leone corradi dell'acqua

# meccanica delle strutture
## il comportamento dei mezzi continui

**McGraw-Hill Libri Italia srl**

Milano • New York • St. Louis • San Francisco • Oklahoma City • Auckland
Bogotá • Caracas • Hamburg • Lisboa • London • Madrid • Montreal • New Delhi
Paris • San Juan • São Paulo • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

Un classico teorema di algebra lineare assicura che, essendo $\sigma$ simmetrica, la (2.14) ha sempre tre radici (o *autovalori*) reali $s_{\mathrm{I}}$, $s_{\mathrm{II}}$ e $s_{\mathrm{III}}$, detti *sforzi* (o tensioni) *principali*, in corrispondenza dei quali la (2.13) presenta soluzioni non banali. Se questi valori risultano distinti, i tre corrispondenti *autovettori* $\mathbf{n}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{n}_{\mathrm{II}}$, $\mathbf{n}_{\mathrm{III}}$ identificano tre direzioni mutuamente ortogonali, pure dette principali, che costituiscono un riferimento privilegiato. In presenza di autovalori coincidenti, esiste una molteplicità di direzioni principali, al cui interno è comunque possibile scegliere una terna triortogonale. Qualora sia $s_{\mathrm{I}} = s_{\mathrm{II}} = s_{\mathrm{III}}$ qualunque riferimento risulta principale.

I valori degli sforzi principali non dipendono dal sistema di riferimento originariamente assunto; le radici della (2.14) saranno pertanto sempre le stesse e pure indipendenti dal riferimento dovranno risultare i coefficienti (2.15), cui ci si riferisce come agli *invarianti di sforzo* (rispettivamente lineare, quadratico e cubico). Nel riferimento principale le loro espressioni si semplificano e divengono

$$J_1 = s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}}; \qquad J_2 = s_{\mathrm{I}} s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}} s_{\mathrm{I}}; \qquad J_3 = s_{\mathrm{I}} s_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{III}} \tag{2.16}$$

Ovviamente, qualunque combinazione delle (2.15) da luogo a quantità indipendenti dal riferimento (le tensioni principali sono esse stesse degli invarianti). È tuttavia possibile dimostrare che un tensore doppio possiede tre soli invarianti indipendenti.

### 2.1.4 COMPONENTI IDROSTATICA E DEVIATORICA DEGLI SFORZI

Risulta a volte conveniente esprimere lo stato di sforzo come somma dei due seguenti addendi

$$\sigma_{ij} = p\,\delta_{ij} + S_{ij} \tag{2.17a}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{bmatrix} \tag{2.17b}$$

dove

$$p = \frac{J_1}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}}) \tag{2.18}$$

è noto come *pressione idrostatica*. Nella (2.17*a*) il simbolo $\delta_{ij}$ indica il tensore doppio identità o di Kronecker, che vale, per definizione

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{b}$$

Il primo addendo della (2.17) costituisce la componente detta appunto idrostatica (o sferica) di sforzo (la denominazione è dettata dal fatto che lo stato di sforzo in un elemento di materiale soggetto a pressione uniforme è costituito da questo solo termine), mentre il secondo addendo è detto deviatore di tensione. In virtù della (2.18) la sua espressione risulta



$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \dfrac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \dfrac{-\sigma_x + 2\sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \dfrac{-\sigma_x - \sigma_y + 2\sigma_z}{3} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

È facile verificare che i valori principali $\bar{S}_\alpha$ delle tensioni deviatoriche sono

$$\bar{S}_\alpha = s_\alpha - p, \qquad \alpha = \mathrm{I, II, III} \tag{2.20}$$

mentre le direzioni principali coincidono con quelle di $\sigma$. Gli invarianti del deviatore risultano

$$J_1' = J_1 - 3p = 0 \tag{2.21a}$$

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{3}(J_1^2 - 3J_2) = \frac{1}{6}[(s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}})^2 + (s_{\mathrm{II}} - s_{\mathrm{III}})^2 + (s_{\mathrm{III}} - s_{\mathrm{I}})^2] = \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \end{aligned} \tag{2.21b}$$

$$J_3' = \frac{1}{27}(2J_1^3 - 9\,J_1 J_2 + 27\,J_3) = (s_{\mathrm{I}} - p)(s_{\mathrm{II}} - p)(s_{\mathrm{III}} - p) \tag{2.21c}$$

***ESEMPIO 2.1*** Si consideri il tensore degli sforzi

$$\sigma = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 10 \\ -20 & 60 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(MPa)}$$

Gli invarianti (2.15) valgono

$$J_1 = 103 \qquad J_2 = 2200 \qquad J_3 = 0$$

L'equazione (2.14) si scrive quindi

$$s^3 - 103s^2 + 2200s = 0$$

e le sue radici risultano

$$s_{\mathrm{I}} = 72.766 \qquad s_{\mathrm{II}} = 30.234 \qquad s_{\mathrm{III}} = 0$$

Le corrispondenti direzioni principali sono le soluzioni non banali del sistema omogeneo (2.13*b*), in cui $s$ è posto, di volta in volta, uguale a una delle tre tensioni principali. Si ottiene

$$n_I = \begin{Bmatrix} .536 \\ -.840 \\ .077 \end{Bmatrix} \qquad n_{II} = \begin{Bmatrix} .794 \\ .533 \\ .292 \end{Bmatrix} \qquad n_{III} \begin{Bmatrix} .286 \\ .095 \\ -.953 \end{Bmatrix}$$

Tali vettori sono stati normalizzati imponendo la condizione $n_\alpha^t n_\alpha = 1$, in modo che le loro componenti rappresentino i coseni direttori delle tre direzioni principali rispetto agli assi del riferimento originario. È facile verificare che i tre vettori risultano mutuamente ortogonali. Si può anche constatare come gli invarianti siano effettivamente tali e che, in particolare, risulta $J_1 = s_I + s_{II}$ e $J_2 = s_I s_{II}$.

La pressione idrostatica e il deviatore valgono

$$p = 103/3 = 34.333 \qquad S = \begin{bmatrix} 5.667 & -20 & 10 \\ -20 & 25.667 & 0 \\ 10 & 0 & -31.333 \end{bmatrix}$$

È possibile verificare che gli autovalori di $S$ soddisfano la (2.20).

***ESEMPIO 2.2*** Si consideri lo stato di sforzo

$$\sigma = \begin{bmatrix} 75 & 20 & 0 \\ 20 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} \qquad \text{(MPa)}$$

Gli sforzi principali valgono, come è facile verificare

$$s_I = 85; \qquad s_{II} = s_{III} = 35$$

La direzione principale $n_I$ è univocamente definita; essa si ottiene come soluzione non banale del sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} 75-s_I & 20 & 0 \\ 20 & 45-s_I & 0 \\ 0 & 0 & 35-s_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 20 & 0 \\ 20 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e risulta, normalizzando

$$n_I = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .894 \\ .447 \\ .0 \end{Bmatrix}$$

Gli autovettori corrispondenti ai due rimanenti valori principali (tra loro coincidenti) sono invece le soluzioni non banali del sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} 75-35 & 20 & 0 \\ 20 & 45-35 & 0 \\ 0 & 0 & 35-35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



e risultano

$$n_{II,\,III} = \frac{1}{\sqrt{5\alpha^2 + \beta^2}} \begin{Bmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

Al variare di $\alpha$ e $\beta$ si ottengono tutte le direzioni nel piano ortogonale a $n_I$. È ovviamente sempre possibile scegliere in questo piano due direzioni tra loro ortogonali. Ad esempio

$$n_{II} = \begin{Bmatrix} -.447 \\ .894 \\ .0 \end{Bmatrix} \qquad n_{III} = \begin{Bmatrix} .0 \\ .0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

## 2.1.5 STATI DI SFORZO PIANI

### 2.1.5.1 Definizione

Si consideri (Figura 2.9) un tetraedro di Cauchy riferito alla terna principale. Il tensore degli sforzi risulta allora diagonale, con sole tensioni normali pari ai valori principali. Detti $\alpha_I$, $\alpha_{II}$ e $\alpha_{III}$ i coseni direttori di $n_\alpha$ *rispetto agli assi principali*, dalla (2.6) si ottiene

$$\sigma_\alpha = \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha I} \\ \sigma_{\alpha II} \\ \sigma_{\alpha III} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_I \\ \alpha_{II} \\ \alpha_{III} \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

relazione che esprime il vettore tensione sulla generica giacitura $n_\alpha$ in funzione degli sforzi principali.

Si supponga adesso che una delle tensioni principali, ad esempio $s_{III}$, sia nulla. La (2.22) allora mostra che la componente $\sigma_{\alpha III}$ risulterà nulla su qualunque giacitura, cioè che il vettore $\sigma_\alpha$ sarà sempre contenuto nel piano ortogonale a $n_{III}$. In tal caso, lo stato tensionale si dice *piano*.

Senza perdita di generalità, si può identificare la direzione $n_{III}$ con l'asse $z$; essendo

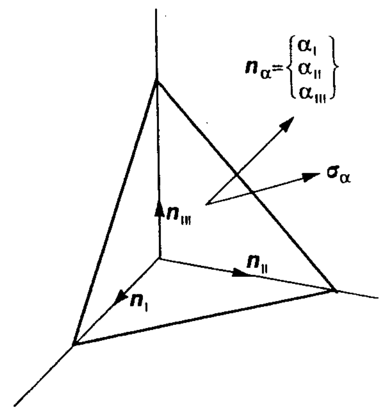


**Figura 2.9**