Analisi Superiore 1
Programma dettagliato (a.a. 2019/2020)

Nel seguito trovate il programma (molto) dettagliato del corso di *Analisi Superiore 1* relativo all'a.a. 2019/2020, che riporta esattamente ciò che è stato trattato durante le lezioni. I teoremi, le proposizioni e le proprietà da dimostrare sono seguite dalla dicitura "c.d." che sta per "con dimostrazione"; nelle parti in cui non viene specificato, significa che è richiesto solo l'enunciato o la conoscenza dei risultati generali. Alcune (poche) dimostrazioni non sono state fatte esplicitamente durante le lezioni e sono state assegnate per esercizio.

Introduzione all'analisi complessa.
Richiami: il campo dei numeri complessi; proprietà e operazioni con i numeri complessi; il piano di Gauss; forma cartesiana, forma trigonometrica e forma esponenziale di un numero complesso; il piano complesso esteso.
Funzioni di variabile reale a valori complessi e funzioni di variabile complessa a valori complessi; intorno sferico di centro z_0 e raggio r e topologia in $\mathbb{C}$; limiti di funzioni complesse: definizioni ed esempi; funzioni limitate; funzioni continue; funzioni derivabili in senso complesso; definizione di funzione olomorfa e di funzione intera; algebra delle derivate; derivata di funzione composta; derivata di funzione inversa; legame tra derivabilità in senso complesso e continuità; esempi. Differenziabilità in senso complesso e relazione con derivabilità (c.d.); relazione tra derivabilità (in senso complesso) e differenzabilità (in senso reale) in due variabili e relazioni di Cauchy-Riemann (c.d.); esempi di funzioni derivabili e non; relazione tra il modulo della derivata di una funzione derivabile e il determinante jacobiano della funzione vettoriale ad essa associata; condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari; condizione necessaria affinché una funzione derivabile in un dominio sia costante (c.d.); esempio di utilizzo di questa proprietà.
Polinomi complessi in x e y e polinomi in z; l'operatore di Cauchy-Riemann e il suo utilizzo per la definizione di olomorfia di una funzione; funzioni olomorfe e funzioni analitiche; esempio di funzione derivabile in un punto ma non analitica in tale punto.

Alcune particolari funzioni complesse: funzioni polinomiali e loro zeri; funzione esponenziale complessa, serie esponenziale e proprietà; funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche complesse e loro proprietà; proprietà delle funzioni trascendenti elementari: sviluppi in serie, relazioni fondamentali, illimitatezza, periodicità e zeri.
La funzione determinazione principale della radice quadrata di z come inversa della funzione $f(z) = z^2$ definita nel semipiano destro; funzione radice principale n-esima complessa. Funzioni polidrome e loro caratteristiche; confronto tra le multifunzioni di variabile reale e le multifunzioni di variabile complessa; determinazioni della multifunzione radice n-esima complessa. Punto di diramazione della multifunzione radice quadrata e linea di diramazione; continuità delle determinazioni nel piano complesso tagliato lungo una semiretta uscente dall'origine. La multifunzione logaritmo complesso; determinazione principale del logaritmo complesso e sue proprietà; la multifunzione z^w: casi particolari ed esempi; calcolo delle derivate della radice n-esima complessa e del logaritmo complesso anche utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari.
Funzioni armoniche e loro legame con le funzioni olomorfe; armoniche elementari; esistenza dell'armonica coniugata di una funzione armonica in un aperto semplicemente connesso.
Curve nel piano complesso; mappe conformi: funzioni olomorfe con derivata non nulla conservano gli angoli in ampiezza e in verso; trasformazioni conformi viste come cambi di coordinate; utilizzo delle trasformazioni conformi per risolvere il problema del Dirichlet-Laplaciano; Teorema della mappa di Riemann; trasformazione di rette verticali e orizzontali tramite trasformazioni conformi e trasformate delle linee di livello delle parti reale e immaginaria di una trasformazione conforme; esempi: le funzioni $f(z) = z^2$ e $f(z) = e^z$; potenziale complesso, linee equipotenziali e linee di corrente.
Integrali di funzioni complesse lungo curve in $\mathbb{C}$; proprietà dell'integrale: linearità rispetto alla funzione integranda, linearità rispetto al cammino di integrazione, invarianza per curve equivalenti; stima dell'integrale di $f(z)$ lungo una curva in funzione della lunghezza della curva (disuguaglianza di Darboux); esempi.
Funzioni primitive; definizione; primitive in un dominio (c.d.); condizione necessaria per l'esistenza di primitive (c.d.); teorema fondamentale del calcolo

integrale in $\mathbb{C}$ (c.d.); legami degli integrali curvilinei di funzioni complesse con integrali curvilinei di forme differenziali lineari piane; esempi. Condizione sufficiente per l'esistenza di primitive in un dominio semplicemente connesso; differenza tra esistenza di primitive per funzioni reali di variabile reale e per funzioni complesse di variabile complessa; primitive in un insieme semplicemente connesso; esempi; primitive globali e primitive "locali"; teorema di Morera (c.d.); Primo Teorema di Cauchy con due tipologie di ipotesi (interno di curve chiuse contenuto nel dominio di olomorfia e domini semplicemente connessi); prima formulazione e dimostrazione con l'utilizzo del teorema di Gauss-Green nel piano; forma complessa della formula di Gauss-Green; seconda formulazione con ipotesi di semplice connessione del dominio e dimostrazione; Teorema di Cauchy-Goursat (con ipotesi minime);domini regolari a un sol contorno e a più contorni (domini limitati molteplicemente connessi); Teorema di Cauchy per domini limitati con "buchi" (c.d.); Teorema di Cauchy per curve omotope (c.d.) e sua utilità; secondo teorema di Cauchy e formula integrale (c.d.); formula integrale per curve non semplici; indice di avvolgimento di una curva rispetto a un punto; significato della formula integrale come formula di rappresentazione; formula della media; olomorfia della derivata di una funzione olomorfa (c.d.); teorema di Cauchy enunciato in termini di curve omologhe a zero; regolarità delle funzioni olomorfe e confronto col comportamento delle funzioni reali di variabile reale; formula integrale di Cauchy per le derivate.

Richiami sulle serie di potenze in $\mathbb{C}$; funzioni analitiche in senso complesso; analiticità delle funzioni olomorfe (c.d.); differenza con le funzioni reali di variabile reale: esempio di funzione reale di variabile reale infinitamente derivabile con continuità ma non analitica in $\mathbb{R}$; sviluppi in serie notevoli in campo complesso (serie esponenziale, serie circolari, serie iperboliche, serie geometrica, serie logaritmica e serie binomiale); raggio di convergenza della serie di potenze di una funzione intera; stima di Cauchy per le derivate e confronto con il criterio di analiticità per funzioni infinitamente derivabili in campo reale; disuguaglianze di Cauchy per i coefficienti della serie di potenze di una funzione olomorfa; il teorema di Liouville (c.d.) la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra col suo utilizzo.

Proprietà delle funzioni analitiche: zeri di ordine finito e di ordine infinito; una funzione olomorfa in un dominio ammette zeri di ordine infinito se e solo

se è nulla in tale dominio (c.d.); l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla in un dominio è un insieme discreto e privo di punti di accumulazione appartenenti al dominio di olomorfia (c.d.); teorema degli zeri per una funzione olomorfa: l'ordine di uno zero di una funzione olomorfa è univocamente determinato; principio di identità per funzioni olomorfe (con varie formulazioni) e suoi corollari (c.d.).
Conseguenze del principio di identità per funzioni olomorfe: differenza tra funzioni complesse olomorfe e funzioni reali derivabili; esempi; principio di identità come strumento per dimostrare in $\mathbb{C}$ alcune identità algebriche che coinvolgono funzioni intere; prolungamento o estensione analitica di funzioni analitiche in senso reale; prolungamento di funzioni olomorfe in un aperto; esempi; le funzioni trascendenti elementari sono le uniche estensioni analitiche in $\mathbb{C}$ delle "omonime" funzioni reali di variabile reale; procedimento di estensione analitica di una funzione olomorfa "attorno" a un punto di non derivabilità (isolato); "barriera" (o "frontiera") naturale di singolarità: esempio; funzioni analiticche espresse come somme di serie di potenze formalmente diverse, ma prolungamento analitico l'una dell'altra; multifunzioni analitiche e loro elementi analitici; sviluppi in serie di potenze di una funzione analitica f che possono convergere in punti non appartenenti al dominio di olomorfia di f, o che convergono in punti interni al dominio, ma con somma diversa da f; esempi.
Principio del massimo modulo (c.d.) e suoi corollari (c.d.); diverse formulazioni di tale principio e osservazioni; disuguaglianze di Cauchy del massimo modulo.
Serie bilatere e loro convergenza in corone circolari; sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare (c.d.); univocità dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent; parte principale e parte regolare della serie; sviluppi in dischi bucati o in domini privati di un punto; esempi; disuguaglianze di Cauchy per le serie di Laurent.
Punti regolari e punti singolari; punti singolari isolati e punti singolari non isolati; esempi; classificazione delle singolarità isolate di una funzione tramite lo sviluppo in serie di Laurent e tramite il comportamento della funzione "vicino" alla singolarità; esempi; teorema di Riemann sulle singolarità eliminabili. Punto singolare isolato all'infinito per funzioni intere; funzioni meromorfe; continuità delle funzioni meromorfe nel piano complesso esteso;

una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ possiede al massimo un'infinità numerabile di poli (c.d.); funzioni razionali; le funzioni razionali sono prive di singolarità essenziali (c.d.); ordine di una funzione razionale; funzioni razionali di ordine 1; zeri e poli di una funzione e del suo reciproco; rapporto di funzioni meromorfe con zeri o poli in comune: regola di de l'Hôpital per funzioni complesse (c.d.); somma, prodotto e quoziente di funzioni meromorfe; sviluppi in serie di Taylor e/o di Laurent di una funzione meromorfa; esempi; una funzione non può essere limitata in modulo in un intorno di una singolarità isolata non eliminabile (c.d.).
Comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità isolata essenziale: teorema di Casorati (c.d.); teorema di Picard.
Residuo di una funzione in un suo punto singolare isolato; teorema dei residui (c.d.); residuo in una singolarità eliminabile; formula per il calcolo dei residui in un polo semplice e in un polo di ordine m (c.d.); residuo nell'origine di una funzione pari; legame tra olomorfia di una funzione in un punto ed residuo nullo in quel punto; calcolo del residuo di una funzione rapporto di funzioni olomorfe con denominatore che ha uno zero semplice; esempi.
Residuo all'infinito; sviluppo in serie di Laurent di una funzione in un intorno di infinito: parte singolare e parte regolare; esempi; studio del residuo a infinito di $f(z)$ col cambio di variabile $z = \frac{1}{\xi}$; teorema della somma dei residui (c.d.) e conseguenze: somma dei residui al finito nulla (e residuo a infinito nullo) di una funzione con un numero finito di singolarità isolate con comportamento asintotico a infinito di $\frac{1}{|z|^m}$, $m > 1$; calcolo di integrali curvilinei tramite il teorema dei residui; teorema dell'indicatore logaritmico (c.d.) o principio dell'argomento e conseguenze (una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli ha numero di poli pari al numero di zeri; teorema di Rouché (c.d.) e conseguenza: il teorema fondamentale dell'algebra; esempio di utilizzo del Teorema di Rouché per la localizzazione degli zeri di una funzione olomorfa.
Lemma di Jordan (c.d.) e sue diverse formulazioni. Calcolo di integrali tramite il teorema dei residui, l'applicazione del Lemma di Jordan e gli strumenti dell'analisi complessa: calcolo di integrali di funzioni razionali fratte (in $\mathbb{R}$) in cui il grado del denominatore supera di almeno 2 quello del numeratore (più in generale, calcolo di integrali in $\mathbb{R}$ di funzioni prolungabili in $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli che non stanno sull'asse reale, infinitesime

a infinito); integrali in $\mathbb{R}$ "tipo trasformata di Fourier"; Lemma di Jordan del piccolo cerchio (c.d.) e sua applicazione nel calcolo di integrali generalizzati che richiedono di "aggirare" un polo semplice; calcolo di integrali in $\mathbb{R}$ "tipo trasformata di Fourier della funzione di Gauss"; integrali di Frésnel.

Elementi di analisi funzionale.

Spazi di Banach; proprietà della funzione norma; esempi: $\mathbb{R}^N$ con la norma euclidea e con altre norme; spazio delle funzioni continue su un compatto con la norma lagrangiana; spazio delle funzioni limitate con la norma del sup; spazi di Lagrange; $C[a,b]$ con la norma del max e con la norma integrale di ordine 1; norme equivalenti; norme equivalenti in uno spazio di dimensione finita (c.d.); completezza di uno spazio normato di dimensione finita (c.d.) e corollari per sottospazi di dimensione finita; il teorema di approssimazione di Weierstrass; definizione di spazio di Hilbert.

Disuguaglianze ausiliarie: disuguaglianza di Young (c.d.); disuguaglianza di Hölder (c.d.); disuguaglianza di Minkowsky (c.d.).

Operatori lineari tra spazi vettoriali normati e funzionali lineari; operatori limitati e norma di un operatore (definizioni equivalenti); condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore sia limitato è che trasformi insiemi limitati in insiemi limitati (c.d.); esempio; limitatezza di un operatore $A : X \to Y$ con X di dimensione finita (c.d.); operatori continui e operatori uniformemente continui; un operatore lineare è limitato se e solo se è continuo (c.d.); lo ppazio $\mathcal{L}(X,Y)$ degli operatori lineari continui; spazio duale e norma duale; completezza di $\mathcal{L}(X,Y)$ se Y è uno spazio di Banach (c.d.); operatore lineare prodotto; operatori invertibili; esempi.

Teorema di Helly-Hahn-Banach (c.d.); Corollario 1 (in uno spazio normato) (c.d.); Corollario 2; Corollario 3 (c.d.) (che esprime la norma di un vettore come max); Teorema di Banach-Steinhaus (c.d.) e tre corollari (c.d.).

Spazio biduale; iniezione canonica e definizione di spazio riflessivo. Topologia iniziale e convergenza di successioni nella topologia iniziale; topologia debole in uno spazio di Banach; convergenza debole e sue proprietà (c.d.). Equivalenza della topologia debole e della topologia forte in uno spazio normato finito-dimensionale (c.d.); esempi di insiemi non debolmente chiusi e

non debolmente aperti: la sfera unitaria e la bolla unitaria in uno spazio di dimensione infinita; non “metrizzabilità” della topologia debole in uno spazio di dimensione infinita; coincidenza di chiusura debole e forte in insiemi convessi. La topologia debole$*$ su uno spazio duale e sue proprietà (c.d.); confronto tra topologia debole$*$, topologia debole e topologia forte in uno spazio duale; importanza delle topologie deboli; i teoremi di Riesz e di Banach-Alaoglu-Bourbaki; topologie coincidenti in spazi di dimensione finita.
Spazi riflessivi; esempi; Teorema di Kakutani (c.d.); teorema di compattezza debole sequenziale e Teorema di Eberlein-Smulian; compattezza in uno spazio metrico e in uno spazio topologico; riflessività di un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach riflessivo (c.d.); legame tra riflessività di uno spazio di Banach e del suo duale (c.d.).
Definizione di spazio separabile e alcune proprietà: sottoinsiemi di spazi separabili; spazi di Banach separabili tali che il duale sia separabile; spazi separabili e riflessivi; metrizzabilità della bolla chiusa unitaria del duale di uno spazio di Banach separabile rispetto alla topologia debole*; metrizzabilità della bolla chiusa unitaria rispetto alla topologia debole in uno spazio di Banach con duale separabile; successioni limitate sequenzialmente debolmente* compatte nel duale di uno spazio di Banach separabile.
Definizione di spazio uniformemente convesso; proprietà geometrica dell'uniforme convessità; esempio di norma uniformemente convessa equivalente a una norma che non lo è; Teorema di Milmann-Pettis; successioni debolmente convergenti in uno spazio uniformemente convesso.
Spazi $L^p(\Omega)$: definizione nello spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ dove $\mathcal{M}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ e μ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$; L^p è uno spazio vettoriale (c.d.); L^p è uno spazio normato (c.d.); spazio delle funzioni essenzialmente limitate L^∞; estremo superiore essenziale (definizioni equivalenti); norma in L^∞ col sup del modulo della funzione nel complementare di un insieme di misura nulla (c.d.); confronto tra sup e sup essenziale di una funzione; sup e sup essenziale per funzioni continue; esempi; L^∞ è uno spazio normato (c.d.); L^∞ è uno spazio di Banach (c.d.). Disuguaglianza di Hölder negli spazi L^p (c.d.) e disuguaglianza di Hölder generalizzata; utilizzo della disuguaglianza di Hölder per dimostrare la disuguaglianza triangolare di Minkowsky nella norma L^p; inclusione

tra gli spazi L^p per insiemi di misura finita (c.d.); esempi; disuguaglianza di interpolazione per gli spazi L^p (c.d.); Teorema di Fischer-Riesz (c.d.); proprietà di sottosuccessioni di successioni convergenti in L^p (c.d.); disuguaglianze di Clarkson (la i) c.d.); riflessività di L^p per $1 < p < \infty$ (c.d.); seconda dimostrazione con l'utilizzo dell'operatore $T : L^p \to (L^q)^*$; Teorema di rappresentazione di Riesz in L^p per $1 < p < \infty$ (c.d.); separabilità di L^p per $1 \leq p < \infty$; proprietà dello spazio L^1; Teorema di rappresentazione di Riesz in L^1; duale di L^1; proprietà dello spazio L^∞ visto come duale di L^1; non separabilità e non riflessività di L^∞; esempio che mostra che per funzionali lineari continui in L^∞ non vale la formula di rappresentazione. Risultati di convergenza debole e proprietà riguardanti le topologie deboli negli spazi L^p.
Definizione del prodotto di convoluzione, enunciato del teorema di Young e proprietà del prodotto di convoluzione; definzione di spazio delle funzioni localmente integrabili; definzione di spazio delle funzioni continue a supporto compatto e risultati di densità; l'operatore di traslazione e sua continuità negli spazi L^p.

La trasformazione di Fourier. Funzioni Fourier-trasformabili e condizione sufficiente di trasformabilità; trasformazione di Fourier in L^1; trasformata di funzioni a valori reali e pari e di funzioni a valori reali e dispari (c.d.); linearità e continuità dell'operatore di Fourier (c.d.); effetto "regolarizzante" della trasformazione di Fourier: esempi; continuità della trasformata di Fourier (c.d.); Teorema di Riemann-Lebesgue (c.d.); proprietà della trasformata di Fourier: riscalamento (c.d.); coniugio (c.d.); traslazione nel tempo (c.d.); traslazione della frequenza (c.d.); formula di moltiplicazione (c.d.); derivata della trasformata di Fourier (c.d.); trasformata della derivata (c.d.); trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione (c.d.); funzioni antitrasformabili e antitrasformazione di Fourier; formula di simmetria (c.d.) e teorema di inversione; calcolo della trasformata di Fourier della funzione di Gauss con i metodi dell'analisi complessa e con le proprietà della trasformazione di Fourier; confronto tra serie e trasformata di Fourier con qualche riferimento alla teoria dei segnali.

Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni rapidamente decrescenti; una funzione rapidamente decrescente è limitata e integrabile (c.d.); una funzione rapidamente decrescente è Fourier trasformabile e la sua trasformata è anch'essa rapidamente decrescente (c.d.); trasformazione di Fourier nello spazio di Schwartz e Teorema di Plancherel in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; teorema e identità di Plancherel in $L^2(\mathbb{R})$.
Un'applicazione della trasformata di Fourier all'equazione del calore.

La trasformazione di Laplace.
Funzioni Laplace-trasformabili e assolutamente Laplace-trasformabili; ascissa di convergenza e trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza; ordine esponenziale di una funzione e legame con l'ascissa di convergenza; esempi: trasformata di Laplace della funzione di Heaviside (gradino unitario) e trasformata della funzione esponenziale; linearità della trasformazione di Laplace (c.d.); calcolo della trasformata di Laplace delle funzioni trigonometriche, delle funzioni iperboliche e delle funzioni polinomiali; definizione di segnale (Laplace-trasformabile); limitatezza in modulo della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza (c.d.); trasformata di Laplace $\mathcal{L}[f](s)$ infinitesima per $\mathrm{Re}(s)$ tende a infinito (c.d.); legame tra la trasformazione di Laplace e trasformazione di Fourier (c.d.); proprietà di riscalamento, di traslazione e di "smorzamento"; trasformata di Laplace di un segnale periodico (c.d.); esempi; derivata della trasformata di Laplace (c.d.) e derivate di ordine successivo; trasformata della funzione $\frac{f(t)}{t}$ (c.d.). Trasformata della derivata (c.d.) e trasformata delle derivate successive; esempi; prodotto di convoluzione tra segnali localmente integrabili; trasformata di Laplace della convoluzione; trasformata di Laplace dell'integrale (o della primitiva) (c.d.); esempi. Antitrasformazione di Laplace; formula di inversione di Riemann-Fourier; determinazione di un segnale continuo tramite la sua trasformata di Laplace; condizione su una funzione $F(s)$ complessa, olomorfa su un semipiano, affinché essa sia la trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$; la formula di inversione di Riemann-Fourier (per funzioni Laplace-trasformabili) ricavata tramite la formula di inversione per la trasformazione di Fourier. La formula di inversione di Riemann-Fourier nella ricostruzione della fun-

zione di Heaviside $H(t)$ (per $t \neq 0$). Antitrasformata di Laplace di funzioni razionali fratte proprie con poli semplici e poli multipli; applicazione della trasformata di Laplace per la risoluzione di alcuni problemi di Cauchy.

Testi di riferimento

Analisi complessa:
- L.V. Ahlfors, *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, third edition, McGraw-Hill (1979);
- dispense disponibili sul sito docente.

Analisi funzionale:
- H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, New York (2011);
- dispense disponibili sul sito docente.

Trasformate (e analisi complessa):
- G.C. Barozzi, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli (2001);
- dispense disponibili sul sito docente.

Nelle dispense c'è una bibliografia dove vengono forniti altri testi di approfondimento e/o consultazione.