

Esame di Calcolo delle Probabilità

(2 ore e 30 minuti)

Si prega di scrivere in maniera chiara, risposte non leggibili non saranno corrette. In tutti gli esercizi si richiede di illustrare il proprio lavoro.

Esercizio 1 (15 punti). *Livio ed Alessandra partecipano al seguente gioco. Esaminano il primi due numeri estratti sulla ruota di Venezia (VE) del Lotto (due numeri distinti, scelti uniformemente tra 1 e 90):*

- *se entrambi i numeri sono pari, vince Livio e il gioco si conclude;*
- *se uno dei numeri è pari e l'altro dispari, vince Alessandra e il gioco si conclude.*

Se invece entrambi i numeri sono dispari, Livio e Alessandra aspettano l'estrazione successiva della ruota di VE e applicano le stesse regole per decidere se vince l'uno o l'altra (e il gioco si conclude) oppure se il gioco prosegue con l'estrazione successiva; e così via.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo gli eventi

- $B_n =$ “*i primi due numeri dell' n -esima estrazione della ruota di VE sono entrambi pari*”;
- $C_n =$ “*i primi due numeri dell' n -esima estrazione della ruota di VE sono entrambi dispari*”;
- $D_n =$ “*i primi due numeri dell' n -esima estrazione della ruota di VE sono uno pari e uno dispari*”.

*Sia T la variabile aleatoria (a valori in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) che indica la durata del gioco, cioè $\{T = n\}$ è l'evento “*il gioco si conclude all' n -esima estrazione della ruota di VE*”. Sia infine*

$A =$ “*il gioco si conclude con la vittoria di Alessandra*”.

- (a) *Si calcolino le probabilità $\beta = \mathbb{P}(B_n)$, $\gamma = \mathbb{P}(C_n)$, e $\delta = \mathbb{P}(D_n)$. Si osservi che non dipendono da $n \in \mathbb{N}$;*
- (b) *per $n \in \mathbb{N}$ si esprima l'evento $\{T = n\}$ in funzione (di alcuni) degli eventi $\{B_k, C_k, D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (mediante unioni, intersezioni, ecc.). Si identifichi la legge di T . Qual è la probabilità che il gioco finisca in un numero finito di turni, i.e., quanto vale $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N})$?*
- (c) *Si mostri che la probabilità che il gioco si concluda al turno n con la vittoria di Alessandra è pari a $\gamma^{n-1}\delta$. Si deduca la probabilità che il gioco si concluda con la vittoria di Alessandra¹. Si descriva un algoritmo in R per verificare questo risultato empiricamente.*

¹Suggerimento: Si ricordi che se $|x| < 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Soluzione. (a) Dato che le estrazioni sono indipendenti

$$\beta = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1), \quad \gamma = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(C_1), \quad e \quad \delta = \mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(D_1).$$

Iniziamo da β . Possiamo utilizzare l'ipergeometrica in cui nell'urna ci sono 90 palline di cui 45 rosse (corrispondenti ai numeri pari) e 45 bianche (corrispondenti ai numeri dispari), da quest'urna estraiamo due palline e vogliamo calcolare la probabilità che siano entrambe rosse

$$\beta = \mathbb{P}(B_1) \frac{\binom{45}{2} \cdot \binom{45}{0}}{\binom{90}{2}} = \frac{22}{89}.$$

Similmente

$$\gamma = \mathbb{P}(C_1) \frac{\binom{45}{0} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{90}{2}} = \frac{22}{89} \quad e \quad \delta = \mathbb{P}(D_1) \frac{\binom{45}{1} \cdot \binom{45}{1}}{\binom{90}{2}} = \frac{45}{89}.$$

(b) L'evento $\{T = n\}$ si verifica se le prime $n - 1$ estrazioni hanno dato un numero pari e uno dispari e l'estrazione n ha dato o due numeri pari o due numeri dispari da cui

$$\{T = n\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} C_k\right) \cap (B_n \cup D_n) = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} C_k\right) \cap C_n^C.$$

Quindi dall'indipendenza degli eventi otteniamo che

$$\mathbb{P}(T = n) = \gamma^{n-1}(1 - \gamma),$$

per cui T è una geometrica modificata di parametro $(1 - \gamma)$.

Infine

$$\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{n-1}(1 - \gamma) = (1 - \gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma} = 1,$$

cioè quasi certamente il gioco terminerà in un numero finito di turni.

(c) L'evento "Alessandra vince all' n -esimo turno" può essere scritto come

$$A \cap \{T = n\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} C_k\right) \cap D_n,$$

per cui

$$\mathbb{P}(A \cap \{T = n\}) = \gamma^{n-1}\delta.$$

Si ha che

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{T = n\}),$$

poiché l'unione è disgiunta abbiamo che

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap \{T = n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{n-1}\delta = \delta \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{\delta}{1 - \gamma} = \frac{45/89}{1 - 22/89} = 45/67.$$

Possiamo verificare questo risultato tramite il teorema dei grandi numeri e il software R con il seguente codice

```

1 n=1000000;
2 s=0;
3 for(i in c(1:n)){
4   estratti=c(1,1)
5   while(estratti[1]%%2==1 && estratti[2]%%2==1){
6     estratti=sample(c(1:90),2,replace=FALSE)
7     if ((estratti[1]%%2==1 && estratti[2]%%2==0) || (estratti[1]%%
8       2==0 && estratti[2]%%2==1)){
9       s=s+1;
10    }
11  }
12 p_empirica=s/n

```

dove l'operatore $a\%b$ restituisce il resto della divisione intera di a per b .

Esercizio 2 (10 punti). Siano $\{X_n\}$ variabili aleatorie indipendenti definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, con leggi marginali $X_n \sim \text{Esp}(\lambda_n)$ dove $\lambda_n = 3 + \frac{1}{n} + (-1)^n$.

- (a) Si determinino due sottosuccessioni $\{X_{n_k}\}$ e $\{X_{m_k}\}$ che convergano in legge per $k \rightarrow \infty$ verso due variabili aleatorie con leggi distinte;
- (b) L'intera successione $\{X_n\}$ ammette limite in legge?

Soluzione. (a) Scegliamo $n_k = 2k$ e $m_k = 2k + 1$ per $k = 1, 2, \dots$. Abbiamo quindi che $X_{n_k} \sim \text{Esp}(4 + \frac{1}{n})$ e $X_{m_k} \sim \text{Esp}(2 + \frac{1}{n})$.

Consideriamo la funzione di ripartizione di X_{n_k}

$$F_{n_k}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-(4+\frac{1}{n})t} & t \geq 0, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-(4+\frac{1}{n})t} & t \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-4t} & t \geq 0, \end{cases}$$

cioè $X_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ con $Y \sim \text{Esp}(4)$.

Consideriamo ora la funzione di ripartizione di X_{m_k}

$$F_{m_k}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-(2+\frac{1}{n})t} & t \geq 0, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-(2+\frac{1}{n})t} & t \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-2t} & t \geq 0, \end{cases}$$

cioè $X_{m_k} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ con $Z \sim \text{Esp}(2)$.

- (b) $\{X_n\}$ non ammette limite in legge in quanto se avessimo $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$ per $n \rightarrow \infty$ ogni sua sottosuccessione dovrebbe convergere in legge a W , ma nel punto precedente abbiamo trovato due sottosuccessioni che convergono a due limiti differenti.

Esercizio 3 (15 punti). Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = 3x^2 1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 3x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Si consideri la variabile aleatoria

$$A = -\log(X).$$

- (a) Si calcoli la funzione di ripartizione della variabile aleatoria A e se ne identifichi la legge;
 (b) Consideriamo la seguente equazione di secondo grado per l'incognita x , con coefficienti determinati dalla variabile aleatoria A :

$$x^2 + 3Ax + 2A^2 + 4 = 0.$$

Qual è la probabilità che l'equazione non ammetta soluzioni reali?

Soluzione. (a)

$$F_A(t) = \mathbb{P}(A \leq t) = \mathbb{P}(-\log(X) \leq t) = \mathbb{P}(\log(X) \geq -t) = \mathbb{P}(X \geq e^{-t}).$$

Osserviamo che, se $t \geq 0$, allora $e^{-t} \leq 1$ e che, se $t < 0$, allora $e^{-t} > 1$. Per cui, per $t \geq 0$ abbiamo

$$F_A(t) = \int_{e^{-t}}^{\infty} 3x^2 1_{[0,1]}(x) = \int_{e^{-t}}^1 3x^2(x) = x^3 \Big|_{e^{-t}}^1 = 1 - e^{-3t}.$$

Se $t < 0$ allora $F_A(t) = 0$. Riassumendo

$$F_A(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-3t} & t \geq 0, \end{cases}$$

cioè $A \sim \text{Esp}(3)$.

- (b) L'equazione considerata non ammette soluzioni reali se e solo se

$$(3A)^2 - 4(2A^2 + 4) < 0,$$

cioè se

$$A^2 < 16.$$

Poiché $A \geq 0$ quasi certamente abbiamo che

$$A^2 < 16 \Leftrightarrow A < 4.$$

Per qui

$$\mathbb{P}((3A)^2 - 4(2A^2 + 4) < 0) = \mathbb{P}(A < 4) = \mathbb{P}(A \leq 4) = F_A(4) = 1 - e^{-12}.$$

Esercizio 4 (10 punti). Siano X e Y due variabili aleatorie reali, definite sullo stesso spazio di probabilità. Assumiamo che la variabile aleatoria (X, Y) sia assolutamente continua con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-x-y}1_A(x, y),$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$.

(a) Si determinino le densità marginali di X e Y ;

(b) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

Soluzione. (a) Ricordiamo che, detta $f_Y(y)$ la densità marginale di Y si ha che

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

e similmente

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

con $f_X(x)$ la densità marginale per X .

Iniziamo a calcolare $f_Y(y)$. Se $y \leq 0$ si ha che $A = \emptyset$ quindi $f_Y(y) = 0$. Se invece $y > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-x-y}1_A(x, y) dx \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_0^y 2e^{-x-y} dx \\ &= 2e^{-y}[-e^{-x}]_0^y \\ &= 2e^{-y}(1 - e^{-y}), \end{aligned}$$

dove (a) segue dal fatto che per y fissato x può variare fra 0 e y .

Passiamo a $f_X(x)$. Se $x \leq 0$ si ha che $A = \emptyset$ quindi $f_X(x) = 0$. Se invece $x > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-x-y}1_A(x, y) dy \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_x^{\infty} 2e^{-x-y} dy \\ &= 2e^{-x}[-e^{-y}]_x^{\infty} = 2e^{-x}(e^{-x}) = 2e^{-2x}, \end{aligned}$$

dove (b) segue dal fatto che per x fissato y può variare fra x e ∞ . Osserviamo che $X \sim \text{Esp}(2)$.

(b) Poiché $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ si ha che X e Y non sono indipendenti.

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.
F. di rip.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$U([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$