



CAP.3 - RISPOSTA AD UN CARICO SINUSOIDALE

3.1 SISTEMA NON SMORZATO

SOLUZIONE OMOGENEA

Si supponga che il sistema della Fig.(1.1) sia sottoposto ad un carico sinusoidale $p(t)$ di ampiezza p_0 e di frequenza angolare $\bar{\omega}$. L'equazione differenziale del moto diventa:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (3.1)$$

Per iniziare si studia il caso di un sistema non smorzato per il quale questa equazione diventa:

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (3.2)$$

La soluzione omogenea (senza il termine noto) di questa equazione fornisce la risposta in oscillazione libera dell'eq. (2.9):

$$v_o(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

SOLUZIONE PARTICOLARE

La soluzione generale fa intervenire anche la soluzione particolare, cioè la componente della risposta che dipende direttamente dalla funzione di carico. Si può considerare che la risposta al carico sinusoidale sia sinusoidale ed in fase con il carico; quindi:

$$v_p(t) = G \sin(\bar{\omega}t) \quad (3.4)$$

in cui resta da determinare l'ampiezza G . Sostituendo nell'eq.(3.2) la derivata seconda dell'eq.(3.4) fatta rispetto al tempo si ottiene:

$$-G\bar{\omega}^2 m \sin(\bar{\omega}t) + kG \sin(\bar{\omega}t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (3.5)$$

Dividendo entrambe i membri per $\sin(\bar{\omega}t)$ (generalmente non nulla) e per la rigidità k e ricordando che $\omega^2 = k/m$, si ottiene:

$$G \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \right) = \frac{p_0}{k} \quad (3.6)$$

L'ampiezza della risposta diventa quindi:

$$G = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \right)} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} \quad (3.7)$$

dove β è il rapporto tra la frequenza del carico e la frequenza propria (o naturale) in oscillazione libera, detto anche **rapporto delle frequenze**:

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (3.8)$$

SOLUZIONE GENERALE

La soluzione generale che corrisponde ad un'eccitazione sinusoidale applicata ad un sistema non smorzato risulta quindi la somma della soluzione omogenea e della soluzione particolare, in cui G si ottiene per mezzo dell'eq.(3.7), cioè:

$$v(t) = v_o(t) + v_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} \sin(\bar{\omega}t) \quad (3.9)$$

in cui il valore di A e B dipende dalle condizioni iniziali. Nel caso di un sistema inizialmente a riposo, cioè per il quale $v(0) = \dot{v}(0) = 0$, tenendo presente che la velocità vale:



$$\dot{v}(t) = \omega A \cos(\omega t) - \omega B \sin(\omega t) + \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{(1 - \beta^2)} \cos(\bar{\omega} t)$$

le costanti assumono il seguente valore:

$$A = -\frac{p_0}{k} \frac{\beta}{(1 - \beta^2)} \quad B = 0 \quad (3.10)$$

La risposta data dall'eq.(3.9) è allora:

$$v(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} [\sin(\bar{\omega} t) - \beta \sin(\omega t)] \quad (3.11)$$

- in cui $\frac{p_0}{k} = v_{st}$ è lo spostamento statico, cioè lo spostamento che sarebbe prodotto dalla forza p_0 se fosse applicata staticamente;
- $\frac{1}{(1 - \beta^2)}$ è il fattore di amplificazione che rappresenta l'effetto di amplificazione dinamica del carico sinusoidale;
- $\sin(\bar{\omega} t)$ è la componente della risposta avente la frequenza del carico applicato; si tratta della risposta in oscillazione permanente, direttamente legata al carico applicato;
- $\beta \sin(\omega t)$ è la componente della risposta avente la frequenza propria del sistema; corrisponde all'oscillazione libera che dipende dalle condizioni iniziali.

Poiché in pratica lo smorzamento farà prima o poi sparire l'ultimo termine, questo prende il nome di risposta transitoria (nel caso teorico di sistema non smorzato, questo termine non sparirà mai).

FATTORE DI RISPOSTA

Una misura utile dell'influenza del carattere dinamico del carico applicato è fornita dal rapporto $R(t)$ della risposta dinamica e dello spostamento che sarebbe prodotto dall'applicazione statica dello stesso carico. Si tratta del fattore di risposta:

$$R(t) = \frac{v(t)}{v_{st}} = \frac{v(t)}{p_0/k} \quad (3.12)$$

L'eq.(3.11) fornisce il fattore di risposta per il carico sinusoidale di un sistema non smorzato (con partenza da fermo):

$$R(t) = \frac{1}{(1 - \beta^2)} [\sin(\bar{\omega} t) - \beta \sin(\omega t)] \quad (3.13)$$

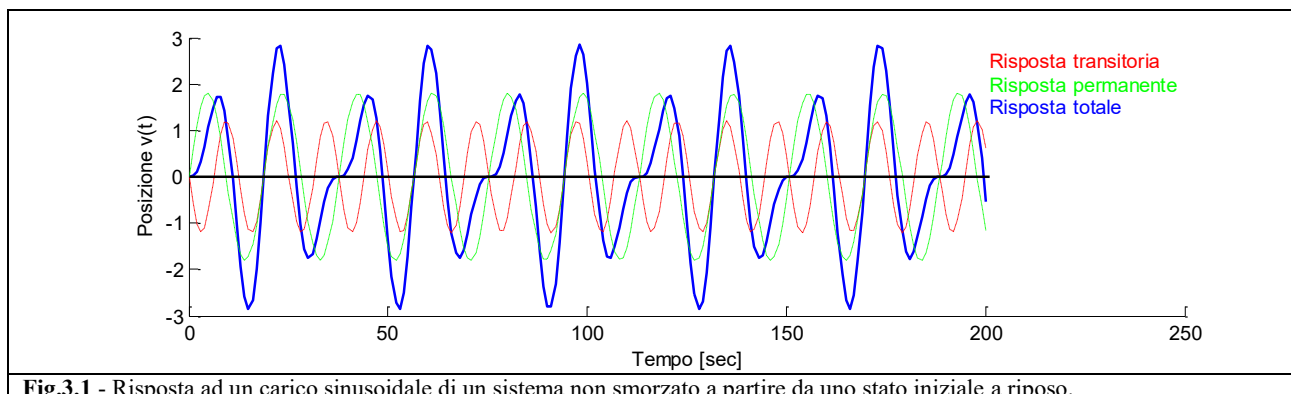


Fig.3.1 - Risposta ad un carico sinusoidale di un sistema non smorzato a partire da uno stato iniziale a riposo.

Questa risposta appare più chiaramente nella fig.(3.1) dove la curva di colore verde rappresenta l'oscillazione permanente mentre quella rossa rappresenta il moto transitorio determinato dalle condizioni



iniziali. In questo esempio si è posto $\beta = 2/3$, cioè la frequenza del carico applicato è uguale a due terzi della frequenza propria del sistema. La risposta totale è rappresentata dalla curva blu.

E' importante mettere in evidenza due punti:

- 1) Le due componenti hanno la tendenza a mettersi in fase poi ad allontanarsi di nuovo, il che provoca nella risposta un effetto di battimento;
- 2) All'istante $t = 0$ la tangente è orizzontale, il che mostra che la velocità della componente transitoria ha assunto il valore necessario ad annullare quella della componente permanente, e quindi soddisfare le condizioni iniziali.

3.2 SISTEMA SMORZATO

Tornando all'eq.(3.1) si tenga conto questa volta dello smorzamento; dividendo l'equazione per la massa m e notando che $c/m = 2\xi\omega$, si ottiene:

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega\dot{v}(t) + \omega^2v(t) = \frac{p_0}{m}\sin(\bar{\omega}t) \quad (3.14)$$

La soluzione omogenea di questa equazione fornisce la risposta in oscillazione libera del sistema smorzato; supponendo, come capita quasi sempre nella pratica, che la struttura sia sotto-smorzata, la soluzione è data dall'eq.(2.26):

$$v_o(t) = e^{-\xi\omega t}[A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)] \quad (3.15)$$

La soluzione particolare è della forma:

$$v_p(t) = G_1\sin(\bar{\omega}t) + G_2\cos(\bar{\omega}t) \quad (3.16)$$

in cui il secondo termine è necessario perché un sistema smorzato in generale non è in fase con il carico applicato. Derivando due volte l'eq.(3.16) si ottiene:

$$\dot{v}_p(t) = G_1\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t) - G_2\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t) \quad \dot{v}_p(t) = -G_1\bar{\omega}^2\sin(\bar{\omega}t) - G_2\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega}t)$$

e sostituendo queste equazioni nell'eq.(3.14) si ottiene:

$$-G_1\bar{\omega}^2\sin(\bar{\omega}t) - G_2\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega}t) + 2\xi\omega[G_1\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t) - G_2\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t)] + \omega^2[G_1\sin(\bar{\omega}t) + G_2\cos(\bar{\omega}t)] = \frac{p_0}{m}\sin(\bar{\omega}t)$$

Raggruppando i termini che moltiplicano rispettivamente le funzioni seno e coseno si ottiene:

$$[-G_1\bar{\omega}^2 - G_22\xi\omega\bar{\omega} + G_1\omega^2]\sin(\bar{\omega}t) + [-G_2\bar{\omega}^2 + G_12\xi\omega\bar{\omega} + G_2\omega^2]\cos(\bar{\omega}t) = \frac{p_0}{m}\sin(\bar{\omega}t)$$

Poiché le funzioni seno e coseno non si annullano contemporaneamente, è necessario soddisfare il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} [-G_1\bar{\omega}^2 - G_22\xi\omega\bar{\omega} + G_1\omega^2] = \frac{p_0}{m} \\ [-G_2\bar{\omega}^2 + G_12\xi\omega\bar{\omega} + G_2\omega^2] = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Dividendo le due equazioni per ω^2 si ottiene:

$$\begin{cases} G_1(1 - \beta^2) - G_2(2\xi\beta) = \frac{p_0}{k} \\ G_2(1 - \beta^2) + G_1(2\xi\beta) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 - \beta^2 & -2\xi\beta \\ 2\xi\beta & 1 - \beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0}{k} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

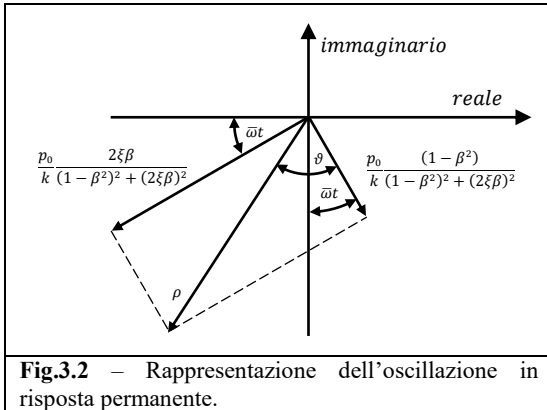
Risolvendo si ottengono i fattori della risposta:



$$\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \begin{bmatrix} 1 - \beta^2 & 2\xi\beta \\ -2\xi\beta & 1 - \beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0/k \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{p_0/k}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \begin{Bmatrix} (1 - \beta^2) \\ -2\xi\beta \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Riportando queste espressioni nella soluzione particolare e combinando quest'ultima con la soluzione omogenea si ottiene la soluzione generale:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] + \frac{p_0/k}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin(\bar{\omega} t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega} t)] \quad (3.20)$$



Il primo termine rappresenta la risposta transitoria. Le costanti A e B potrebbero essere calcolate a partire dalle condizioni iniziali, ma questo termine diventa trascurabile al passare del tempo e non presenta quindi molto interesse. Il secondo termine rappresenta la componente permanente della risposta; la sua frequenza è quella del carico applicato, ma con un ritardo di fase.

Questo comportamento in oscillazione permanente appare chiaramente nel piano complesso, Fig.3.2.

Il modulo della risultante rappresenta l'ampiezza della risposta permanente:

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (-2\xi\beta)^2} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (3.21)$$

e il ritardo di fase vale:

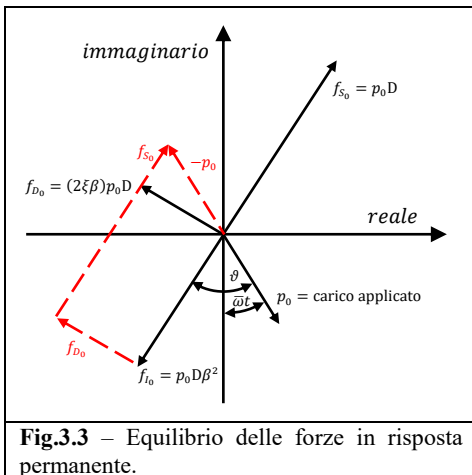
$$\vartheta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right) \quad \text{con} \quad 0 < \vartheta < 180^\circ \quad (3.22)$$

La componente permanente della risposta può dunque esprimersi nel modo seguente:

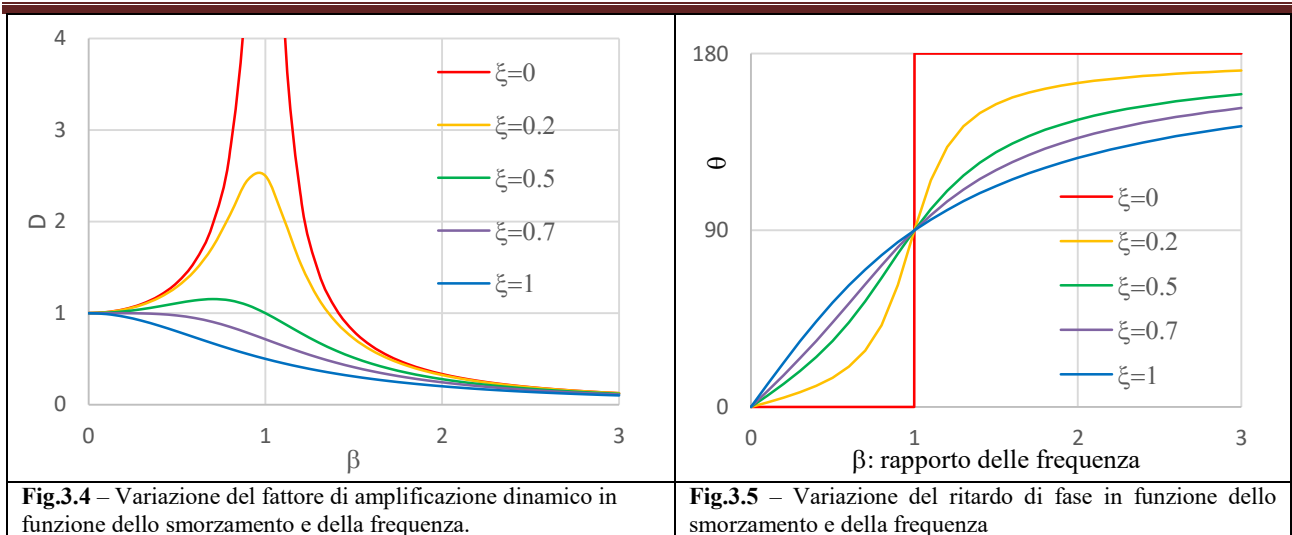
$$v(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \vartheta) \quad (3.23)$$

Il rapporto D dell'ampiezza della risposta in moto permanente sullo spostamento statico che sarebbe prodotto dalla forza p_0 si chiama **fattore d'amplificazione dinamica** e vale:

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (3.24)$$



Si analizzi l'equilibrio delle forze che agiscono sulla massa durante l'oscillazione permanente. La fig.3.3 è un diagramma nel piano complesso dove le componenti delle forze sono espresse in funzione del fattore d'amplificazione dinamica. Si osserva che la forza elastica agisce nel verso opposto alla risultante del vettore spostamento della Fig.3.2; analogamente le forze di smorzamento e le forze d'inerzia agiscono rispettivamente nel verso opposto ai vettori velocità e accelerazione. Queste forze mantengono un equilibrio dinamico con il carico applicato p_0 (Le frecce rosse indicano che il poligono delle forze è chiuso). L'eq.(3.24) mostra che il fattore d'amplificazione dinamico D varia con il rapporto delle frequenze β e con il fattore di smorzamento ξ ; l'eq.(3.22) mostra che anche il ritardo di fase ϑ è funzione di β e di ξ .



ESEMPIO E3.1 – Un eccitatore armonico portatile è un apparecchio destinato a misurare le caratteristiche dinamiche di una struttura in scala reale. Utilizzando la macchina a due frequenze differenti e misurando ogni volta l’ampiezza e il ritardo di fase della risposta, è possibile determinare la massa, il fattore di smorzamento e la rigidezza di una struttura che possieda un solo grado di libertà. Si ipotizzi che durante un esperimento di questo tipo, il telaio di un edificio ad un piano sia sottoposto ad una forza di ampiezza pari a 2500 [N] applicata prima alla frequenze angolari di $\bar{\omega}_1 = 16 [rad/s]$, poi alla frequenza $\bar{\omega}_2 = 25 [rad/s]$. Si ipotizzi che l’ampiezza ed il ritardo di fase ottenuti nei due casi siano:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.206 [mm] & \vartheta_1 &= 15^\circ & \cos(\vartheta_1) &= 0.966 & \sin(\vartheta_1) &= 0.259 \\ \rho_2 &= 0.417 [mm] & \vartheta_2 &= 55^\circ & \cos(\vartheta_2) &= 0.574 & \sin(\vartheta_2) &= 0.819 \end{aligned}$$

Per calcolare le caratteristiche dinamiche in funzione dei dati è possibile scrivere l’eq.(3.21) nel modo seguente:

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)^2}} = \frac{p_0 \cos(\vartheta)}{k(1 - \beta^2)} \tag{E3.1a}^1$$

Semplificando si ottiene:

$$k(1 - \beta^2) = k - k \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = k - k \frac{\bar{\omega}^2}{k/m} = k - \bar{\omega}^2 m = \frac{p_0}{\rho} \cos(\vartheta)$$

Disponendo dei risultati di due misure, è possibile scrivere un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} k - \bar{\omega}_1^2 m = \frac{p_0}{\rho_1} \cos(\vartheta_1) \\ k - \bar{\omega}_2^2 m = \frac{p_0}{\rho_2} \cos(\vartheta_2) \end{cases}$$

e in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\bar{\omega}_1^2 \\ 1 & -\bar{\omega}_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} = p_0 \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta_1)/\rho_1 \\ \cos(\vartheta_2)/\rho_2 \end{Bmatrix}$$

Sostituendo i dati del problema si ottiene:

¹ Infatti: $\vartheta = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$ quindi $\tan(\vartheta) = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$ da cui $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2(\vartheta)}{\cos^2(\vartheta)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)}{\cos^2(\vartheta)}}} = \cos(\vartheta)$



$$\begin{bmatrix} 1 & -256 \\ 1 & -625 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} = 2500 \begin{Bmatrix} 4.689 \\ 1.3755 \end{Bmatrix} \times 10^3 = \begin{Bmatrix} 11722.4 \\ 3438.71 \end{Bmatrix} \times 10^3$$

da cui

$$k = 17.469 \times 10^6 \text{ [N/m]} \qquad m = 22449 \text{ [kg]}$$

da cui si ricava la frequenza naturale del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{17.469 \times 10^6}{22449}} = 27.9 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Per determinare il fattore di smorzamento, dalle eq.(E3.1a) e (3.22) si possono dedurre due espressioni per il $\cos(\vartheta)$.

$$\cos(\vartheta) = \rho \frac{k}{p_0} (1 - \beta^2) \qquad \cos(\vartheta) = \frac{1 - \beta^2}{2\xi\beta} \sin(\vartheta)$$

Eguagliando le due espressioni si ottiene:

$$\rho \frac{k}{p_0} (1 - \beta^2) = \frac{1 - \beta^2}{2\xi\beta} \sin(\vartheta) \qquad \text{da cui:} \qquad \xi = \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{2\beta k \rho}$$

Ricordando che:

$$c_c = 2m\omega \qquad \text{risulta:} \qquad \xi = \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{2\beta k \rho} = \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{2 \frac{\bar{\omega}}{\omega} \frac{k}{m} m \rho} = \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{2 \frac{\bar{\omega}}{\omega} \omega^2 m \rho} = \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{\bar{\omega} 2\omega m \rho}$$

Utilizzando i risultati del primo esperimento si ottiene:

$$c = \xi c_c = \frac{p_0 \sin(\vartheta_1)}{\bar{\omega}_1 \rho_1} = \frac{2500 \times \sin(15^\circ)}{16 \times 0.206 \times 10^{-3}} = 1.963 \times 10^5 \text{ [N s/m]}$$

I risultati del secondo esperimento forniscono un risultato molto simile:

$$c = \xi c_c = \frac{p_0 \sin(\vartheta_2)}{\bar{\omega}_2 \rho_2} = \frac{2500 \times \sin(55^\circ)}{25 \times 0.417 \times 10^{-3}} = 1.964 \times 10^5 \text{ [N s/m]}$$

Il fattore di smorzamento vale quindi:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{1.964 \times 10^5}{2 \times (22449) \times (27.9)} = 15.68\%$$

3.3 RISONANZA

La Fig.(3.2) mostra che quando il rapporto delle frequenze β è prossimo all'unità, nella risposta in oscillazione permanente dei sistemi poco smorzati si manifesta un picco. Nel caso in cui $\beta = 1$, cioè quando la frequenza del carico applicato è uguale alla frequenza naturale di vibrazione, si produce il fenomeno della **risonanza**. Se si considera l'eq. (3.13), è evidente che la risposta di un sistema non smorzato in uno stato di risonanza tende verso l'infinito. L'eq. (3.24) mette in evidenza una proprietà più generale della risonanza ($\beta = 1$): il fattore d'amplificazione dinamica è inversamente proporzionale al fattore di smorzamento:

$$D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \qquad (3.25)$$

Questo valore non rappresenta esattamente la risposta massima del sistema smorzato, benché vi sia molto vicino; il rapporto delle frequenze quando la risposta è massima si può ottenere annullando la derivata dell'eq.(3.24) rispetto a β . Per le strutture abituali il cui coefficiente di smorzamento ξ è inferiore a $1/\sqrt{2} \cong 70\%$, si trova che la frequenza in corrispondenza del picco della risposta è:



$$\beta_{pic} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \tag{3.26a}$$

e il valore del massimo è:

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \tag{3.26b}$$

Quando lo smorzamento è piccolo la differenza tra i valori ottenuti con l'eq.(3.25) e l'eq.(3.26b) è trascurabile.

Per comprendere meglio la natura della risposta risonante di una struttura ad un carico armonico, è necessario considerare l'equazione generale della risposta (3.20), nella quale interviene sia il termine permanente che quello transitorio. Alla frequenza di risonanza ($\beta = 1$) questa equazione diventa:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] - \frac{p_0 \cos(\omega t)}{k} \frac{1}{2\xi} \tag{3.27}$$

Si ipotizzi che all'istante iniziale il sistema sia a riposo ($v(0) = \dot{v}(0) = 0$). Le costanti valgono:

$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega_D} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \qquad B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \tag{3.28}$$

L'eq.(3.25) diventa:

$$v(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{p_0}{k} \left\{ e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right] - \cos(\omega t) \right\} \tag{3.29}$$

Per quanto riguarda lo smorzamento, il termine che moltiplica la funzione sinusoidale di questa equazione contribuirà molto poco all'ampiezza della risposta; inoltre la frequenza ammortizzata ω_D è quasi uguale a quella non ammortizzata ω . Quindi il fattore della risposta in questo caso si può approssimare come segue:

$$R(t) = \frac{v(t)}{p_0/k} \cong \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos(\omega t) \tag{3.30}$$

Quando lo smorzamento è nullo, l'eq.(3.29) diventa indeterminata, ma applicando la regola dell'Hospital (vedi [Appendice A](#)), si trova la risposta risonante del sistema non smorzato:

$$R(t) = \frac{1}{2} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)] \tag{3.31}$$

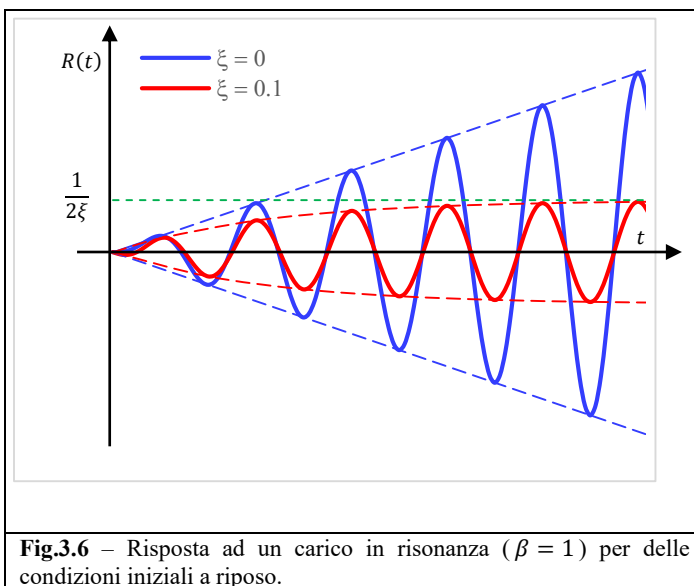
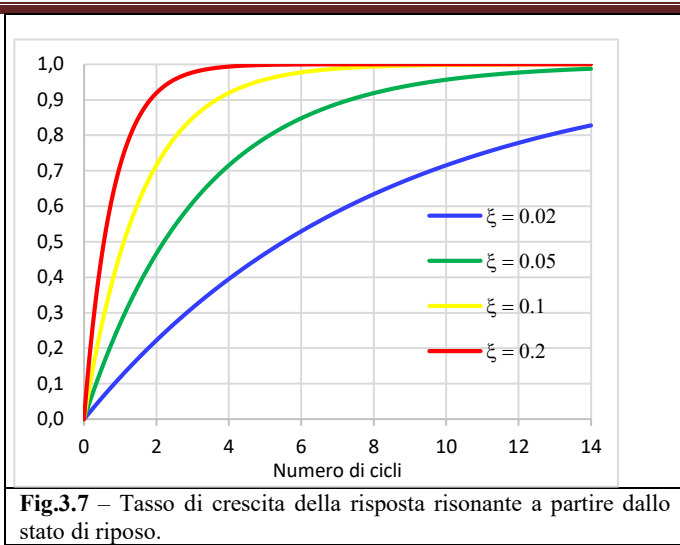


Fig.3.6 – Risposta ad un carico in risonanza ($\beta = 1$) per delle condizioni iniziali a riposo.

Le eq.(3.30) e (3.31) sono rappresentate graficamente nella Fig.(3.6) che mostra come, nel caso della risonanza, la risposta sia sempre amplificata; sia che il sistema sia smorzato o meno, si osserva facilmente che la risposta si amplifica in modo progressivo. Nel sistema non smorzato la risposta cresce della quantità π a ogni ciclo. Così se non si modifica la frequenza, la risposta del sistema può degenerare; è chiaro che la presenza dello smorzamento limita l'ampiezza della risposta risonante. Il numero di cicli necessari perché la risposta risonante raggiunga l'ampiezza massima dipende dal fattore di smorzamento.



Nella fig.3.7 per alcuni valori di smorzamento sono state tracciate le curve che mettono in evidenza la velocità di crescita dell'involuppo della risposta (rappresentate nella fig.3.6 con linee tratteggiate) in funzione del numero di cicli:

$$Tasso\ di\ crescita = (1 - e^{-\xi\omega t})$$

Si può osservare che è sufficiente un numero molto limitato di cicli perché la risposta raggiunga la risposta massima. Come il numero di cicli cresce, il massimo del fattore della risposta di tutte le curve tende asintoticamente alla retta orizzontale di valore:

$$\frac{1}{2\xi}$$

3.4 ACCELEROMETRI E MISURA DEGLI SPOSTAMENTI

Si considerino adesso i principi fondamentali su cui si basa il funzionamento di un gran numero di strumenti per le misure dinamiche. Si tratta principalmente di strumenti sismici, costituiti essenzialmente da un oscillatore smorzato. Il sistema è montato in un contenitore che si fissa sulla superficie di cui si desidera studiare il movimento; la risposta si misura per mezzo del movimento $v(t)$ della massa rispetto al contenitore.

L'equazione del moto del sistema è data da:

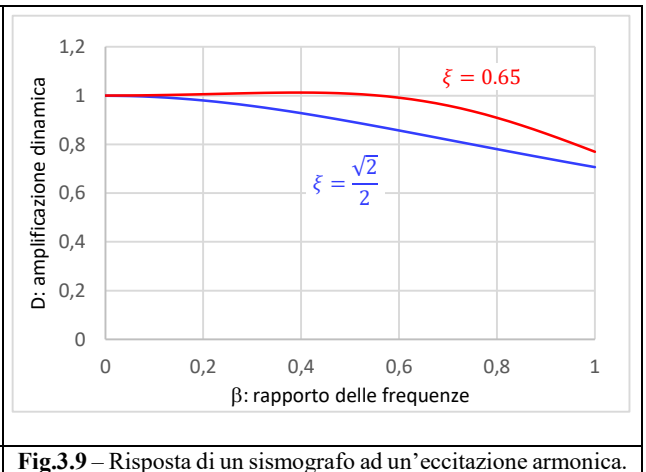
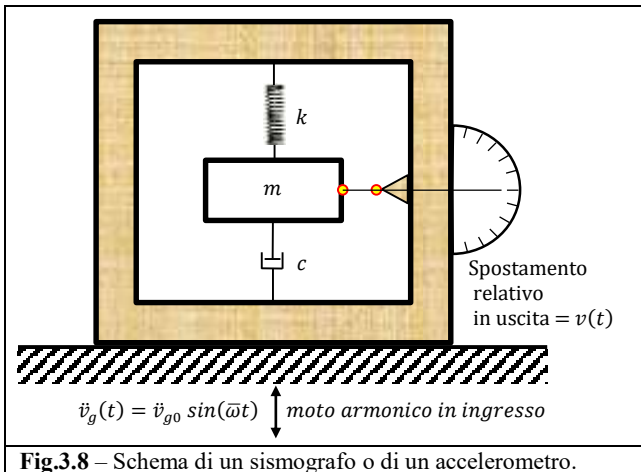
$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = -m\ddot{v}_g(t) \equiv p_{eff}(t) \tag{1.21}$$

Se il supporto sul quale è montato lo strumento si sposta in modo sinusoidale con un'accelerazione la cui ampiezza vale $\ddot{v}_g(t) = \ddot{v}_{g0} \sin(\bar{\omega}t)$, il carico effettivo della massa vale $p_{eff}(t) = -m\ddot{v}_{g0} \sin(\bar{\omega}t)$. La risposta dinamica permanente di questo sistema ha la seguente ampiezza (vedi l'eq.(3.21)):

$$\rho = \frac{p_{eff}}{k} D = \frac{m\ddot{v}_{g0}}{k} D \tag{3.32}$$

dove D è dato dall'eq. (3.24) ed è rappresentato graficamente nella Fig.(3.9).

Su questa figura si può osservare che per un fattore di smorzamento $\xi = 0.65$ il valore di D è pressoché costante per $0 < \beta < 0.6$. Osservando l'eq. (3.32) è quindi chiaro che la risposta indicata dallo strumento sarà direttamente proporzionale all'ampiezza dell'accelerazione esterna per delle frequenze che vanno fino al 60% della frequenza naturale dello strumento. Quindi questo tipo di strumento, se è adeguatamente smorzato, rappresenterà un buon **accelerometro** per delle frequenze relativamente basse; il suo dominio di applicazione potrà essere ampliato aumentando la rigidità della molla.





Si consideri adesso la risposta dello stesso strumento ad uno spostamento armonico:

$$v_g(t) = v_{g0} \sin(\bar{\omega}t).$$

In questo caso l'accelerazione varrà:

$$\ddot{v}_g(t) = -\bar{\omega}^2 v_{g0} \sin(\bar{\omega}t)$$

ed il carico effettivo varrà:

$$p_{eff}(t) = m\bar{\omega}^2 v_{g0} \sin(\bar{\omega}t).$$

L'ampiezza della risposta è allora (vedi l'eq.(3.21)):

$$\rho = \frac{p_{eff}}{k} D = \frac{m\bar{\omega}^2 v_{g0}}{k} D = v_{g0} \beta^2 D \quad (3.33)$$

Il grafico della risposta $\beta^2 D$ è data nella Fig.(3.11). In questo caso è evidente che $\beta^2 D$ è essenzialmente costante per dei rapporti delle frequenze $\beta > 2$ se il fattore di smorzamento è uguale a $\xi = 0.65$. Quindi la risposta di uno strumento adeguatamente smorzato dai movimenti ad alta frequenza è essenzialmente **proporzionale all'ampiezza dello spostamento del supporto**; sarà quindi utile a misurare gli spostamenti durante tali movimenti. In questo caso l'intervallo di utilizzazione dello strumento potrà essere ampliato riducendo la sua frequenza naturale, cioè diminuendo la rigidezza della molla o aumentando la massa.

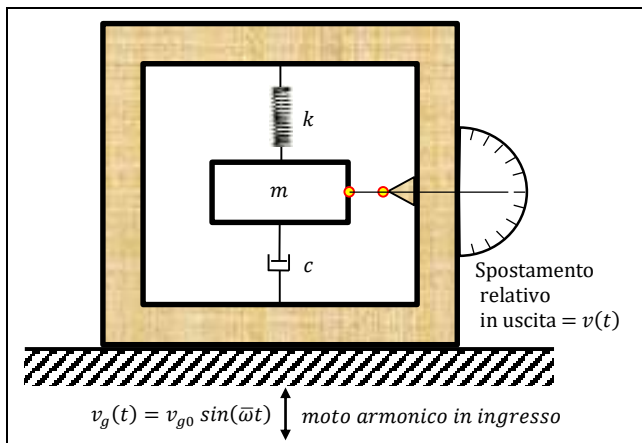


Fig.3.10 – Schema di principio di un sismografo.

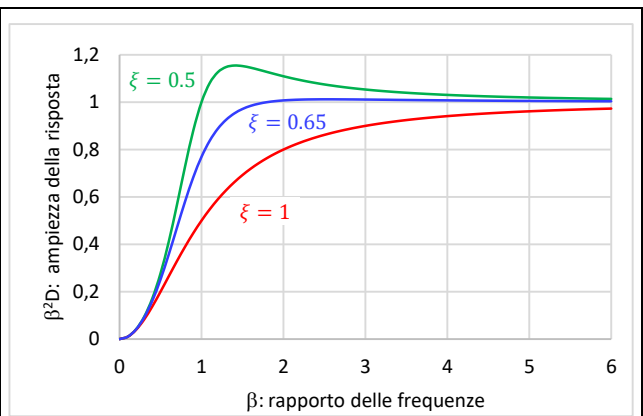


Fig.3.11 – Risposta di un sismografo ad un'eccitazione armonica.

3.4 ISOLAMENTO DALLE VIBRAZIONI

Si possono distinguere due classi di problemi di isolamento dalle vibrazioni:

- 1) una macchina produce delle forze periodiche suscettibili di deteriorare la struttura che la sostiene,
- 2) una struttura in vibrazione sostiene degli strumenti fragili che non devono subire dei danni.

Il primo caso è illustrato nella Fig.3.12. Una macchina rotante produce una forza verticale alternativa $p_0 \sin(\bar{\omega}t)$ causata da un certo squilibrio. Se la macchina è montata su un supporto ad un solo grado di libertà del tipo molla-smorzatore, il suo spostamento in regime permanente è dato da:

$$v(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \vartheta) \quad (3.34)$$

in cui D è definito dall'eq. (3.24). Quindi la forza esercitata sulla base dalla molla vale:

$$f_s = kv(t) = p_0 D \sin(\bar{\omega}t - \vartheta)$$



La velocità del moto rispetto alla base vale:

$$\dot{v}(t) = \frac{p_0}{k} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \vartheta)$$

Ricordando che: $c = c_c \xi = 2m\omega\xi$, l'equazione precedente conduce alla forza di smorzamento:

$$f_D = c\dot{v}(t) = \frac{cp_0D\bar{\omega}}{k} \cos(\bar{\omega}t - \vartheta) = \frac{2\xi\omega p_0D\bar{\omega}}{k/m} \cos(\bar{\omega}t - \vartheta) = 2\xi\beta p_0D \cos(\bar{\omega}t - \vartheta)$$

Poiché questa forza ha un ritardo di fase di 90° rispetto alla forza della molla, l'ampiezza della forza f sull'appoggio varrà:

$$f_{max} = \sqrt{f_{s,max}^2 + f_{D,max}^2} = \sqrt{(p_0D)^2 + (2\xi\beta p_0D)^2} = p_0D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

Il rapporto tra forza massima alla base e l'ampiezza della forza applicata, che chiameremo **TRASMITTANZA** del supporto, vale quindi:

$$TR \equiv \frac{f_{max}}{p_0} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (3.35)$$

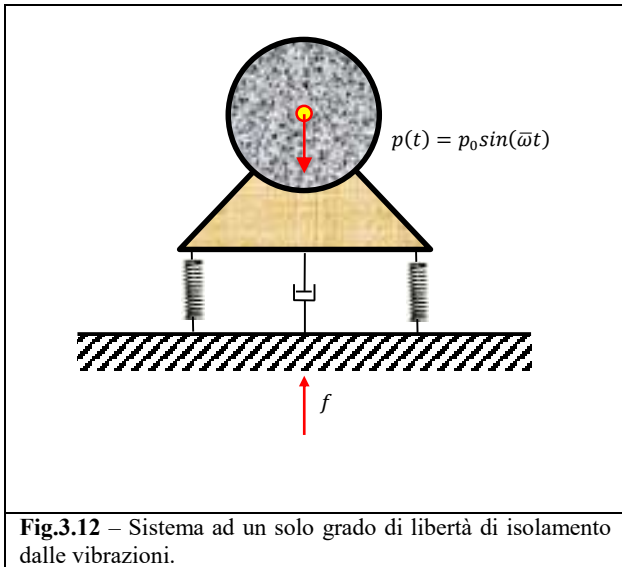


Fig.3.12 – Sistema ad un solo grado di libertà di isolamento dalle vibrazioni.

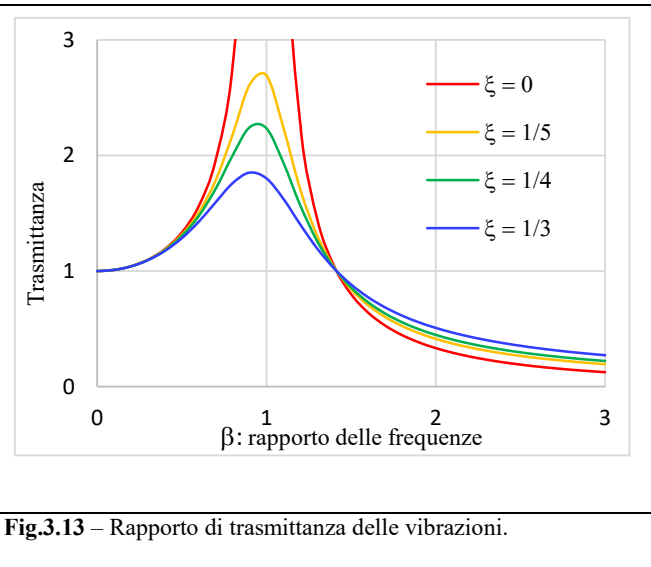


Fig.3.13 – Rapporto di trasmissanza delle vibrazioni.

Nella Fig.3.13 è mostrato il diagramma della trasmissanza in funzione del rapporto delle frequenze e del fattore di smorzamento. E' simile a quello della Fig.(3.2), ma tutte le sue curve passano per uno stesso punto che corrisponde ad un rapporto delle frequenze $\beta = \sqrt{2}$. Questa differenza rispetto alla Fig.(3.2) è dovuta all'influenza della forza di smorzamento. E' dunque evidente che lo smorzamento tende a ridurre l'efficacia di un sistema di isolamento dalle vibrazioni per tutte le frequenze superiori al rapporto critico $\beta = \sqrt{2}$.

Il secondo tipo di problema di isolamento è illustrato nella Fig.3.14. La massa m che si desidera isolare è supportata da un sistema massa-smorzatore su un solaio sottoposto a dei movimenti armonici verticali. Lo spostamento della massa rispetto alla base è allora dato da (vedi l'eq.(3.33)):

$$v(t) = v_{g0} \beta^2 D \sin(\bar{\omega}t - \vartheta) \quad (3.27)$$

Ma sommando vettorialmente il moto della base si può dimostrare che il movimento totale della massa è dato da:

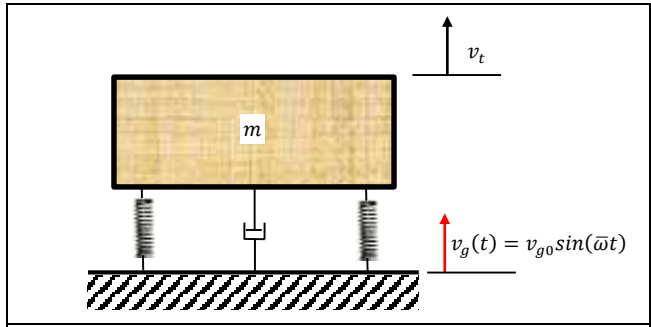


Fig.3.14 – Sistema ad un solo grado di libertà per l'isolamento dalle vibrazioni.



$$v^{tot}(t) = v_{g0} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D \sin(\bar{\omega}t - \bar{\vartheta}) \quad (3.37)$$

dove la differenza di fase $\bar{\vartheta}$ non presenta nessun interesse. Quindi, se in questo caso la trasmittanza è definita come il rapporto dell'ampiezza del movimento della massa sull'ampiezza del movimento della base, si può vedere che la sua espressione è identica a quella dell'eq. (3.35). Ciò si può esprimere nel modo seguente:

$$TR \equiv \frac{v_{max}^{tot}}{v_{g0}} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (3.38)$$

La Fig.3.13 permette di definire l'efficacia dei sistemi di isolamento dalle vibrazioni, per i due tipi di problemi ad un solo grado di libertà che sono stati esaminati.



APPENDICE A

Teorema dell'Hospital

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) eccetto al più in x_0 , con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; sia $\frac{\partial g}{\partial x}$ diversa da 0 per $x \neq x_0$.

Sia inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

ed esista il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}} = L \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = L$$

Il valore esatto del fattore della risposta R è funzione sia del tempo t che dello smorzamento ξ . In questo caso si desidera valutare il suo valore quando ξ tende a zero. Il suo valore si può esprimere come il rapporto di due funzioni di ξ :

$$R(\xi) = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

dove:

$$f(\xi) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right] - \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad g(\xi) = 2\xi$$

Poiché come dimostra l'eq.(3.30):

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} R(\xi) = \frac{0}{0}$$

la regola dell'Hospital consente di calcolare il limite nel modo seguente:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} R(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{d\xi}}{\frac{dg}{d\xi}}$$

Ricordando che:

$$\omega_D = \omega \sqrt{1-\xi^2}$$

si può scrivere:

$$f(\xi) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right] - \cos(\omega t)$$

Poiché:

$$\frac{df}{d\xi} = -\omega t e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right] + e^{-\xi\omega t} \left[\sin(\omega_D t) \frac{1+\xi-\xi^2}{(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\xi^2 \omega t}{1-\xi^2} \cos(\omega_D t) + \frac{\xi \omega t}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) \right]$$

Riordinando:



$$\frac{df}{d\xi} = e^{-\xi\omega t} \left[-\frac{\xi\omega t}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \frac{\xi\omega t}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \frac{1+\xi-\xi^2}{(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) - \frac{\xi^2\omega t}{1-\xi^2} \cos(\omega_D t) - \omega t \cos(\omega_D t) \right]$$

Sommando e semplificando:

$$\frac{df}{d\xi} = e^{-\xi\omega t} \left\{ \frac{1+\xi-\xi^2}{(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) - \left[\frac{1}{1-\xi^2} \right] \omega t \cos(\omega_D t) \right\}$$

La derivata della funzione g vale:

$$\frac{dg}{d\xi} = 2$$

da cui risulta:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} R(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{d\xi}}{\frac{dg}{d\xi}} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{e^{-\xi\omega t}}{2} \left\{ \frac{1+\xi-\xi^2}{(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) - \left[\frac{1}{1-\xi^2} \right] \omega t \cos(\omega_D t) \right\}$$

da cui:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} R(\xi) = \frac{1}{2} \{ \sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) \}$$