



CAP.2 - OSCILLAZIONI LIBERE DEI SISTEMI AD UN SOLO GDL

2.1 SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

L'equazione del moto di un qualsiasi sistema ad un solo grado di libertà può ridursi alla forma:

$$m \ddot{Z}(t) + c \dot{Z}(t) + k Z(t) = p^*(t)$$

Questa equazione è equivalente a quella del moto smorzato di un semplice sistema massa-molla, che può scriversi nel modo seguente:

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p(t) \quad (2.1)$$

Utilizzare l'eq.(2.1) e visualizzare la risposta del sistema è molto semplice; si può d'altra parte ricordare che i risultati ottenuti si potranno applicare anche alla risposta in coordinate generalizzate di ogni sistema complesso assimilabile ad un sistema ad un solo grado di libertà.

La soluzione dell'eq.(2.1) si otterrà considerando per prima cosa l'equazione omogenea che si ottiene annullando il secondo membro:

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = 0 \quad (2.2)$$

I movimenti del sistema in assenza del carico si chiamano oscillazioni libere e verranno analizzate per prime. La soluzione dell'eq.(2.2) assume la forma seguente:

$$v(t) = G \cdot e^{st} \quad (2.3)$$

Le sue derivate rispetto al tempo sono:

$$\dot{v}(t) = Gs \cdot e^{st} \quad \ddot{v}(t) = Gs^2 \cdot e^{st}$$

Sostituendo queste espressioni nell'eq.(2.2) si ottiene:

$$(ms^2 + cs + k)G e^{st} = 0 \quad (2.4)$$

Semplificando per $G e^{st}$, dividendo per m e ponendo:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.5)$$

l'eq.(2.4) diventa:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (2.6)$$

Le soluzioni dell'equazione dipendono dal valore dello smorzamento c : il tipo di movimento rappresentato dall'eq.(2.3) dipende quindi dallo smorzamento presente nel sistema.

2.2 OSCILLAZIONI LIBERE NON SMORZATE

Se il sistema non è smorzato, cioè se $c = 0$, usando l'eq.(2.6) risulta che la variabile s assume i seguenti valori:

$$s = \pm i\omega \quad (2.7)$$

La soluzione fornita dall'eq. (2.3) è quindi:

$$v(t) = G_1 \cdot e^{i\omega t} + G_2 \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.8)$$

I due termini di questa equazione corrispondono ai due valori di s e le costanti G_1 e G_2 rappresentano le ampiezze (ancora indeterminate) del moto. Usando l'**equazione di Eulero**:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \cdot \sin(\omega t) \quad (2.9)$$

l'eq.(2.8) si può esprimere in forma più comoda:

$$v(t) = G_1 \cdot e^{i\omega t} + G_2 \cdot e^{-i\omega t} = G_1 \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)] + G_2 \cdot [\cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t)]$$



Raggruppando i termini in seno e coseno si ottiene:

$$v(t) = i \cdot (G_1 - G_2)\sin(\omega t) + (G_1 + G_2)\cos(\omega t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (2.10)$$

Come è evidente si ottiene:

$$A = i \cdot (G_1 - G_2) \qquad B = (G_1 + G_2)$$

Le costanti A e B si possono esprimere in funzione delle **condizioni iniziali**, cioè dello spostamento $v(0)$ e della velocità $\dot{v}(0)$ al tempo iniziale $t = 0$, nel momento in cui iniziano le oscillazioni libere del sistema. Poiché la velocità del moto è la seguente:

$$\dot{v}(t) = A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t)$$

ponendo $t = 0$ si ottiene:

$$B = v(0) \qquad \dot{v}(0) = A\omega \qquad \text{da cui} \qquad A = \frac{\dot{v}(0)}{\omega}$$

L'equazione del moto diventa quindi:

$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + v(0)\cos(\omega t) \quad (2.11)$$

Questa soluzione corrisponde ad un **moto armonico semplice**. La grandezza ω è la frequenza circolare o velocità angolare (oppure pulsazione) del movimento e la si misura in radianti per secondo. La frequenza ciclica f del moto, chiamata in generale più semplicemente frequenza, vale:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ [Hz]} \quad (2.12)$$

Il suo inverso è il periodo T :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.13)$$

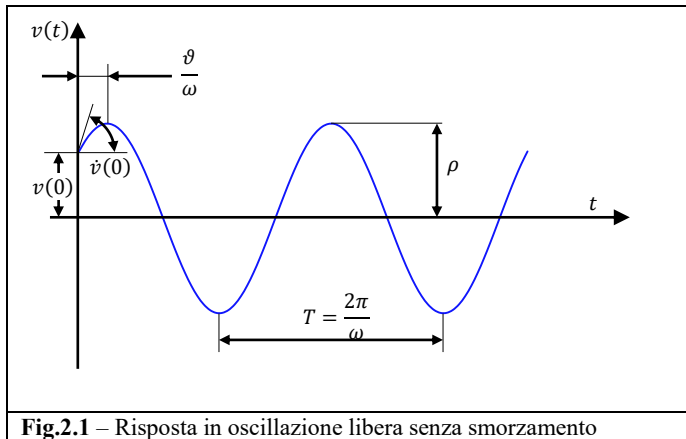


Fig.2.1 – Risposta in oscillazione libera senza smorzamento

Il moto rappresentato dall'eq.(2.11) si può esprimere anche in un'altra forma, talvolta molto utile. Ricordando che:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Posto

$$\alpha = \omega t \qquad \beta = \vartheta \qquad A = \rho \cdot \sin(\vartheta) \qquad B = \rho \cdot \cos(\vartheta)$$

si può scrivere:

$$v(t) = B\cos(\omega t) + A\sin(\omega t) = \rho \cdot \cos(\vartheta)\cos(\omega t) + \rho \cdot \sin(\vartheta)\sin(\omega t)$$

da cui:

$$v(t) = \rho \cdot \cos(\omega t - \vartheta) \quad (2.14)$$

Si può inoltre osservare che:

$$A^2 + B^2 = \rho^2 \cdot \sin^2(\vartheta) + \rho^2 \cdot \cos^2(\vartheta) = \rho^2 \qquad \text{e che} \qquad \frac{A}{B} = \frac{\rho \cdot \sin(\vartheta)}{\rho \cdot \cos(\vartheta)} = \tan(\vartheta)$$



E' possibile visualizzare l'eq.(2.14) con l'aiuto della rappresentazione vettoriale complessa (o **diagramma di Argand**) della Fig.(2.2). La soluzione è data dalla parte reale dei due vettori rotanti, cioè dalla loro proiezione sull'asse orizzontale.

Ricordando che $A = \frac{\dot{v}(0)}{\omega}$ e $B = v(0)$, l'ampiezza del moto vale:

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left[\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\right]^2 + [v(0)]^2} \quad (2.15)$$

ed il ritardo di fase:

$$\vartheta = \arctan \left[\frac{A}{B} \right] = \arctan \left[\frac{v(0)\omega}{\dot{v}(0)} \right] \quad (2.16)$$

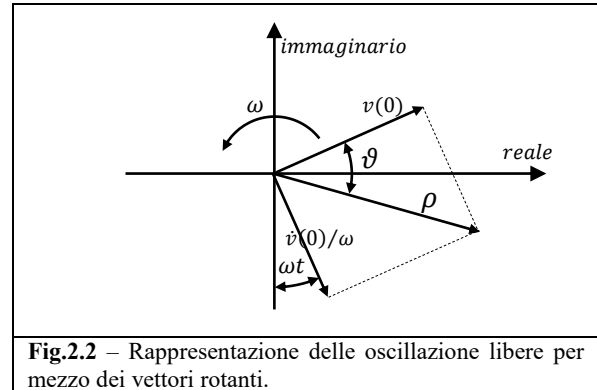


Fig.2.2 – Rappresentazione delle oscillazione libere per mezzo dei vettori rotanti.

Osservando il diagramma di Argand si vede che l'ampiezza è data dalla risultante dei vettori rotanti. Si può inoltre notare che il ritardo di fase ϑ è una distanza angolare che rappresenta il ritardo del moto della risultante rispetto al termine cosinusoidale della risposta.

2.3 OSCILLAZIONI LIBERE SMORZATE

In presenza di smorzamento, la soluzione dell'eq. (2.6), che definisce la risposta del sistema, è:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.17)$$

Questa espressione può rappresentare tre tipi di moto, a seconda che la quantità sotto la radice quadrata sia positiva, negativa oppure nulla. E' utile studiare per primo il caso in cui questa quantità si annulli, il che corrisponde allo smorzamento critico.

Smorzamento critico

Se la quantità sotto la radice quadrata dell'eq.(2.17) è uguale a zero, è evidente che: $\omega = \frac{c}{2m}$. Quindi il valore della costante dello smorzamento critico è:

$$c_c = 2m\omega \quad (2.18)$$

Il valore di s nell'eq. (2.17) diventa quindi:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} = -\omega \quad (2.19)$$

e la risposta fornita dall'eq.(2.3) diventa:

$$v(t) = (G_1 + G_2 t) \cdot e^{-\omega t} \quad (2.20)$$

in cui il secondo termine è moltiplicato per il tempo t perché durante la soluzione si è trovato un unico valore di s . Se nell'eq.(2.20) si introducono le condizioni iniziali, si ottiene la forma finale della risposta nel caso di smorzamento critico:

$$v(t = 0) = G_1 \qquad \dot{v}(t = 0) = G_2 - G_1 \omega = G_2 - v(0)\omega$$

da cui:

$$G_2 = \dot{v}(0) + v(0)\omega$$

da cui:

$$v(t) = \{v(0) + [\dot{v}(0) + v(0)\omega]t\} \cdot e^{-\omega t} = [v(0)(1 + \omega t) + \dot{v}(0)t] \cdot e^{-\omega t} \quad (2.21)$$

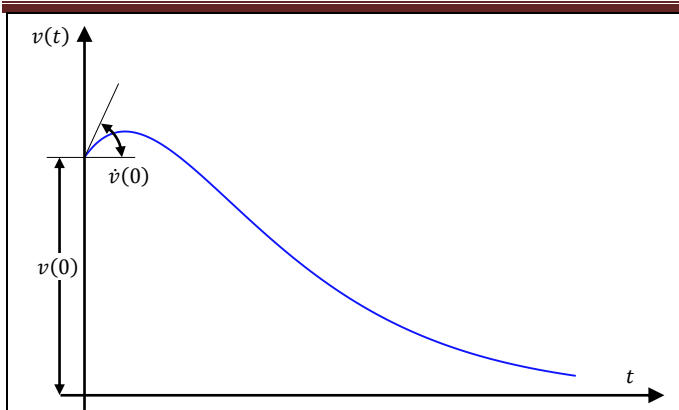


Fig.2.3 – Risposta in oscillazione libera in presenza di smorzamento critico.

La soluzione è rappresentata nella Fig. 2.3. Si noterà che nel caso di **smorzamento critico** la risposta di un sistema in oscillazione libera non comporta alcuna oscillazione intorno alla posizione di spostamento nullo; per contro il sistema torna nella posizione di partenza in funzione del termine di decremento esponenziale dell'eq.(2.21). Una definizione utile della condizione di smorzamento critico è la seguente:

è il valore di smorzamento per il quale nessuna oscillazione libera passa attraverso la configurazione del sistema a riposo.

Sistemi sotto-smorzati

Se lo smorzamento è inferiore allo smorzamento critico, è evidente, osservando l'eq. (2.18), che $c < 2m\omega$ ed il coefficiente sotto la radice quadrata dell'eq.(2.17) è dunque negativo. In questo caso per calcolare la risposta in oscillazione libera, è comodo esprimere lo smorzamento del sistema in funzione dello smorzamento critico c_c per mezzo del rapporto ξ definito nel seguente modo:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \tag{2.22}$$

Questo rapporto è spesso indicato con il nome coefficiente di smorzamento oppure fattore di smorzamento. Utilizzandolo nell'eq. (2.17) si ottiene:

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} \tag{2.23}$$

Cambiando il segno sotto la radice si ottiene:

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \tag{2.24}$$

dove

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \tag{2.25}$$

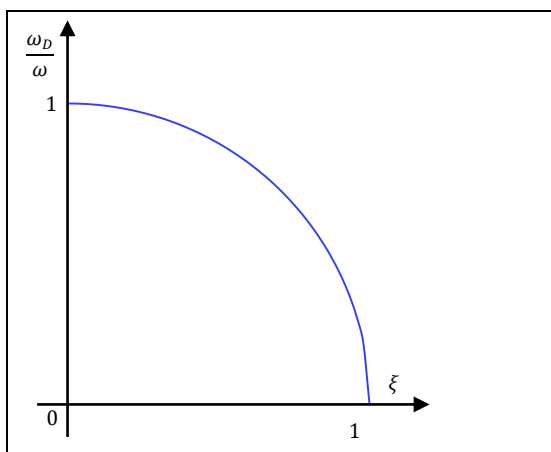


Fig.2.4 – Relazione tra la pseudo frequenza e il fattore di smorzamento.

grandezza ω_D è la pseudo-frequenza angolare in oscillazione smorzata: per i fattori di smorzamento che si incontrano più frequentemente nelle strutture ($\xi < 20\%$), ω_D differisce molto poco rispetto alla velocità angolare ω in oscillazione non smorzata, come si può osservare analizzando l'eq. (2.25). Per stimare l'influenza dello smorzamento sulla velocità angolare, è utile ricordare che la curva che rappresenta le variazioni del rapporto ω_D/ω (cioè la velocità angolare smorzata sulla velocità angolare non smorzata) in funzione del fattore di smorzamento ξ è una circonferenza di raggio unitario.

La risposta di un sistema sotto-smorzato in oscillazione libera può essere calcolata sostituendo l'eq.(2.23) nell'eq.(2.3):

$$v(t) = G_1 e^{s_1 t} + G_2 e^{s_2 t} = G_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t})$$



Il termine tra parentesi rappresenta una oscillazione armonica semplice: di conseguenza l'equazione precedente si può scrivere nella seguente forma:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] \quad (2.25)$$

Poiché la velocità vale:

$$\dot{v}(t) = -\xi\omega e^{-\xi\omega t} [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] + e^{-\xi\omega t} \omega_D [A \cos(\omega_D t) - B \sin(\omega_D t)]$$

introducendo le condizioni iniziali $v(0)$ e $\dot{v}(0)$, è possibile calcolare le costanti dell'eq.(2.25):

$$\text{Quando } t = 0 \quad \begin{cases} v(t=0) = B = v(0) \\ \dot{v}(t=0) = -\xi\omega B + \omega_D A \end{cases} \quad \text{da cui} \quad A = \frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D}$$

Risulta quindi:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + v(0) \cos(\omega_D t) \right] \quad (2.26)$$

Questa risposta può anche scriversi sotto la forma seguente:

$$v(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cdot \cos(\omega_D t - \vartheta) \quad (2.27)$$

dove, ricordando le eq. (2.14) e (2.15), si ottiene:

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left[\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D} \right]^2 + [v(0)]^2} \quad (2.28)$$

$$\vartheta = \arctan \left[\frac{A}{B} \right] = \arctan \left[\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D v(0)} \right]$$

La Fig.2.5 rappresenta la risposta di un sistema sotto-smorzato quando lo spostamento iniziale $v(0)$ è diverso da zero, ma la velocità iniziale $\dot{v}(0)$ è nulla: si può ottenere questa situazione lasciando andare una massa a partire da una posizione diversa da quella di riposo.

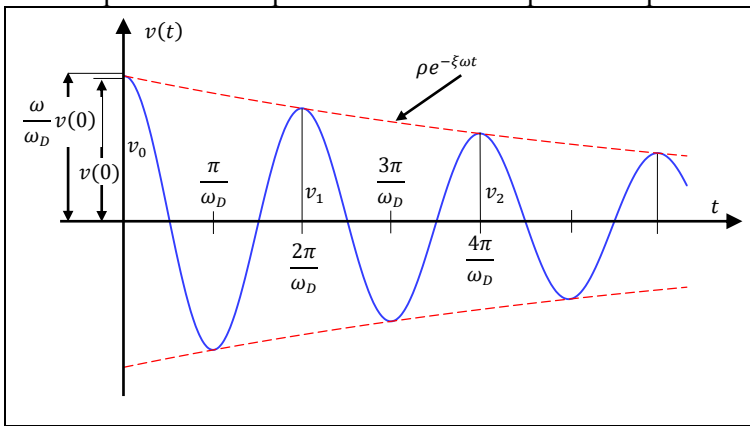


Fig.2.5 – Risposta in oscillazione libera di un sistema sottosmorzato.

Si può notare che il sistema sotto-smorzato oscilla intorno alla posizione neutra, alla pseudo-frequenza circolare costante ω_D .

La rappresentazione con i vettori rotanti è equivalente a quella della Fig.2.1, con la sola differenza che il **modulo del vettore** **decrece** in modo esponenziale man mano che la risposta si smorza.

Le caratteristiche reali di smorzamento delle strutture sono molto complesse e delicate da determinare.

D'altra parte normalmente lo smorzamento di questi sistemi si esprime per mezzo dei fattori di smorzamento

viscoso equivalente ξ che presentano delle caratteristiche di decremento confrontabili nei casi di oscillazioni libere. In questa fase è quindi conveniente studiare più in dettaglio l'influenza del fattore di smorzamento viscoso ξ sulla risposta in oscillazione libera. Si considerino due picchi successivi della risposta rappresentata nella fig.(2.3), cioè v_n e v_{n+1} . Ricordando che il periodo vale $T = \frac{2\pi}{\omega_D}$, è possibile calcolare il rapporto delle ampiezze di questi due massimi:

$$\frac{v(t+T)}{v(t)} = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\rho e^{-\xi\omega(t+T)}}{\rho e^{-\xi\omega t}} = e^{-\xi\omega T} = \exp\left(-2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}\right) \quad (2.29)$$

Calcolando il logaritmo in base e dell'inverso della precedente equazione si ottiene il decremento logaritmico:



$$\delta = \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2.30)$$

Ricordando l'eq.(2.24) si ottiene:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.31)$$

Quando lo smorzamento è debole, quest'ultima equazione si può approssimare nel modo seguente:

$$\delta \cong 2\pi\xi \quad (2.32)$$

E' possibile allora sviluppare l'inversa dell'eq.(2.31) in serie di Taylor:

$$f(\Delta x) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^{(i)}f(0)}{dx^{(i)}} (\Delta x)^i.$$

Ponendo $f(\Delta x) = \exp(2\pi\xi)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{v_{n+1}} = \exp\left(2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}\right) &\cong \exp(2\pi\xi) = \exp(0) + 2\pi \cdot \exp(0)\xi + \frac{(2\pi)^2}{2!}\xi^2 + \dots = \\ &= 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi)^2}{2!}\xi^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

Quando il fattore di smorzamento ξ assume valori piccoli, è sufficiente la precisione che si ottiene conservando solo i primi due termini della serie, da cui:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \cong 1 + 2\pi\xi \quad \text{da cui risulta:} \quad \xi = \frac{v_n - v_{n+1}}{2\pi v_{n+1}} \quad (2.34)$$

Per mostrare il grado di precisione di questa formula, nella fig.2.6 si è riportato il rapporto del valore esatto di ξ fornito dall'eq.(2.30) sul valore approssimato calcolato con l'eq. (2.34), in funzione dei valori approssimati di ξ . Questo grafico consente di correggere i fattori di smorzamento ottenuti per mezzo del metodo approssimato.

Per i sistemi poco smorzati, si può ottenere una precisione migliore utilizzando dei picchi separati da numerosi cicli, per esempio m cicli. In questo caso si ottiene:

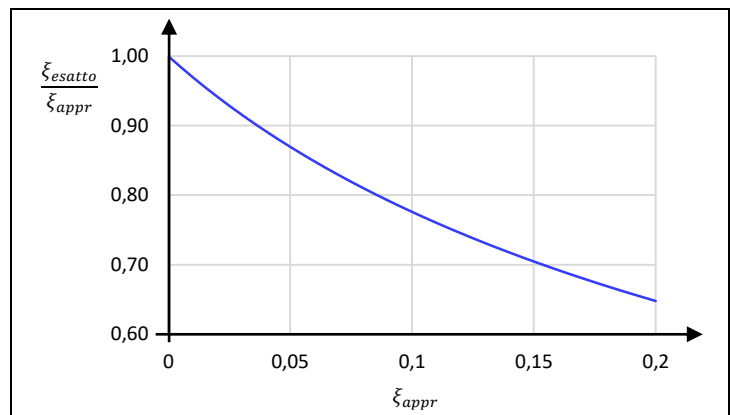


Fig.2.6 – Fattore di correzione

$$\frac{v(t + mT)}{v(t)} = \frac{v_{n+m}}{v_n} = \frac{\rho e^{-\xi\omega(t+mT)}}{\rho e^{-\xi\omega t}} = e^{-m\xi\omega T} = \exp\left(-2m\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}\right)$$

da cui:

$$\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+m}}\right) = 2m\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2.35)$$

E nel caso di smorzamenti molto deboli, quest'ultima equazione conduce alla seguente formula approssimata:

$$\xi = \frac{v_n - v_{n+m}}{2m\pi \cdot v_{n+m}} \quad (2.36)$$



Quando si osservano sperimentalmente delle vibrazioni libere ammortizzate, un metodo pratico per stimare il fattore di smorzamento consiste nel contare il numero di cicli necessari per ottenere il dimezzamento dell'ampiezza. La relazione da utilizzare in questo caso è rappresentata graficamente nella fig.2.7. Una comoda regola approssimata consiste nel ricordarsi che per un rapporto di smorzamento del 10%, l'ampiezza si dimezza in un ciclo.

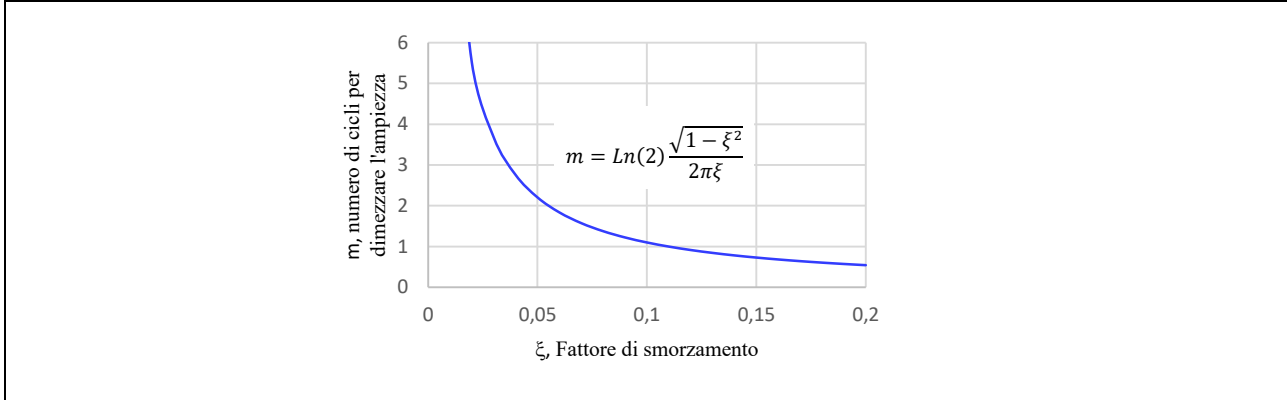


Fig.2.7 – Numero di cicli m necessari per dimezzare l'ampiezza in funzione del fattore di smorzamento.

ESEMPIO E2.1 – Il telaio di un edificio ad un piano è modellato per mezzo di una trave rigida sostenuta da due colonne prive di massa (Fig.E2.1).

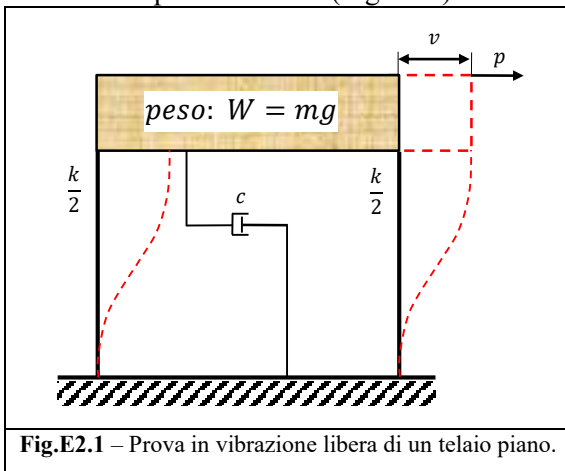


Fig.E2.1 – Prova in vibrazione libera di un telaio piano.

Per determinare le caratteristiche dinamiche della struttura si esegue una prova in vibrazione libera che consiste nel liberare improvvisamente la trave rigida dopo averla spostata trasversalmente per mezzo di un martinetto idraulico. Durante l'azione di spinta esercitata dal martinetto, si osserva che per spostare la trave di 5 mm è necessaria una forza pari a 90 kN. Dopo avere istantaneamente annullato la forza applicata dal martinetto, lo spostamento massimo dopo un ciclo si è ridotto a 4 mm; si registra inoltre che il tempo necessario per il completamento di un ciclo (il periodo) vale $T = 1.40$ s. Si chiede di valutare le seguenti caratteristiche dinamiche:

1. Massa effettiva della trave:

$$k = \frac{p}{v} = \frac{90 \times 10^3}{5 \times 10^{-3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 1.40 \text{ s}$$

da cui risulta:

$$m = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{p}{v}\right) = \left(\frac{1.40}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{90 \times 10^3}{5 \times 10^{-3}}\right) = 893652 \text{ [kg]} \cong 894 \text{ [t]}$$

2. Frequenza della vibrazione

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.40} = 0.714 \text{ [Hz]}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4.488 \text{ [rad/s]}$$

3. Caratteristiche di smorzamento:

Decremento logaritmico: $\delta = \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right) = 0.223$



Fattore di smorzamento: $\xi \cong \frac{\delta}{2\pi} = 0.0355 = 3.55 \%$

Costante di smorzamento: $c = \xi c_c = \xi 2m\omega = 0.0355 \times 2 \times 893 \times 10^5 \times 4.488 =$
 $= 284.9 [N \cdot s/m] \text{ oppure } [kg/s]$

Pseudo frequenza: $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = \omega \times \sqrt{0.9987} \cong \omega$

Ampiezza dopo sei cicli: $v_6 = v_0 \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^6 = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^6 = 1.311 [mm]$