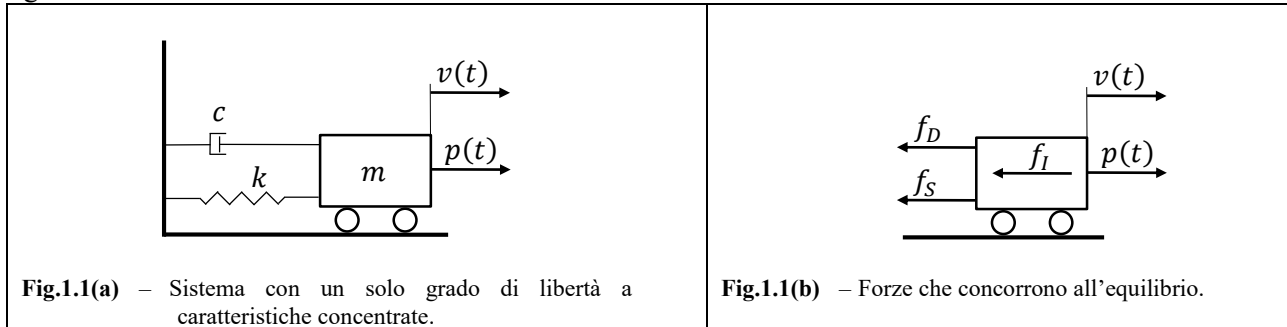




CAP.1 - FORMULAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

1.1 COMPONENTI DEL MODELLO DINAMICO ELEMENTARE

Le caratteristiche fisiche essenziali di ogni struttura elastica lineare sottoposta a carichi di natura dinamica sono la massa, le proprietà elastiche (flessibilità o rigidità), il meccanismo di perdita dell'energia o smorzamento e la sorgente dell'eccitazione esterna, cioè il carico. Nel modello più semplice di sistema ad un solo grado di libertà, ognuna di queste caratteristiche è immaginata condensata in un unico elemento fisico: la fig.1.1 mostra uno schema di tale sistema.



Tutta la massa m del modello è localizzata nel blocco rigido; un carrello su ruote vincola il suo spostamento in modo che possa esprimersi solo secondo una traslazione semplice: la sua posizione è quindi determinata unicamente dallo spostamento v . La resistenza elastica allo spostamento è rappresentata da una molla priva di massa di rigidità k e il meccanismo di perdita di energia dallo smorzatore c . Il carico esterno che provoca la risposta dinamica del sistema è la forza $p(t)$ variabile nel tempo.

1.2 DETERMINAZIONE DIRETTA DELL'EQUAZIONE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO

In questo caso elementare il metodo più semplice per scrivere l'equazione del moto del sistema rappresentato nella Fig.1.1(a) consiste nell'esprimere direttamente l'equilibrio di tutte le forze che agiscono sulla massa. Come indicato nella Fig.1.1(b), le forze che agiscono secondo la direzione dell'unico grado di libertà (lo spostamento v) sono il carico applicato $p(t)$ e tre forze provocate dal movimento: la forza d'inerzia f_I , la forza di smorzamento f_D e la forza di richiamo elastico della molla f_S . L'equazione del moto esprime semplicemente l'equilibrio di queste forze e si scrive nel modo seguente:

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (1.1)$$

Ognuna delle forze che compare al primo membro di questa equazione è funzione dello spostamento v e/o delle sue derivate fatte rispetto al tempo; il senso positivo è stato espressamente scelto in modo da corrispondere al senso degli spostamenti negativi in quanto le tre forze si oppongono ai carichi positivi applicati sulla massa. Per iniziare si consideri la forza di richiamo elastico data dal prodotto della rigidità della molla per lo spostamento:

$$f_S = kv \quad (1.2)$$

In modo analogo, la forza d'inerzia è pari al prodotto della massa per l'accelerazione:

$$f_I = m\ddot{v} \quad (1.3)$$

Infine, supponendo un meccanismo di smorzamento di tipo viscoso, la forza di smorzamento è pari al prodotto della costante di smorzamento c per la velocità:

$$f_D = c\dot{v} \quad (1.4)$$

Se le tre equazioni precedenti si sostituiscono nell'eq.(1.1), si ottiene l'equazione del moto del sistema ad un solo grado di libertà a caratteristiche concentrate:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t) \quad (1.5)$$



1.3 APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Lo stesso risultato si può ottenere applicando il Principio dei Lavori Virtuali. Le forze che agiscono sulla massa sono state messe in evidenza nella Fig.1.1b. Se alla massa in equilibrio si applica uno spostamento virtuale δv compatibile con i vincoli e indipendente dalle forze applicate, le forze forniscono un lavoro la cui somma vale:

$$-f_I \delta v - f_D \delta v - f_S \delta v + p(t) \delta v = 0 \quad (1.6)$$

dove il segno negativo si spiega con il fatto che le forze agiscono in senso opposto a quello dello spostamento virtuale. Sostituendo le eq.(1.2), (1.3) e (1.4) nell'equazione precedente si ottiene:

$$[-m\ddot{v} - c\dot{v} - kv + p(t)]\delta v = 0 \quad (1.7)$$

Poiché l'eq.(1.7) deve essere valida per qualsiasi spostamento virtuale δv compatibile con i vincoli, si può osservare che assume la stessa forma dell'eq.(1.5)

1.4 APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DI HAMILTON.

Un metodo che consente di evitare le equazioni vettoriali dell'equilibrio consiste nell'utilizzare le grandezze energetiche scalari sotto forma variazionale. Il principio variazionale che è possibile applicare più spesso è quello di Hamilton che si può esprimere nel modo seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1.8)$$

- in cui:
- T è l'energia cinetica totale del sistema;
 - Π è l'energia potenziale del sistema, che comprende sia l'energia di deformazione che il potenziale di tutte le forze conservative esterne;
 - W_{nc} è il lavoro effettuato dalle forze non conservative che agiscono sul sistema, cioè lo smorzamento e tutti gli altri carichi esterni arbitrari;
 - δ è la variazione subita durante l'intervallo di tempo considerato.

Il Principio di Hamilton esprime il fatto che la somma della variazione dell'energia cinetica e potenziale e della variazione del lavoro effettuato dalle forze non conservative, presa durante un intervallo di tempo qualunque t_1 e t_2 , è identicamente nulla. L'applicazione di questo principio porta direttamente alle equazioni del moto di un qualsiasi sistema. La procedura differisce dal Metodo dei Lavori Virtuali nel senso che le forze d'inerzia e di richiamo elastico non intervengono in modo esplicito; sono invece utilizzate le variazioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. *Questa formulazione presenta dunque il vantaggio di fare intervenire solo delle grandezze energetiche puramente scalari, mentre le forze e gli spostamenti che si utilizzano nel metodo dei lavori virtuali per rappresentare gli effetti corrispondenti sono tutti di carattere vettoriale benché i lavori siano delle grandezze scalari.*

Naturalmente il principio di Hamilton si può applicare anche ai problemi statici. In questo caso l'energia cinetica T è nulla e ciò che rimane negli integrali dell'eq.(1.9) non varia con il tempo; l'equazione si riduce quindi alla seguente:

$$\delta(\Pi - W_{nc}) = 0 \quad (1.9)$$

che è il ben noto *Principio del Minimo dell'Energia Potenziale Totale*.

1.5 INFLUENZA DELLE FORZE PESO

Si consideri il sistema rappresentato in fig.(1.2a), che corrisponde a quello della fig.(1.a) dopo una rotazione di 90° . In questa situazione le forze di gravità agiscono nella direzione dello spostamento. Il sistema di forze applicato sulla massa è schematizzato nella Fig.(1.2b): in tal caso l'equazione del moto (1.5) assume la forma:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t) + W \quad (1.10)$$



dove W rappresenta il peso del blocco rigido.

Se si esprime lo spostamento totale v come somma dello spostamento statico Δ_{st} causato dal peso proprio W e dello spostamento dinamico \bar{v} causato dalla forza $p(t)$ funzione del tempo (si osservi la fig.1.2c):

$$v = \Delta_{st} + \bar{v} \quad (1.11)$$

la forza che agisce sulla molla assume la forma:

$$f_s = kv = k(\Delta_{st} + \bar{v}) \quad (1.12)$$

Riportando l'eq.(1.12) nell'eq.(1.10) si ottiene:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + k\Delta_{st} + k\bar{v} = p(t) + W \quad (1.13)$$

e poiché $k\Delta_{st} = W$ si ottiene:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + k\bar{v} = p(t) \quad (1.14)$$

Se si deriva l'eq.(1.11) rispetto al tempo, notando che Δ_{st} è indipendente dal tempo (e quindi $\dot{v} = \dot{\bar{v}}$, $\ddot{v} = \ddot{\bar{v}}$), l'eq.(1.14) assume la forma:

$$m\ddot{\bar{v}} + c\dot{\bar{v}} + k\bar{v} = p(t) \quad (1.15)$$

Si può osservare che se si misura lo spostamento rispetto alla posizione dell'equilibrio statico del sistema, l'equazione del moto non dipende dalle forze peso. Per questo motivo gli spostamenti saranno valutati a partire dalla posizione statica del sistema e rappresenteranno la risposta dinamica: in questo modo le frecce, gli sforzi, etc. totali si otterranno sommando i valori statici a quelli che risulteranno dall'analisi dinamica.

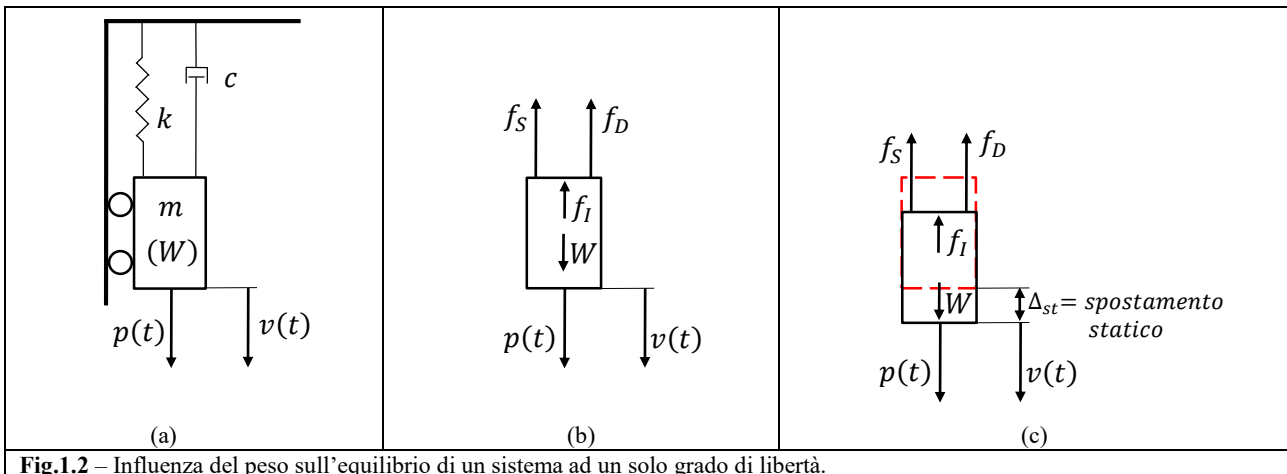


Fig.1.2 – Influenza del peso sull'equilibrio di un sistema ad un solo grado di libertà.

1.6 INFLUENZA DELL'ECCITAZIONE DEGLI APPOGGI

Gli sforzi e gli spostamenti dinamici di una struttura possono essere causati non soltanto da un carico esterno variabile nel tempo, come indicato nelle Fig.(1.1) e (1.2), ma anche dal movimento dei suoi punti di appoggio. Si possono elencare numerosi esempi di questo tipo di sollecitazioni: il movimento trasmesso alle fondazioni di un edificio dalle scosse sismiche, o gli spostamenti trasmessi ad uno strumento dalle vibrazioni dell'edificio in cui è sistemato. La Fig.(1.3) rappresenta un modello molto semplificato del problema causato dalle scosse sismiche: gli spostamenti orizzontali del suolo sono trasmessi alla base della struttura che subisce gli spostamenti v_g misurati rispetto ad un sistema di riferimento fisso.

Si ipotizza che la trave trasversale del telaio sia infinitamente rigida e che in essa si concentri tutta la massa mobile della struttura. Si suppone inoltre che le colonne verticali siano prive di massa e che la loro rigidità assiale sia infinita: la resistenza che le colonne oppongono agli spostamenti orizzontali della trave, è rappresentata, per ogni colonna, da una costante di richiamo elastico pari a $k/2$. Poiché le colonne possono inflettersi restando nel piano della figura, la trave orizzontale possiede un solo grado di libertà v . Lo smorzamento viscoso di costante c oppone allo spostamento della trave una resistenza proporzionale alla velocità dello spostamento.

Come suggerito dalla Fig.(1.3b), l'equilibrio delle forze del sistema assume la forma:



$$f_I + f_D + f_S = 0 \quad (1.16)$$

dove le forze di richiamo elastico e di smorzamento si possono esprimere come nelle eq.(1.2) e (1.4).

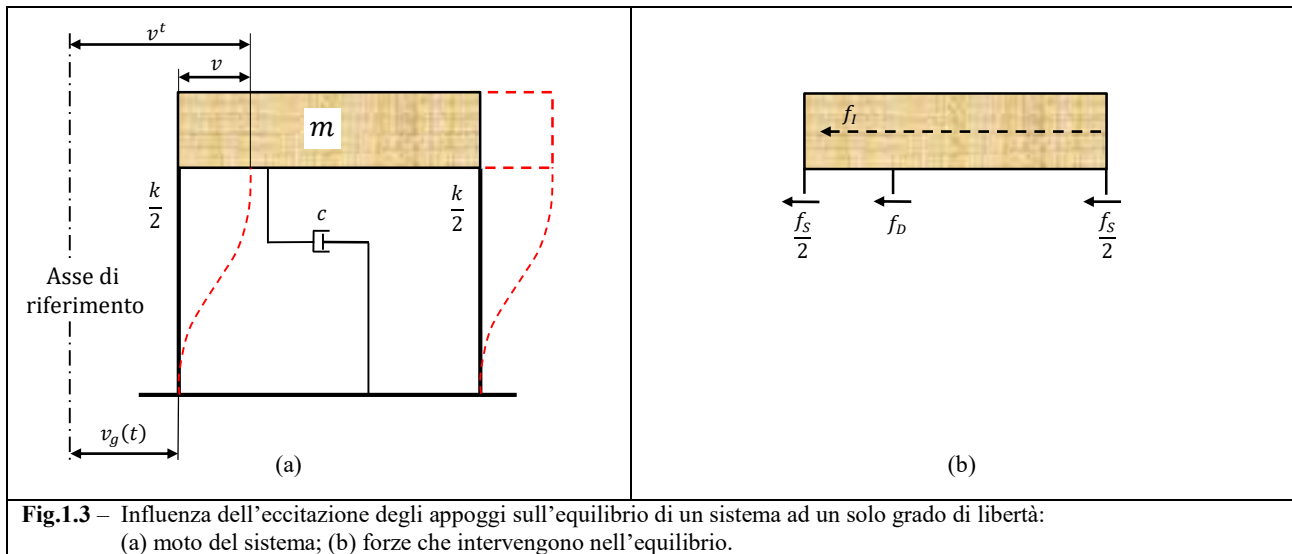


Fig.1.3 – Influenza dell'eccitazione degli appoggi sull'equilibrio di un sistema ad un solo grado di libertà: (a) moto del sistema; (b) forze che intervengono nell'equilibrio.

In questo caso la forza d'inerzia è data da:

$$f_I = m\ddot{v}^t \quad (1.17)$$

dove v^t rappresenta lo spostamento totale della massa rispetto al sistema di riferimento fisso. Sostituendo le espressioni delle forze d'inerzia, di smorzamento e di richiamo elastico nell'eq.(1.16) si ottiene:

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v} + kv = 0 \quad (1.18)$$

Per risolvere questa equazione è prima necessario esprimere tutte le forze in funzione di una sola variabile. Ciò può essere fatto osservando che lo spostamento totale della massa è uguale alla somma dello spostamento del suolo (o meglio degli appoggi della struttura ancorati al suolo) e dello spostamento causato dalle deformazioni delle colonne:

$$v^t = v + v_g \quad (1.19)$$

Se si esprime la forza d'inerzia in funzione delle due componenti dell'accelerazione ottenute derivando l'eq.(1.19), l'eq.(1.18) assume la forma:

$$m(\ddot{v} + \ddot{v}_g) + c\dot{v} + kv = 0 \quad (1.20)$$

Poiché si suppone che l'accelerazione del suolo sia un dato del problema, l'equazione del moto può scriversi nel modo seguente:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = -m\ddot{v}_g(t) \equiv p_{eff}(t) \quad (1.21)$$

In questa equazione $p_{eff}(t)$ rappresenta il carico effettivo causato dall'eccitazione degli appoggi; in altri termini, la struttura risponde all'accelerazione del suolo $\ddot{v}_g(t)$ esattamente come risponderebbe ad un carico esterno $p(t)$ uguale al prodotto della massa della struttura per l'accelerazione del suolo.

1.7 SISTEMI AD UN SOLO GRADO DI LIBERTÀ: INSIEME DI CORPI RIGIDI.

Tutti i casi fin qui considerati sono molto semplici, perché ogni caratteristica fisica presa in considerazione – massa, smorzamento ed elasticità – è stata rappresentata da un'unica componente isolata. Ma lo studio della maggior parte dei sistemi reali richiede l'uso di schemi più complicati, compresi quelli che possono essere descritti con un solo grado di libertà.

Sarà utile distinguere due classi di sistemi generalizzati ad un solo grado di libertà:



- 1) L'assemblaggio di corpi rigidi nei quali le deformazioni elastiche sono strettamente limitate a degli elementi molla localizzati;
- 2) I sistemi che possiedono delle caratteristiche elastiche distribuite per i quali le deformazioni possono essere continue nell'insieme della struttura o in alcune sue parti.

Nei due casi la struttura sarà obbligata a comportarsi come un sistema ad un solo grado di libertà grazie all'ipotesi che la sua deformata possa assumere solo una forma stabilita a priori.

Per la classe di strutture formate da un assemblaggio di corpi rigidi (di cui ci si occuperà in questo paragrafo), è frequente che l'unica forma possibile della loro deformata sia conseguenza della configurazione dell'assemblaggio. Per esempio in un quadrilatero articolato formato da tre aste rigide tra loro vincolate con delle cerniere, tutte le configurazioni deformate si possono esprimere per mezzo di un solo grado di libertà. Per le strutture a caratteristiche elastiche distribuite considerate nel paragrafo 1.8, la scelta della forma deformata rappresenta un'ipotesi semplificatrice: in realtà le caratteristiche elastiche distribuite consentono un'infinita varietà di spostamenti.

Per formulare le equazioni del moto di un insieme di corpi rigidi, le forze elastiche create dai movimenti corrispondenti ad un unico grado di libertà possono esprimersi facilmente in funzione dell'ampiezza dello spostamento, in quanto ogni elemento elastico è una molla discreta sottoposta ad una deformazione data. In modo analogo le forze di smorzamento si possono esprimere in funzione delle velocità relative dei punti di ancoraggio di ogni ammortizzatore. Ma, per contro, la massa dei corpi rigidi non è necessariamente concentrata e le loro accelerazioni produrranno generalmente delle forze d'inerzia distribuite. Il metodo più efficace per lo studio del comportamento dinamico consisterà nel trattare le forze d'inerzia di un corpo rigido come se la massa ed i relativi momenti d'inerzia fossero concentrati nel baricentro. Le risultanti delle forze d'inerzia che si ottengono in questo modo sono del tutto equivalenti alle forze d'inerzia distribuite, purché l'obiettivo dell'analisi sia il comportamento dell'insieme della struttura. E' inoltre utile rappresentare tutti i carichi esterni distribuiti attraverso la loro risultante. Nella fig.1.4 sono state raccolte le formule usate per il calcolo della massa e dei momenti d'inerzia di una trave prismatica e di alcune piastre uniformi.

$A = s l; \quad \bar{m} = \rho A;$ $m = \rho V = (\rho A)L = \bar{m}L$ $I_y = I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm$ $dm = \rho dV = \rho A dx$ $I_0 = \rho A \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \rho A \frac{L^3}{12} = \frac{\bar{m}L^3}{12}$	$m = \rho V = (\rho s)bh = \bar{\gamma}bh; \quad \bar{\gamma} = \rho s;$ $I_0 = I_x + I_y = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dm_x + \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dm_y$ $dm_x = \rho dV = (\rho s) b dy = \bar{\gamma} b dy$ $dm_y = \rho dV = (\rho s) h dx = \bar{\gamma} h dx$ $I_0 = \bar{\gamma} \left(\frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} \right) = \bar{\gamma}bh \left(\frac{h^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right)$ $I_0 = m \left(\frac{h^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right)$	$m = \rho V = (\rho s) \frac{\pi D^2}{4}$ $I_0 = \int_0^{D/2} r^2 dm$ $dm = (\rho s) 2\pi r dr$ $I_0 = (\rho s) \pi \frac{D^4}{32}$ $I_0 = m \frac{D^2}{8}$
<p>Fig.1.4 – Massa e momento d'inerzia di alcuni corpi rigidi. ρ: densità del materiale; s: spessore; A: area trasversale; \bar{m}: massa per unità di lunghezza; $\bar{\gamma}$: massa per unità d'area; m: massa totale; I_0: momento d'inerzia polare.</p>		



ESEMPIO E1.1 – Si scrivano le equazioni dell'equilibrio dinamico della struttura rappresentata nella Fig.1.5

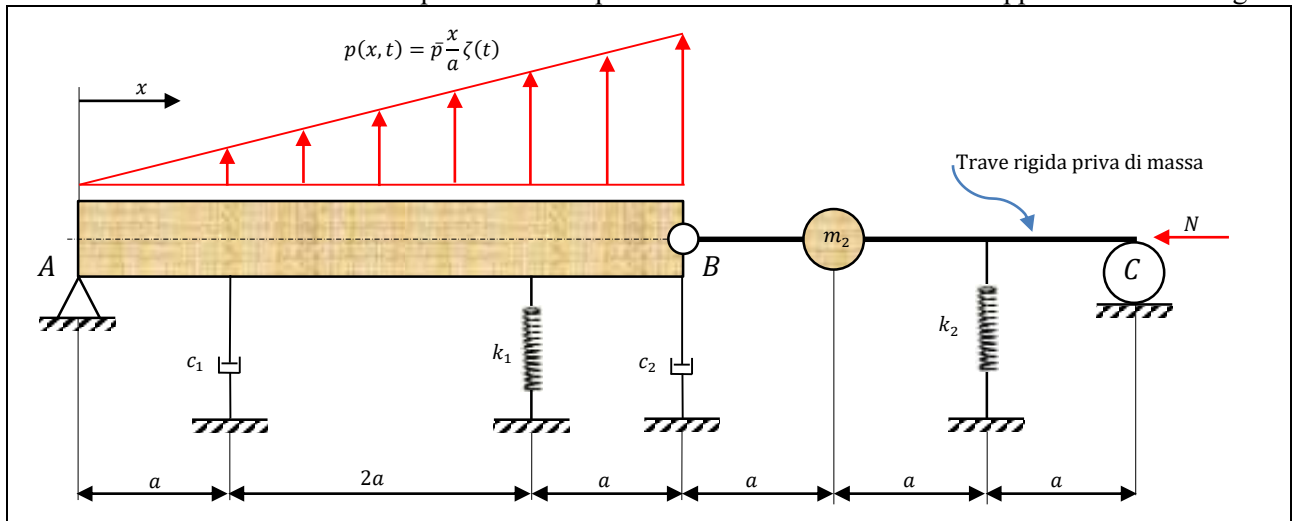


Fig.1.5 – Esempio di sistema ad un solo grado di libertà formato dall'assemblaggio di alcuni corpi rigidi.

Le due travi rappresentate in figura sono vincolate nel punto A con una cerniera a terra e nel punto C con un carrello, mentre nel punto B sono legate tra di loro da una cerniera. Gli spostamenti sono vincolati da due molle e da due smorzatori come indicato in figura. Si ipotizza che la trave AB abbia la massa uniformemente distribuita lungo la sua lunghezza, mentre la trave BC, priva di massa, sostiene una massa concentrata m_2 . La trave AB è sottoposta ad un carico distribuito di forma triangolare variabile nel tempo secondo la funzione $\zeta(t)$, mentre la trave BC è caricata nel punto C da una forza assiale di compressione costante nel tempo pari a N . Poiché si suppone che le due travi siano infinitamente rigide, il sistema possiede un solo grado di libertà e la sua risposta dinamica si può esprimere con una sola equazione che qui verrà formulata per mezzo del principio dei lavori virtuali.

La configurazione deformata verrà espressa in funzione dello spostamento verticale $Z(t)$ del punto B e, di conseguenza, la posizione degli altri punti sarà univocamente determinata (si veda la Fig.1.6).

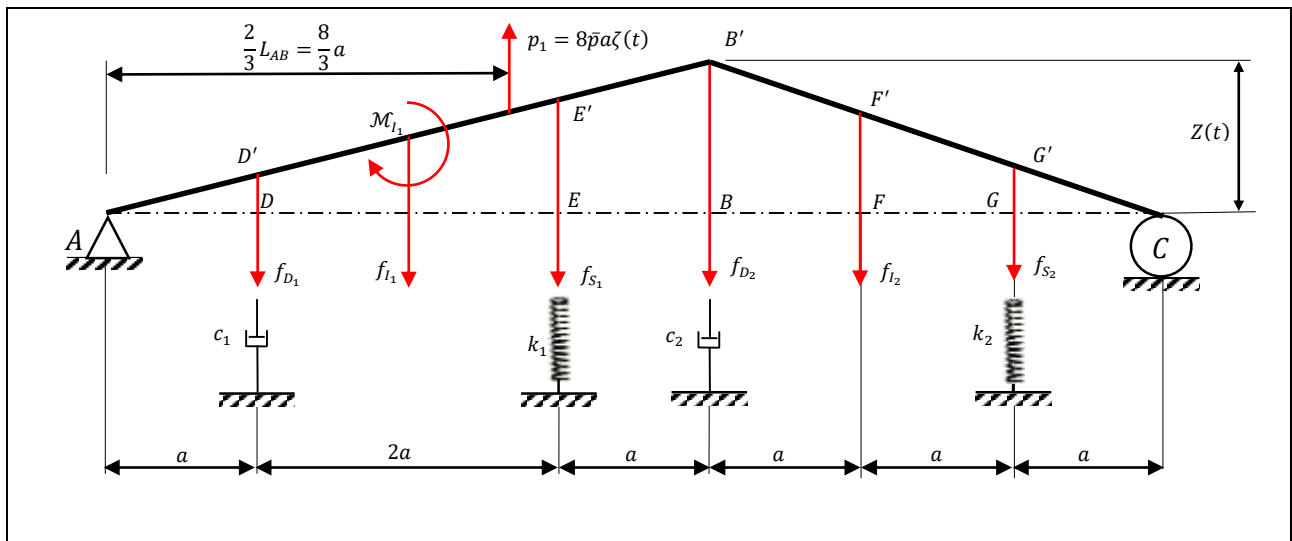


Fig.1.6 – Spostamenti di un sistema ad un solo grado di libertà e forze che ne risultano.

Quindi posto $BB' = Z(t)$, risulta:

$$DD' = \frac{1}{4}Z(t) \quad ; \quad EE' = \frac{3}{4}Z(t) \quad ; \quad FF' = \frac{2}{3}Z(t) \quad ; \quad GG' = \frac{1}{3}Z(t)$$

A parte la forza assiale N su cui si tornerà più tardi, nella fig.1.6 sono rappresentate anche le forze che agiscono sul sistema. Ogni forza che si oppone allo spostamento può esprimersi in funzione di $Z(t)$ o delle sue derivate temporali:



$$\begin{aligned}
f_{S_1} &= k_1 v_E = k_1 (EE') = k_1 \frac{3}{4} Z(t) \\
f_{S_2} &= k_2 v_G = k_2 (GG') = k_2 \frac{1}{3} Z(t) \\
f_{D_1} &= c_1 \dot{v}_D = c_1 \left(\frac{d}{dt} DD' \right) = c_1 \frac{1}{4} \dot{Z}(t) \\
f_{D_2} &= c_2 \dot{v}_B = c_2 \left(\frac{d}{dt} BB' \right) = c_2 \dot{Z}(t) \\
f_{I_1} &= m_1 \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = (\bar{m} L_{AB}) \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = (\bar{m} 4a) \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = 2a\bar{m} \ddot{Z}(t)
\end{aligned}$$

La rotazione ϑ della trave AB si può esprimere in funzione dello spostamento verticale $Z(t)$ della cerniera B:

$$Z = L_{AB} \tan(\vartheta).$$

Poiché si ipotizzano piccoli spostamenti, è lecito porre: $Z = L_{AB}(\vartheta)$ da cui: $\vartheta = \frac{Z}{L_{AB}}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{I_1} &= I_0 \ddot{\vartheta} = \frac{\bar{m} L_{AB}^3}{12} \frac{\ddot{Z}(t)}{L_{AB}} = \frac{\bar{m} L_{AB}^2}{12} \ddot{Z}(t) = \frac{\bar{m} (4a)^2}{12} \ddot{Z}(t) = \frac{16}{12} \bar{m} a^2 \ddot{Z}(t) = \frac{4}{3} \bar{m} a^2 \ddot{Z}(t) \\
f_{I_2} &= m_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} FF' \right) = m_2 \frac{2}{3} \ddot{Z}(t)
\end{aligned}$$

La risultante del carico distribuito triangolare vale:

$$p_1(t) = \int_0^{L_{AB}} \bar{p} \frac{x}{a} \zeta(t) dx = \bar{p} \frac{\zeta(t)}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{L_{AB}} = \bar{p} \frac{L_{AB}^2}{2a} \zeta(t) = \bar{p} \frac{16a^2}{2a} \zeta(t) = 8\bar{p}a\zeta(t)$$

In queste espressioni \bar{m} rappresenta la massa per unità di lunghezza (che si ottiene moltiplicando la densità del materiale per la sezione trasversale della trave: $\bar{m} = \rho A$), \bar{p} rappresenta la forza distribuita massima per unità di lunghezza, e $\zeta(t)$ rappresenta l'evoluzione nel tempo del carico dinamico.

L'equazione del moto di questo sistema si può scrivere annullando il lavoro effettuato da queste forze quando il loro punto di applicazione subisce uno spostamento virtuale δZ compatibile con i vincoli. Come è evidente dall'osservazione della fig.1.6, lo spostamento virtuale dei punti di applicazione delle forze è proporzionale a Z , quindi il lavoro virtuale totale vale:

$$\delta W = -f_{S_1} \delta Z_{EE'} - f_{S_2} \delta Z_{GG'} - f_{D_1} \delta Z_{DD'} - f_{D_2} \delta Z_{BB'} - f_{I_1} \delta Z_{g_1} - \mathcal{M}_{I_1} \delta \vartheta_{g_1} - f_{I_2} \delta Z_{FF'} + p_1(t) \frac{2}{3} \delta Z_{BB'}$$

dove δZ_{g_1} e $\delta \vartheta_{g_1}$ indicano rispettivamente lo spostamento e la rotazione virtuale del baricentro della trave AB.

Sostituendo nell'equazione precedente i valori delle forze e degli spostamenti virtuali *generalizzati* si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta W &= -k_1 \frac{3}{4} Z(t) \left(\frac{3}{4} \delta Z \right) - k_2 \frac{1}{3} Z(t) \left(\frac{1}{3} \delta Z \right) - c_1 \frac{1}{4} \dot{Z}(t) \left(\frac{1}{4} \delta \dot{Z} \right) - c_2 \dot{Z}(t) (\delta \dot{Z}) - 2\bar{m}a \ddot{Z}(t) \left(\frac{1}{2} \delta \ddot{Z} \right) \\
&\quad - \frac{4}{3} \bar{m} a^2 \ddot{Z}(t) \left(\frac{\delta \ddot{Z}}{L_{AB}} \right) - m_2 \frac{2}{3} \ddot{Z}(t) \left(\frac{2}{3} \delta \ddot{Z} \right) + 8\bar{p}a\zeta(t) \left(\frac{2}{3} \delta \ddot{Z} \right) = 0
\end{aligned}$$

ottenuta osservando che $\delta \vartheta_{g_1} = \frac{\delta Z}{L_{AB}}$. Sviluppando si ottiene:

$$\delta W = \left[-\frac{9}{16} k_1 Z(t) - \frac{1}{9} k_2 Z(t) - \frac{1}{16} c_1 \dot{Z}(t) - c_2 \dot{Z}(t) - \bar{m}a \ddot{Z}(t) - \frac{1}{3} \bar{m} a^2 \ddot{Z}(t) - \frac{4}{9} m_2 \ddot{Z}(t) + \frac{16}{3} \bar{p}a\zeta(t) \right] \delta \ddot{Z} = 0$$



Poiché l'equazione deve annullarsi per qualsiasi valore dello spostamento virtuale, raggruppando e semplificando si ottiene l'equazione del moto:

$$\left[\bar{m}a + \frac{1}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 \right] \ddot{Z}(t) + \left[\frac{1}{16}c_1 + c_2 \right] \dot{Z}(t) + \left[\frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2 \right] Z(t) = \frac{16}{3}\bar{p}a\zeta(t)$$

L'equazione si può scrivere in forma più semplice:

$$m^*\ddot{Z}(t) + c^*\dot{Z}(t) + k^*Z(t) = p^*(t) \quad (a)$$

dove

$$m^* = \bar{m}a + \frac{1}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 \quad \text{è la Massa generalizzata}$$

$$c^* = \frac{1}{16}c_1 + c_2 \quad \text{è la Smorzamento generalizzato}$$

$$k^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2 \quad \text{è la Rigidezza generalizzata}$$

$$p^*(t) = \frac{16}{3}\bar{p}a\zeta(t) \quad \text{è la Forza generalizzata}$$

I coefficienti precedenti vengono valutati facendo riferimento alla coordinata $Z(t)$ utilizzata per definire gli spostamenti del sistema.

Si consideri adesso la forza assiale N della fig.1.5. Come si può osservare dalla seguente Fig.1.7, il lavoro virtuale effettuato da questa forza in seguito allo spostamento virtuale δZ della cerniera B vale $N \delta e$. Lo spostamento δe è la somma di due contributi, δe_1 e δe_2 , che dipendono dalla rotazione delle due travi. Supponendo che gli spostamenti siano piccoli ed osservando i triangoli equivalenti rappresentati nella figura si ottiene:

$$Z: L_{AB} = \delta e_1: \delta Z$$

$$Z: L_{BC} = \delta e_2: \delta Z$$

da cui:

$$e_1 = \frac{Z}{L_{AB}} \delta Z = \frac{Z}{4a} \delta Z$$

$$\delta e_2 = \frac{Z}{L_{BC}} \delta Z = \frac{Z}{3a} \delta Z$$

Di conseguenza lo spostamento totale del punto di applicazione della forza N vale:

$$\delta e = \delta e_1 + \delta e_2 = \frac{Z}{4a} \delta Z + \frac{Z}{3a} \delta Z = \frac{7}{12} \frac{Z}{a} \delta Z$$

e il lavoro fatto dalla forza assiale vale:

$$\delta W_N = N \delta e = \frac{7}{12} \frac{NZ}{a} \delta Z$$

Se si inserisce questa equazione nell'espressione dei lavori virtuali δW precedentemente calcolati si ottiene:

$$\left[\bar{m}a + \frac{1}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2 \right] \ddot{Z}(t) + \left[\frac{1}{16}c_1 + c_2 \right] \dot{Z}(t) + \left[\frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2 - \frac{7}{12} \frac{N}{a} \right] Z(t) = \frac{16}{3}\bar{p}a\zeta(t)$$

Si può osservare che è cambiato solo un coefficiente, quello relativo alla rigidezza generalizzata, che diventa:

$$\bar{k}^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2 - \frac{7}{12} \frac{N}{a}$$

Con questa modifica l'equazione del moto del sistema completo che comprende anche la forza assiale, è simile all'equazione (a): l'unica variazione è il valore della rigidezza generalizzata.



E' bene osservare che una rigidezza generalizzata nulla rappresenta una condizione d'instabilità critica. Il valore della forza assiale N_{cr} che provoca lo sbandamento laterale della struttura può essere determinato annullando il valore di \bar{k}^* :

$$\bar{k}^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{1}{9}k_2 - \frac{7}{12}\frac{N}{a} = 0 \quad \text{da cui} \quad N_{cr} = \left(\frac{27}{28}k_1 + \frac{4}{21}k_2\right)a$$

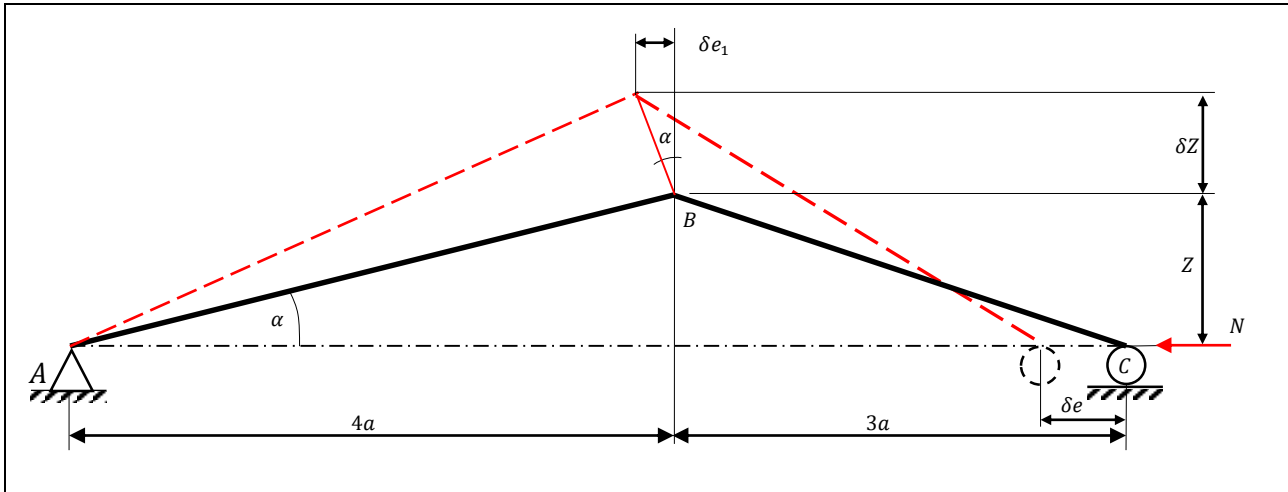


Fig.1.7 – Componenti dello spostamento orizzontale.

In generale le forze assiali di compressione tendono a ridurre la rigidezza, mentre quelle di trazione ne determinano l'aumento. Carichi di questo tipo possono avere un effetto importante sulla risposta della struttura ai carichi dinamici ed è indispensabile calcolare la variazione di rigidezza che ne risulta per determinare la sua importanza in ogni particolare problema. E' importante osservare che il termine *forza assiale* si riferisce ad una forza che agisce parallelamente all'asse *iniziale* dell'elemento, *prima della deformazione*; si suppone che la direzione di tale forza rimanga costante durante il movimento della struttura.

ESEMPIO E1.2 – Si scrivano le equazioni dell'equilibrio dinamico della struttura rappresentata nella Fig.1.8

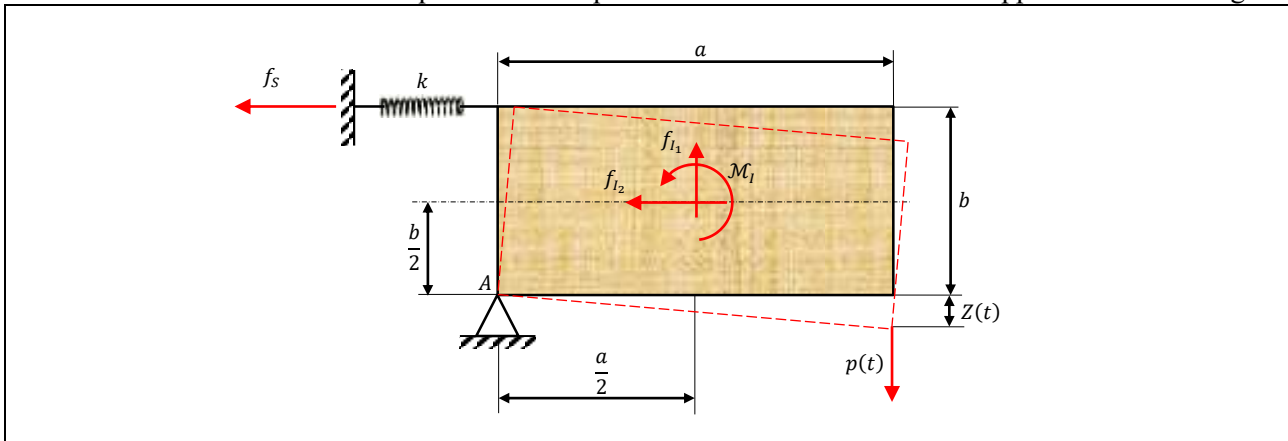


Fig.1.8 – Piastra ad un solo grado di libertà su cui agiscono delle forze dinamiche.

Per caratterizzare il campo di spostamento di questa struttura rigida si può utilizzare lo spostamento verticale $Z(t)$ del punto di applicazione della forza. Si ipotizza inoltre che gli spostamenti siano piccoli. E' possibile esprimere il valore delle forze che si oppongono al moto in funzione di $Z(t)$. Poiché la piastra ruota rigidamente intorno al perno A di un angolo pari a $\vartheta \cong \frac{Z(t)}{a}$, lo spostamento orizzontale del punto di applicazione della molla vale: $u = b\vartheta = \frac{b}{a}Z(t)$. Da qui si ricavano le seguenti forze:



$$f_s = k \frac{b}{a} Z(t) \quad f_{I_1} = \gamma ab \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) \quad f_{I_2} = \gamma ab \frac{b}{2a} \ddot{Z}(t) \quad \mathcal{M}_I = I_0 \ddot{\theta} = \gamma ab \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right) \frac{1}{a} \ddot{Z}(t)$$

L'equazione del moto di questo semplice sistema può scriversi direttamente scrivendo l'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera posta in A:

$$\sum_A M = f_s b + f_{I_1} \frac{a}{2} + f_{I_2} \frac{b}{2} + \mathcal{M}_I - p(t) a = 0$$

Sostituendo il valore delle forze nella precedente equazione e semplificando si ottiene:

$$\gamma ab \left[\frac{1}{4} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{12} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \right] \ddot{Z}(t) + k \frac{b^2}{a^2} Z(t) = p(t)$$

L'equazione del moto assume quindi la forma:

$$m^* \ddot{Z}(t) + k^* Z(t) = p^*(t)$$

in cui i parametri generalizzati valgono:

$$m^* = \gamma ab \left[\frac{1}{4} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{12} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \right] \quad k^* = k \frac{b^2}{a^2} \quad p^*(t) = p(t)$$

1.8 SISTEMI AD UN SOLO GRADO DI LIBERTÀ A CARATTERISTICHE DISTRIBUITE.

Il sistema rappresentato nella fig.1.5 possiede un solo grado di libertà non ostante i complessi legami esistenti tra i diversi elementi: le due travi rigide sono in effetti tenute insieme in modo che si possa manifestare una sola forma di spostamento. Se le travi non fossero infinitamente rigide ma potessero inflettersi, allora il sistema avrebbe un numero infinito di gradi di libertà: ciò non ostante si potrebbe ancora eseguire uno studio semplificato ad un solo grado di libertà supponendo che il campo di spostamento si possa rappresentare attraverso un solo parametro.

Qui di seguito verrà illustrato un metodo che utilizza un solo grado di libertà per approssimare il comportamento di un sistema che in realtà ne possiede un numero infinito. Ci si propone di formulare le equazioni del moto della colonna incastrata alla base indicata nella Fig.1.9. Le proprietà essenziali della colonna sono la rigidezza flessionale $EI(x)$ e la massa per unità di lunghezza $m(x)$. Si suppone che sia sollecitata da una scossa sismica $v_g(t)$ trasmessa dal suolo alla fondazione e che nel suo vertice superiore agisca un carico assiale di compressione N costante.

Per approssimare il movimento di questo sistema per mezzo di un solo grado di libertà, è necessario ammettere che possa flettere solo secondo una forma scelta a priori. La forma della deformata sarà indicata dalla funzione $\psi(x)$ mentre la sua ampiezza sarà rappresentata dalla coordinata generalizzata $Z(t)$. Si avrà quindi:

$$v(x, t) = \psi(x) Z(t) \quad (1.22)$$

Normalmente come coordinata generalizzata si sceglie lo spostamento di un punto di riferimento appartenente al sistema, per esempio, nel caso in esame, l'apice della colonna.

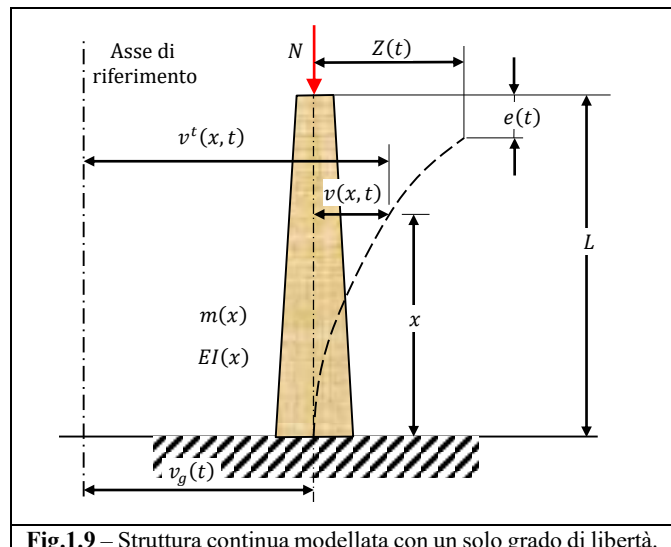


Fig.1.9 – Struttura continua modellata con un solo grado di libertà.

Lo spostamento normalizzato si definisce come il rapporto adimensionale tra lo spostamento di ogni punto della struttura sullo spostamento del punto di riferimento:



$$\psi(x) = \frac{v(x, t)}{Z(t)} \quad (1.23)$$

Le equazioni del moto di questo sistema generalizzato si possono formulare facilmente solo per mezzo dei principi energetici; qui verrà utilizzato il principio di Hamilton, ma è possibile fare ricorso anche al Principio dei Lavori Virtuali. L'energia cinetica della colonna vale:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\dot{v}^t(x, t)]^2 dx \quad (1.24)$$

dove \dot{v}^t indica la velocità al tempo t di un punto posto a distanza x dall'incastro, misurata rispetto al sistema di riferimento globale:

$$\dot{v}^t(x, t) = \dot{v}(x, t) + \dot{v}_g(t)$$

L'energia potenziale della deformazione flessionale elastica vale:

$$\Pi_f = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (1.25)$$

Se lungo la colonna agisce anche un carico distribuito $q(x)$ il suo potenziale varrebbe:

$$W_{nc} = \int_0^L q(x)v(x, t) dx \quad (1.26)$$

Per calcolare l'energia potenziale della forza assiale (che durante la risposta dinamica non cambia né in direzione né in ampiezza ed è dunque conservativa) è necessario calcolare la componente verticale dello spostamento $e(t)$ del vertice superiore della colonna. In seguito allo spostamento trasversale $v(x, t)$, ogni tratto della colonna di lunghezza infinitesima dx assumerà la lunghezza ds .

Dalla Fig.1.10 si ottiene:

$$ds^2 = dx^2 + \left(\frac{dv}{dx} dx \right)^2$$

e quindi:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2}$$

Lo sviluppo in serie di questa equazione fornisce:

$$ds = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{dv}{dx} \right)^6 + \dots \right]$$

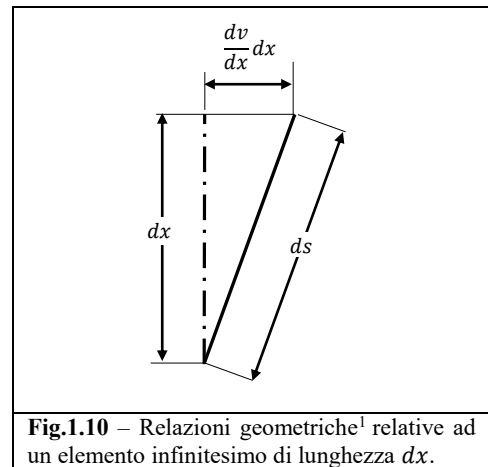


Fig.1.10 – Relazioni geometriche¹ relative ad un elemento infinitesimo di lunghezza dx .

Se si ipotizza che la trave subisca piccole rotazioni, cioè se $\vartheta = \frac{dv}{dx} \ll 1$, allora è consentito limitare lo sviluppo in serie al primo termine:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2} \cong dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (1.27)$$

Di conseguenza le deformazioni membranali nella trave valgono:

$$\varepsilon_m = \frac{ds - dx}{dx} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (1.28)$$

¹ Chiaramente nello schema rappresentato nella figura 1.10 non è rispettata la relazione $\vartheta \ll 1$.



Lo spostamento verticale si ottiene sommando i diversi contributi:

$$e(t) = \int_0^L \varepsilon_m(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (1.29)$$

L'energia potenziale del carico assiale N vale dunque:

$$\Pi_N = -\frac{N}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (1.30)$$

dove il segno negativo è necessario perché il potenziale della forza N diminuisce in seguito allo spostamento $e(t)$. E' utile mettere in evidenza che se la forza assiale N variasse con la coordinata assiale x (per esempio per prendere in considerazione la forza peso), sarebbe necessario modificare l'eq.(1.30) portando l'espressione della forza N entro l'integrale. Si può inoltre mettere in evidenza che l'eq.(1.30) non è rigorosamente esatta in quanto la forza assiale N e la deformazione membranale ε_m non sono allineate e quindi l'eq.(1.30) trascura il coseno dell'angolo tra loro compreso. Il calcolo corretto del potenziale della forza richiede la conoscenza della deformata (al momento del calcolo ancora incognita) e quindi il problema è di tipo non-lineare e si può risolvere solo con una procedura iterativa, facendo crescere la forza N con piccoli incrementi.

Nel sistema in esame non ci sono carichi dinamici ed è stato trascurato lo smorzamento. Di conseguenza il Principio di Hamilton assume la forma seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi_{pt}) dt = 0 \quad (1.31)$$

dove l'Energia Potenziale Totale del sistema vale:

$$\Pi_{pt} = \Pi_f + \Pi_N$$

Sostituendo le eq.(1.24), (1.25) e (1.30) nell'eq.(1.31) ed effettuando le variazioni indicate si ottiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m(x) \dot{v}^t(x, t) \delta \dot{v}^t dx - \int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx + N \int_0^L \frac{dv}{dx} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) dx \right] dt = 0 \quad (1.32)$$

Osservando che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} Z(t) = \psi' Z & \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} Z(t) = \psi'' Z & \delta \dot{v}^t &= \delta \dot{v} \\ \delta v(x, t) &= \psi(x) \delta Z(t) = \psi \delta Z & \dot{v}(x, t) &= \psi(x) \dot{Z}(t) = \psi \dot{Z} & \delta \dot{v}(x, t) &= \psi \delta \dot{Z} \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\delta \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \delta Z(t) = \psi' \delta Z \quad \delta \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \delta Z(t) = \psi'' \delta Z$$

i tre termini dell'eq.(1.32) si possono sviluppare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int_0^L m(x) \dot{v}^t(x, t) \delta \dot{v}^t dx &= \int_0^L m(x) [\dot{v}(x, t) + \dot{v}_g(t)] \delta \dot{v}(x, t) dx = \\ &= \int_0^L m(x) \dot{v}(x, t) \delta \dot{v} dx + \dot{v}_g(t) \int_0^L m(x) \delta \dot{v} dx = \dot{Z}(t) \delta \dot{Z}(t) \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx + \delta \dot{Z}(t) \dot{v}_g(t) \int_0^L m(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx &= \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} Z(t) \right) \left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \delta Z(t) \right) dx \\ &= Z(t) \delta Z(t) \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned}$$



$$N \int_0^L \frac{dv}{dx} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) dx = N \int_0^L \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} Z(t) \right) \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \delta Z(t) \right) dx = Z(t) \delta Z(t) N \int_0^L \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 dx$$

Riassumendo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{Z} \delta \dot{Z} \int_0^L m(x) \psi^2 dx + \delta \dot{Z} \dot{v}_g(t) \int_0^L m(x) \psi dx - Z \delta Z \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx + Z \delta Z N \int_0^L (\psi')^2 dx \right\} dt = 0 \quad (1.34)$$

Posto:

$$m^* = \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx \quad \bar{m} = \int_0^L m(x) \psi(x) dx$$

i primi due termini diventano rispettivamente:

$$\int_{t_1}^{t_2} m^* \dot{Z} \delta \dot{Z} dt \quad \int_{t_1}^{t_2} \bar{m} \dot{v}_g(t) \delta \dot{Z} dt$$

Integrando per parti (si veda l'[appendice 1A](#)) si ottiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} m^* \dot{Z} \delta \dot{Z} dt = - \int_{t_1}^{t_2} m^* \ddot{Z} \delta Z dt \quad \int_{t_1}^{t_2} \bar{m} \dot{v}_g(t) \delta \dot{Z} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \bar{m} \ddot{v}_g(t) \delta Z dt$$

Posto:

$$k^* = \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx \quad \text{Rigidità generalizzata} \quad (1.35a)$$

$$k_G^* = N \int_0^L \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 dx = N \int_0^L (\psi')^2 dx \quad \text{Rigidità geometrica generalizzata} \quad (1.35b)$$

$$p_{eff}^*(t) = -\dot{v}_g(t) \int_0^L m(x) \psi(x) dx = -\bar{m} \dot{v}_g(t) \quad \text{Carico effettivo generalizzato} \quad (1.35c)$$

l'eq.(1.34) assume la forma seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m^* \ddot{Z} - k^* Z + k_G^* Z + p_{eff}^*(t)] \delta Z dt = 0 \quad (1.36)$$

Poiché la variazione δZ è arbitraria, il termine tra parentesi quadra dell'eq.(1.36) deve annullarsi.

Concludendo l'equazione del moto assume la forma seguente:

$$m^* \ddot{Z} + \bar{k}^* Z = p_{eff}^*(t) \quad (1.37)$$

dove

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* \quad (1.38)$$

è la *rigidità generalizzata combinata* ed m^* è la *massa generalizzata* del sistema.

Il carico critico d'instabilità si può calcolare annullando la rigidità generalizzata combinata:

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx - N \int_0^L (\psi')^2 dx = 0 \quad (1.39)$$

da cui:



$$N = \frac{\int_0^L EI(x)(\psi'')^2 dx}{\int_0^L (\psi')^2 dx} \quad (1.40)$$

Questo metodo di calcolo approssimato ad un solo grado di libertà prende il nome di **metodo di Rayleigh** e verrà riesaminato in seguito: la precisione del risultato finale dipende naturalmente dalla funzione $\psi(x)$ usata per descrivere la deformata.

ESEMPIO E1.3 – Ci si propone di formulare le equazioni del moto per un sistema ad un solo grado di libertà ma la cui rigidità sia distribuita. Si supponga che la colonna rappresentata nella fig.1.9 abbia una rigidità flessionale EI uniforme e una massa uniformemente distribuita \bar{m} . Inoltre la forma della deformata in vibrazione libera sia definita dall'equazione:

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad \text{E3.a}$$

Utilizzando le equazioni precedentemente descritte è possibile calcolare la massa e la rigidità generalizzate:

$m^* = \int_0^L \bar{m}(x)\psi^2(x) dx = \bar{m} \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]^2 dx = \bar{m} \int_0^L \left[1 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right] dx$ $\int_0^L \left[1 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right] dx = L - 2\frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\Big _0^L + \frac{1}{2}\left[x + \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]_0^L$ $m^* = \bar{m} \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]^2 dx = \bar{m} \left(L - \frac{4L}{\pi} + \frac{L}{2}\right) = \bar{m}L \left(\frac{3\pi - 8}{2\pi}\right) \cong 0.22676 \bar{m}L$	E3.b
$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{\pi}{2L} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad ; \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \psi'' = \frac{\pi^2}{4L^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ $k^* = \int_0^L EI(x)(\psi'')^2 dx = EI \frac{\pi^4}{16L^4} \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{EI\pi^4}{32L^3}$	E3.c

Se si suppone che la base della colonna sia sottoposta ad una eccitazione, la forza generalizzata data dall'eq.(1.35c) vale, a parte il segno che non ha importanza nel ragionamento successivo:

$$p_{eff}^*(t) = \dot{v}_g(t) \int_0^L \bar{m} \psi dx = \bar{m} \dot{v}_g(t) \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right] dx = \bar{m} \dot{v}_g(t)L \left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right) = 0.36338 \bar{m} L \dot{v}_g(t) \quad \text{E3.d}$$

Se si trascura la forza assiale, l'equazione del moto risulta:

$$m^* \ddot{Z} + k^* Z = p_{eff}^*(t)$$

$$\bar{m}L \left(\frac{3\pi - 8}{2\pi}\right) \ddot{Z}(t) + \frac{EI\pi^4}{32L^3} Z(t) = \bar{m} \dot{v}_g(t)L \left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right) \quad \text{E3.e}$$

Tenendo conto della forza assiale N , la rigidità geometrica generalizzata della colonna vale:

$$k_G^* = N \int_0^L (\psi')^2 dx = N \frac{\pi^2}{4L^2} \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = N \frac{\pi^2}{8L} \quad \text{E3.f}$$

Di conseguenza la rigidità generalizzata combinata vale:

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \frac{EI\pi^4}{32L^3} - N \frac{\pi^2}{8L} \quad \text{E3.g}$$



Il carico critico d'instabilità laterale che si ottiene annullando la rigidezza combinata vale dunque:

$$N_{cr} = \frac{\frac{EI\pi^4}{32L^3}}{\frac{\pi^2}{8L}} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2} \quad \text{E3.h}$$

Il valore appena trovato è esattamente il carico critico all'instabilità laterale di una colonna uniforme incastrata alla base e caricata alla sua estremità, in quanto la deformata definita dall'eq.(E3.a) è la deformata esatta. Se si sostituisce l'eq.(E3.h) nell'eq.(E3.f), è possibile esprimere la rigidezza geometrica in modo più semplice:

$$\frac{\pi^2}{8L} = \frac{EI\pi^4}{32L^3 N_{cr}} \quad k_G^* = N \frac{\pi^2}{8L} = \frac{EI\pi^4}{32L^3} \frac{N}{N_{cr}} \quad \text{E3.i}$$

Se quest'ultima equazione si utilizza per modificare l'eq.(E3.e), l'equazione del moto che tiene conto della presenza dell'azione normale diventa:

$$m^* \ddot{Z} + \bar{k}^* Z = p_{eff}^*(t) \quad \text{E3.j}$$

$$\bar{m}L \left(\frac{3\pi - 8}{2\pi} \right) \ddot{Z}(t) + \frac{EI\pi^4}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}} \right) Z(t) = \bar{m} \ddot{v}_g(t) L \left(\frac{\pi - 2}{\pi} \right)$$

Alla funzione di forma $\psi(x)$ è possibile assegnare una qualsiasi funzione purché soddisfi a priori le condizioni al contorno di tipo geometrico. Per esempio se si ipotizzasse una funzione di tipo parabolico:

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \quad \text{E3.k}$$

la rigidezza generalizzata sarebbe:

$$k^* = \int_0^L EI(x)(\psi'')^2 dx = \frac{4EI}{L^4} \int_0^L dx = \frac{4EI}{L^3}$$

e la rigidezza geometrica generalizzata varrebbe:

$$k_G^* = N \int_0^L (\psi')^2 dx = \frac{4N}{L^4} \int_0^L x^2 dx = \frac{4N}{3L}$$

In questo caso il carico critico varrebbe:

$$N_{cr} = \frac{\frac{4EI}{L^3}}{\frac{4}{3L}} = \frac{3EI}{L^2} \quad \text{E3.l}$$

che risulta più grande di circa il 20% del valore esatto calcolato precedentemente:

$$\frac{N_{cr}(\text{parabolico})}{N_{cr}(\text{sinusoidale})} = \frac{\frac{3EI}{L^2}}{\frac{\pi^2 EI}{4 L^2}} = \frac{12}{\pi^2} \cong 1.216$$

Se per rappresentare la forma della deformata si scegliesse una funzione $\psi(x)$ diversa da quella esatta (che in generale non è nota a priori), il modello della struttura risulterebbe più rigido del necessario. La conseguenza è che il carico critico risulterà più elevato del valore corretto. Nell'esempio precedente è evidente che, benché soddisfi le condizioni al contorno di tipo geometrico, la forma parabolica non è una buona ipotesi per la struttura in esame in quanto la curvatura costante (in questo caso $\psi'' = 2/L^2$) implica che il momento flettente sia costante su tutto lo sviluppo assiale della colonna, mentre è evidente che in questo caso il momento debba annullarsi nel vertice superiore della trave.

**1.9 ESPRESSIONE DELLE CARATTERISTICHE GENERALIZZATE DEL SISTEMA.**

Come si può dedurre dagli esempi precedenti, l'equazione del moto di un sistema ad un solo grado di libertà, qualsiasi sia la sua complessità, può ridursi sempre alla forma seguente:

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + \bar{k}^* Z(t) = p^*(t) \quad (1.41)$$

in cui $Z(t)$ è la coordinata generalizzata che permette di esprimere il movimento del sistema e le quantità indicate con un asterisco rappresentano le caratteristiche fisiche generalizzate che corrispondono a questa coordinata. I valori che assumono queste caratteristiche generalizzate possono in generale essere determinate applicando il Principio di Hamilton oppure il Principio dei Lavori Virtuali. Le formule che si ottengono per il loro calcolo assumono delle forme molto comode.

Si consideri un arbitrario sistema monodimensionale (Fig.1.11) che si immagina possa subire solo lo spostamento il cui andamento è rappresentato nella fig.1.11a. Gli spostamenti possono esprimersi per mezzo della coordinata generalizzata $Z(t)$:

$$v(x, t) = \psi(x)Z(t) \quad (1.42)$$

Le caratteristiche generalizzate associate a questa forma si possono allora esprimere come segue. Per la distribuzione della massa rappresentata nella fig.1.11b, la massa generalizzata vale:

$$m^* = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 + \sum I_{oi} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_i^2 \quad (1.43)$$

in cui le sommatorie rappresentano il contributo delle masse dei corpi rigidi, e $\psi'_i = \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_i$ rappresenta la rotazione nel punto i -esimo. Lo smorzamento generalizzato che deriva in parte dallo smorzamento distribuito della fondazione, in parte dagli ammortizzatori locali c_i che appaiono nella fig.1.11c, vale:

$$c^* = \int_0^L c(x)[\psi(x)]^2 dx + \sum c_i \psi_i^2 \quad (1.44)$$

La rigidità generalizzata dovuta alla fondazione elastica, alla rigidità flessionale e alle molle locali della fig.1.11d è data da:

$$k^* = \int_0^L k(x)[\psi(x)]^2 dx + \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx + \sum k_i \psi_i^2 \quad (1.45)$$

Il termine della rigidità geometrica causata dalla forza assiale N costante nel tempo (si veda la fig.1.11e) vale:

$$k_G^* = N \int_0^L [\psi'(x)]^2 dx \quad (1.46)$$

Nel caso in cui la forza assiale variasse in funzione della posizione lungo l'asse della trave, l'espressione sarebbe:

$$k_G^* = \int_0^L N(x)[\psi'(x)]^2 dx \quad (1.47)$$

Infine, la forza generalizzata associata al carico laterale e variabile nel tempo della fig.1.11e vale:

$$p^*(t) = \int_0^L p(x, t) \psi(x) dx + \sum k_i \psi_i \quad (1.48)$$

E' importante osservare che le forze e gli spostamenti che appaiono in quest'ultima equazione sono quantità vettoriali. Nell'equazione possono essere presenti solo le componenti di spostamento la cui direzione coincide con quella dei carichi applicati e il loro senso dipende dal senso delle forze. In altri termini, l'eq.(1.48) rappresenta il lavoro effettuato dai carichi durante uno spostamento lungo la coordinata generalizzata $Z(t)$.

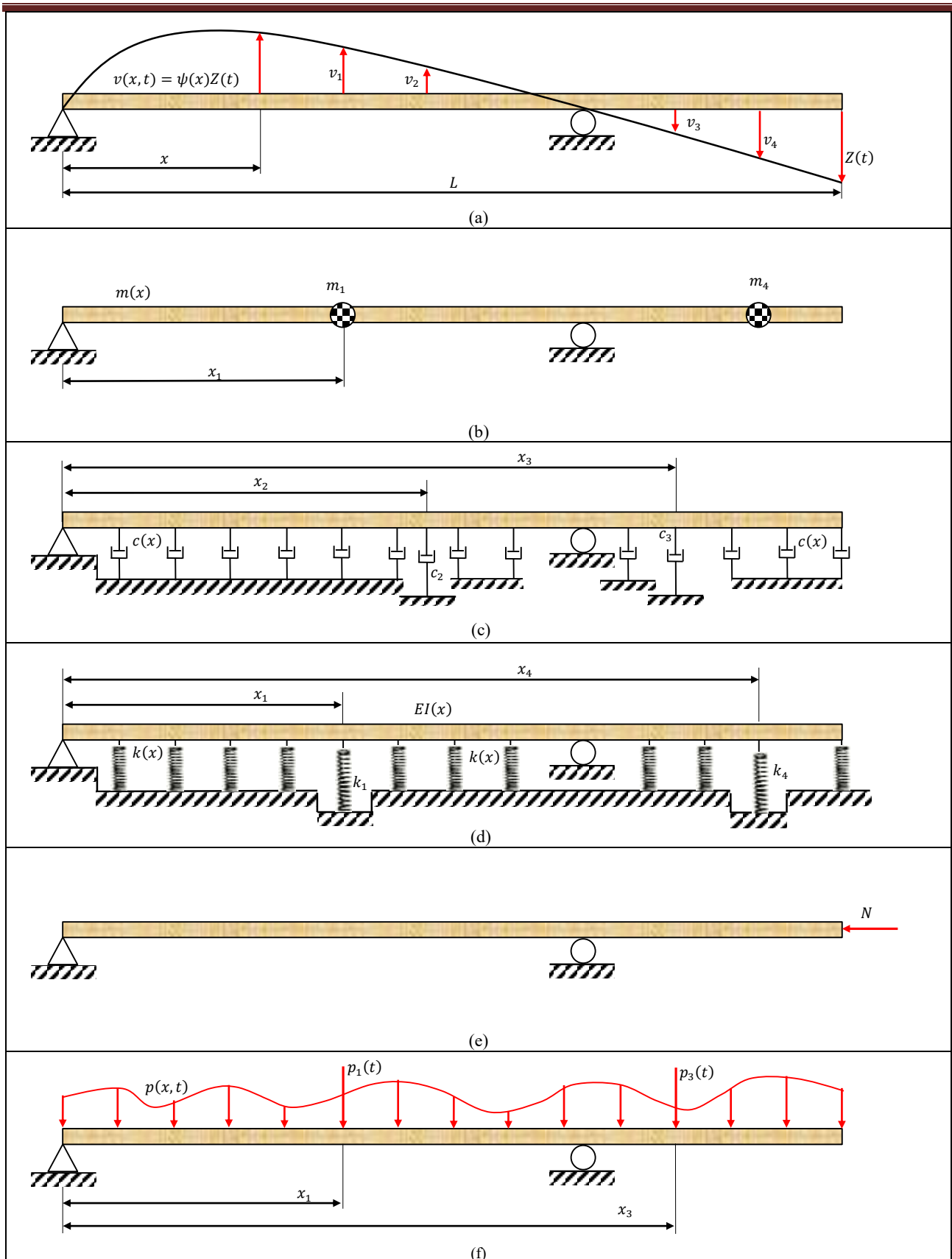


Fig.1.11 – Caratteristiche di un sistema generalizzato ad un solo grado di libertà; a) deformata ipotizzata; b) caratteristiche di massa; c) caratteristiche di smorzamento; d) caratteristiche elastiche; e) carico assiale; f) carico trasversale applicato.



Le coordinate generalizzate si applicano anche nell'analisi dei sistemi bidimensionali modellati con un solo grado di libertà. Si consideri per esempio la piastra bidimensionale rappresentata nella fig.1.12. Se le frecce hanno l'andamento rappresentato in figura e se l'ampiezza dello spostamento del punto centrale è presa come coordinata generalizzata, allora gli spostamenti si possono esprimere nel modo seguente:

$$v(x, y, t) = \psi(x, y)Z(t) \tag{1.49}$$

Per una piastra rettangolare semplicemente appoggiata sui bordi esterni, una scelta ragionevole della funzione che rappresenta la forma della sua deformata è la seguente:

$$\psi(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{1.50}$$

ma sarebbe possibile un'altra qualsiasi funzione di spostamento purché soddisfi a priori le condizioni al contorno di tipo geometrico.

Scelta la forma dello spostamento, è possibile procedere con il calcolo delle caratteristiche generalizzate utilizzando delle equazioni simili a quelle usate per l'elemento monodimensionale, con la sola differenza che le integrazioni saranno estese all'intera superficie. Per esempio, la massa generalizzata sarà data da:

$$m^* = \int_A m(x, y)[\psi(x, y)]^2 dA + \sum m_i \psi_i^2 \tag{1.51}$$

Le espressioni che corrispondono rispettivamente alla rigidità generalizzata e alla forza generalizzata di una struttura uniforme di tipo piastra sono:

$$k^* = D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dA \tag{1.52}$$

$$p^* = \int_A p(x, y) \psi(x, y) dA + \sum p_i \psi_i \tag{1.53}$$

dove

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = \text{rigidezza flessionale della piastra}$$

$p(x, y) = \text{carico distribuito sulla piastra}$

$\nu = \text{coefficiente di Poisson}$

$h = \text{spessore della piastra}$

Si vede facilmente che le stesse tecniche si possono applicare senza difficoltà a dei sistemi tridimensionali dopo avere scelto una funzione spostamento adeguata alle tre dimensioni. Ma la difficoltà di scelta di un andamento adeguato aumenta rapidamente con il numero di dimensioni del sistema e l'affidabilità da attribuire ai risultati diminuisce di conseguenza.

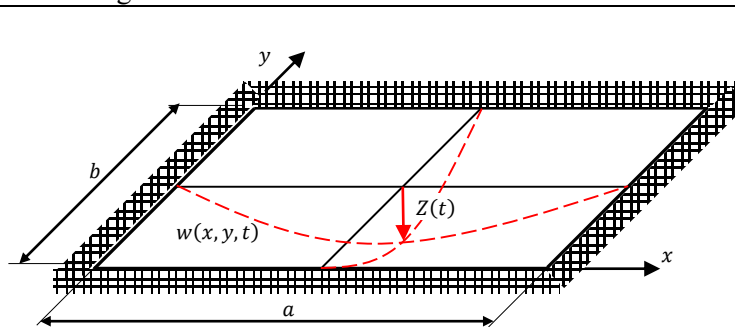


Fig.1.12 – Piastra bidimensionale modellata come un sistema ad un solo grado di libertà.



APPENDICE 1A

Data la funzione $h(t) = f(t)g(t)$ la sua derivata rispetto al tempo vale:

$$\dot{h}(t) = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t)$$

da cui

$$f(t)\dot{g}(t) = \dot{h}(t) - \dot{f}(t)g(t)$$

L'integrale della espressione precedente vale:

$$\int f(t)\dot{g}(t)dt = f(t)g(t)|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{f}(t)g(t)dt$$

Posto: $f(t) = \dot{Z}$ e $g(t) = \delta Z$ risulta:

$$\int \dot{Z}\delta\dot{Z}dt = \dot{Z}\delta Z|_{t_1}^{t_2} - \int \ddot{Z}\delta Zdt$$

Per il Principio di Hamilton risulta:

$$\dot{Z}\delta Z|_{t_1}^{t_2} = 0$$

da cui risulta:

$$\int \dot{Z}\delta\dot{Z}dt = - \int \ddot{Z}\delta Zdt$$

**ESERCIZIO**

Per studiare la trave rappresentata in figura utilizzando un solo grado di libertà, si utilizzi, come forma della deformata $\psi(x)$, l'equazione della linea elastica normalizzata, in modo che il suo valore massimo sul vertice superiore della trave valga uno.

- 1) Calcolare le caratteristiche fisiche generalizzate m^* e k^* e il carico generalizzato $p^*(t)$;
- 2) Ipotizzando che una forza normale N diretta verso il basso sia applicata sul vertice superiore della trave, calcolare la rigidezza generalizzata combinata \bar{k}^* utilizzando la stessa funzione $\psi(x)$;
- 3) Ripetere il calcolo del punto (2) ipotizzando che la forza assiale vari lungo l'asse della trave secondo la funzione:

$$N(x) = N_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

