

Esame di Calcolo delle Probabilità

(2 ore e 30 minuti)

Si prega di scrivere in maniera chiara, risposte non leggibili non saranno corrette. In tutti gli esercizi si richiede di illustrare il proprio lavoro.

Esercizio 1 (20 punti). *Un insetto depone un numero di uova $X_0 \sim P(\lambda)$ per un certo $\lambda > 0$ fissato. Il primo giorno ciascun uovo può rimanere chiuso con probabilità $p \in (0, 1)$, oppure schiudersi, con probabilità $(1 - p)$, indipendentemente dalle altre uova. Indichiamo con X_1 il numero di uova che rimangono chiuse alla fine del primo giorno.*

(a) *Quanto vale $\mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = n)$ per $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$? Si ricavi quindi la densità discreta congiunta di (X_0, X_1) .*

(b) *Si calcoli $\mathbb{P}(X_1 = k)$ e si deduca che $X_1 \sim P(\lambda p)$.*

Iteriamo ora la procedura: per ogni $t \in \mathbb{N}$ con $t \geq 2$, supponiamo che ciascuna delle uova che è rimasta chiusa alla fine del $(t - 1)$ -esimo giorno possa rimanere chiusa il t -esimo giorno, con probabilità p , oppure schiudersi, con probabilità $1 - p$, indipendentemente dalle altre uova. Indichiamo quindi con X_t il numero di uova che restano chiuse alla fine del t -esimo giorno.

(c) *Si ricavi la distribuzione di X_t e si deduca che $\mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-\lambda p^t}$ per ogni $t \in \mathbb{N}$.¹ Si descriva un algoritmo in R per calcolare una stima di $\mathbb{P}(X_3 = 0)$.*

Indichiamo infine con T il giorno in cui si schiudono le ultime uova.

(d) *Si giustifichi l'uguaglianza di eventi*

$$\{T \leq t\} = \{X_{t+1} = 0\}$$

e si determini la densità discreta di T .

Soluzione. (a) *Sapendo che l'insetto ha deposto n uova, possiamo calcolare $\mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = n)$ con la binomiale, per cui*

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Determiniamo ora $\mathbb{P}(X_0 = n, X_1 = k)$, dalla definizione di probabilità condizionale otteniamo

$$\mathbb{P}(X_0 = n, X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = n) \mathbb{P}(X_0 = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

¹Suggerimento: Non serve fare calcoli, basta osservare che, dai punti precedenti, se $X_t \sim P(\lambda t)$ allora...

(b) Calcoliamo $\mathbb{P}(X_1 = k)$ come

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_1 = k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = n, X_1 = k) \\
 &\stackrel{(a)}{=} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = n, X_1 = k) \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
 &= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \lambda^{n-k} \\
 &\stackrel{(b)}{=} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (1-p)^\ell \lambda^\ell \\
 &= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} \\
 &= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda},
 \end{aligned}$$

dove (a) segue dal fatto che $\mathbb{P}(X_0 = n, X_1 = k) = 0$ se $k > n$ e (b) segue dal cambio di variabile $\ell = n - k$.

(c) Dal punto precedente abbiamo che, se $X_t \sim P(\lambda_t)$, allora $X_{t+1} \sim P(\lambda_{t+1})$. Allora, ovviamente $X_t \sim P(\lambda p^t)$. Segue banalmente che $\mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-\lambda p^t}$.

Possiamo verificare il risultato sopra con il seguente codice R

```

1  lambda=5;
2  p=0.6;
3  n=1000000;
4  s=0;
5  for(i in c(1:n)){
6    x0=rpois(1, lambda);
7    x1=rbinom(1, x0, p);
8    x2=rbinom(1, x1, p);
9    x3=rbinom(1, x2, p);
10   if (x3==0){
11     s=s+1;
12   }
13 }
14 p_ empirica=s/n
15 p_ teorica=exp(-lambda*(p^3))

```

(d) L'evento $\{T \leq t\}$ corrisponde a dire che tutte le uova di sono schiuse entro il giorno t che è equivalente a dire che il giorno $t + 1$ non ci sono più uova non schiuse.

Poiché T è a valori naturali e usando l'uguaglianza sopra otteniamo che, per $k > 0$

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \leq k) - \mathbb{P}(T \leq (k - 1)) = \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) - \mathbb{P}(X_k = 0) = e^{\lambda p^{k+1}} - e^{\lambda p^k},$$

mentre per $k = 0$

$$\mathbb{P}(T = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = e^{-\lambda p}.$$

Esercizio 2 (10 punti). Siano X e Y due variabili aleatorie reali, definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la cui distribuzione congiunta è assolutamente continua con densità

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} 1_A(x, y),$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < \sqrt{x}\}$.²

(a) Si determinino le distribuzioni marginali di X e Y ;

(b) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

Soluzione. (a) Iniziamo dalla densità marginale di X . Se $x \leq 0$, allora $f_X(x) = 0$, sia $x > 0$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} 1_A(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \sqrt{x} = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Passiamo a Y . Se $y \leq 0$, allora $f_Y(y) = 0$, sia $y > 0$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} 1_A(x, y) dx \\ &= \int_{y^2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_y^{\infty} \frac{1}{2t} e^{-t} 2t dt = \int_y^{\infty} e^{-t} dt = e^{-y}. \end{aligned}$$

(b) Poiché $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ le variabili aleatorie non sono indipendenti.

Esercizio 3 (20 punti). Sia $\{X_n\}_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme continua su $[0, 2]$. Definiamo la successione $\{Y_n\}_n$ come

$$Y_0 = 1 \quad Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

(a) Si calcoli $\mathbb{E}((X_j)^\gamma)$ e si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in (0, \infty)$ si ha $\mathbb{E}((Y_n)^\gamma) = \left(\frac{2^\gamma}{1+\gamma}\right)^n$;

²Suggerimento: Per eseguire alcune integrazioni, può essere utile il cambio di variabili $x = t^2$.

(b) Dopo aver giustificato la seguente disuguaglianza, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\sqrt{Y_n})}{\sqrt{\varepsilon}}$$

si mostri che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) < \infty;$$

(c) Si discuta la convergenza di Y_n per $n \rightarrow \infty$ in probabilità, in L^1 , in L^2 , ed in legge.

Soluzione. (a) Calcoliamo $\mathbb{E}(X_j^\gamma)$,

$$\mathbb{E}(X_j^\gamma) = \int_0^2 x^\gamma \frac{dx}{2} = \left. \frac{x^{\gamma+1}}{2(\gamma+1)} \right|_0^2 = \frac{2^{\gamma+1}}{2(\gamma+1)} = \frac{2^\gamma}{\gamma+1}.$$

Poiché le X_j sono indipendenti, anche X_j^γ sono indipendenti, quindi si ha

$$\mathbb{E}(Y_n^\gamma) = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_i^\gamma) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^\gamma) = \left(\frac{2^\gamma}{\gamma+1} \right)^n.$$

(b) La disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Markov

$$\mathbb{P}(h(X) > a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{a}$$

con $h(x) = \sqrt{x}$ e $a = \sqrt{\varepsilon}$ e osservando che, poiché $Y_n \geq 0$ quasi certamente, si ha

$$\{\sqrt{Y_n} > \sqrt{\varepsilon}\} = \{Y_n > \varepsilon\}.$$

Mostriamo ora la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\sqrt{Y_n})}{\sqrt{\varepsilon}} \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{1/2}}{1/2+1} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{8}{9}} \right)^n \stackrel{(c)}{<} \infty,$$

dove (a) è la disuguaglianza sopra, (b) si ottiene dal calcolo di $\mathbb{E}(Y_n^\gamma)$ con $\gamma = 1/2$, e (c) deriva dal fatto che una serie geometrica di ragione minore di uno è convergente.

(c) Poiché la serie sopra è convergente per ogni $\varepsilon > 0$, si ha che $\mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$. In quanto $Y_n \geq 0$ quasi certamente si ha che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Y_n - 0| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

in altre parole Y_n converge a 0 in probabilità. Di conseguenza Y_n converge a 0 in legge. Utilizzando la formula per $\mathbb{E}(Y_n^\gamma)$ con $\gamma = 1$ e il fatto che $Y_n \geq 0$ quasi certamente, abbiamo che

$$\mathbb{E}(|Y_n - 0|) = \mathbb{E}(Y_n) = 1 \quad \forall n,$$

per cui Y_n non converge a 0 in L^1 . Di conseguenza Y_n non converge a 0 nemmeno in L^2 .

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nrb(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$U([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$