L^p; inclusione tra gli spazi L^p in un insieme di misura finita (c.d.); esempi; disuguaglianza di interpolazione (c.d.); Teorema di Fischer-Riesz (c.d.). Proprietà di sottosuccessioni di successioni convergenti in L^p (c.d.); disuguaglianze di Clarkson (la i) c.d.); riflessività di L^p per $1 < p < \infty$ (c.d.); seconda dimostrazione della riflessività di L^p, $1 < p < \infty$, tramite l'operatore $T : L^p \to (L^q)^*$; Teorema di rappresentazione di Riesz in L^p per $1 < p < \infty$ (c.d.); separabilità di L^p per $1 \leq p < \infty$; densità delle funzioni continue a supporto compatto negli spazi L^p.

Proprietà dello spazio L^1; Teorema di rappresentazione di Riesz in L^1; duale di L^1. Proprietà dello spazio L^∞ visto come duale di L^1. Lo spazio L^∞: non separabilità e non riflessività; esempio che mostra che per funzionali lineari continui in L^∞ non vale la formula di rappresentazione. Risultati di convergenza debole e proprietà riguardanti le topologie deboli negli spazi L^p.

Il prodotto di convoluzione; teorema di Young (c.d.); proprietà del prodotto di convoluzione; esempi; definizione di supporto per funzioni in L^p. Supporto del prodotto di convoluzione (c.d.); spazio delle funzioni localmente integrabili; prodotto di convoluzione di una funzione continua a supporto compatto e di una funzione localmente integrabile (c.d.); spazio delle fun-

zioni derivabili k volte (e, risp. indefinitamente) con continuità; prodotto di convoluzione di una funzione derivabile k volte con continuità a supporto compatto e di una funzione localmente integrabile.
Mollificatori: definizione e costruzione standard di una successione di mollificatori a partire da una funzione assegnata; convergenza uniforme del prodotto di convoluzione di una successione di mollificatori per una funzione continua (c.d.); convergenza in L^p del prodotto di convoluzione di una successione di mollificatori per una funzione L^p (c.d.); densità dello spazio C^∞ a supporto compatto in L^p; una funzione localmente integrabile in un aperto, il cui integrale per una funzione di C^∞ a supporto compatto è nullo, è q.o. nulla (c.d.).
Teorema di Ascoli-Arzelà per uno spazio metrico compatto. Teorema di Kolmogorov-Riesz-Fréchet. L'operatore di traslazione; invarianza e continuità per traslazioni degli spazi L^p.

La trasformazione di Fourier. Funzioni Fourier-trasformabili e condizione sufficiente di trasformabilità; trasformazione di Fourier in L^1; trasformata di funzioni a valori reali e pari e di funzioni a valori reali e dispari (c.d.); la trasformazione di Fourier è un operatore lineare continuo da $L^1(\mathbb{R})$ a $L^\infty(\mathbb{R})$ (c.d.); effetto "regolarizzante" della trasformazione di Fourier: esempi; la trasformata di una funzione integrabile è continua (c.d.); Teorema di Riemann-Lebesgue (c.d.); proprietà della trasformazione di Fourier: di riscalamento (c.d.); di coniugio (c.d.); di traslazione nel tempo (c.d.); di traslazione della frequenza (c.d.); esempi: porta centrata, porta centrata unitaria (e non), porta decentrata; formula di moltiplicazione (c.d.). Derivata della trasformata di Fourier (c.d.); trasformata della derivata (c.d.); esempi; trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione (c.d.); funzioni antitrasformabili e antitrasformazione di Fourier; formula di simmetria (c.d.) e suo esempio; teorema di inversione; calcolo della trasformata di Fourier della funzione di Gauss (con due metodi); confronto tra trasformata di Fourier e serie di Fourier con qualche riferimento alla teoria dei segnali.
Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni rapidamente decrescenti; una funzione rapidamente decrescente è limitata e integrabile (c.d.); trasformazione

di Fourier nello spazio di Schwartz; Teorema di Plancherel in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (c.d.) e in $L^2(\mathbb{R})$.
Un'applicazione della trasformata di Fourier all'equazione del calore e all'equazione delle onde.

La trasformazione di Laplace.
Funzioni Laplace-trasformabili e assolutamente Laplace-trasformabili; ascissa di convergenza e trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza; ordine esponenziale di una funzione e legame con l'ascissa di convergenza; esempi: trasformata di Laplace della funzione di Heaviside (gradino unitario), trasformata della funzione esponenziale e della funzione caratteristica di intervalli (impulso di durata h) e della funzione impulso unitario; linearità della trasformazione di Laplace (c.d.); calcolo della trasformata di Laplace delle funzioni trigonometriche, delle funzioni iperboliche e delle funzioni polinomiali; definizione di segnale. Limitatezza in modulo della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza (c.d.); trasformata di Laplace infinitesima quando $\mathrm{Re}(s)$ tende a infinito (c.d.); legame tra la trasformazione di Laplace e trasformazione di Fourier (c.d.); proprietà di riscalamento (c.d.); proprietà di traslazione (c.d.); proprietà del "segnale" smorzato (c.d.); esempi; trasformata di Laplace di un segnale periodico (c.d.); esempi. Derivata della trasformata di Laplace (c.d.) e derivate di ordine successivo; trasformata della funzione $\frac{f(t)}{t}$ (c.d.). Trasformata della derivata (c.d.) e trasformata delle derivate successive; esempi. I teoremi del valore iniziale e del valore finale; prodotto di convoluzione tra due segnali; trasformata di Laplace della convoluzione (c.d.); trasformata di Laplace dell'integrale (o della primitiva) (c.d.); esempi. Antitrasformazione di Laplace; formula di inversione di Riemann-Fourier (dimostrazione euristica); determinazione di un segnale continuo tramite la sua trasformata di Laplace; condizione su una funzione $F(s)$ complessa, olomorfa su un semipiano, affinché essa sia la trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$; definizione di trasformata di Laplace bilatera. La formula di inversione di Riemann-Fourier (per funzioni Laplace-trasformabili) ricavata tramite la formula di inversione per la trasformazione di Fourier. La formula di inversione di Riemann-Fourier nella

ricostruzione della funzione di Heaviside $H(t)$ (per $t \neq 0$); analogie e differenze tra la trasformazione di Fourier e la trasformazione di Laplace.
Antitrasformate di funzioni razionali fratte proprie con poli semplici e poli multipli. Esempi.
Applicazione della trasformata di Laplace per la risoluzione di alcuni problemi di Cauchy; esempi.

Testi di riferimento

Analisi complessa:
- L.V. Ahlfors, *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, third edition, McGraw-Hill (1979);
- dispense disponibili sul sito docente.

Analisi funzionale:
- H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, New York (2011);
- dispense disponibili sul sito docente.

Trasformate (e analisi complessa):
- G.C. Barozzi, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli (2001);
- dispense disponibili sul sito docente.

Nelle dispense c'è una bibliografia dove vengono forniti altri testi di approfondimento e/o consultazione.