

CAMPI VETTORIALI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Campi vettoriali in \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$): linee di campo, interpretazione fisica. Divergenza, rotore, laplaciano. Campi conservativi, solenoidali, irrotazionali. Integrali curvilinei del secondo tipo, circuitazione. Integrali superficiali del secondo tipo, flusso. Domini semplicemente connessi. Forme differenziali. Teoremi di Gauß-Green, della divergenza, di Stokes. Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

INDICE

| | |
|---|----|
| 1. Campi vettoriali e operatori differenziali | 1 |
| 2. Integrali curvilinei del secondo tipo | 5 |
| 3. Integrali superficiali del secondo tipo | 18 |
| 4. Forme differenziali | 29 |
| Riferimenti bibliografici | 33 |

Versione del 26 dicembre 2020

1. CAMPI VETTORIALI E OPERATORI DIFFERENZIALI

La Forza (...) è un campo energetico creato da tutte le cose viventi.

OBI WAN KENOBI

Un *campo vettoriale* è una funzione $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ definita in un dominio aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). Si tratta di un caso particolare di funzione vettoriale in cui il numero delle variabili indipendenti equivale a quello delle funzioni componenti:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$

(ved. [3], [4]). La funzione \mathbf{F} è dunque differenziabile, e la sua matrice jacobiana è quadrata:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 F_1(\mathbf{x}) & D_2 F_1(\mathbf{x}) & \dots & D_n F_1(\mathbf{x}) \\ D_1 F_2(\mathbf{x}) & D_2 F_2(\mathbf{x}) & \dots & D_n F_2(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 F_n(\mathbf{x}) & D_2 F_n(\mathbf{x}) & \dots & D_n F_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Al campo \mathbf{F} sono associate delle curve (ved. [6]) dette *linee di campo*:

Definizione 1.1. Siano $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo, $\mathbf{x}_0 \in A$. Una curva regolare $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ di parametrizzazione $\mathbf{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ è detta *linea di campo passante per \mathbf{x}_0* se

- (i) esiste $t_0 \in I$ t.c. $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}_0$;
- (ii) per ogni $t \in I$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ è tangente a γ in $\mathbf{r}(t)$.

La Definizione 1.1 indica un procedimento per trovare le linee associate a un campo \mathbf{F} : fissato $\mathbf{x}_0 \in A$, sia $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ la linea di campo passante per \mathbf{x}_0 , allora esiste una funzione $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. \mathbf{r} è

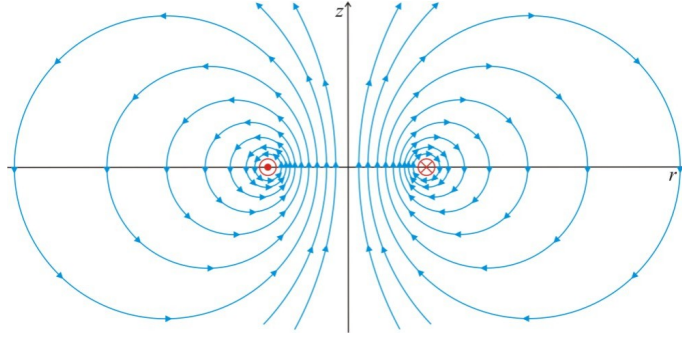


FIGURA 1.

una soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \mathbf{r}' = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}) & \text{in } I \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Per il Teorema di unicit  (ved. [2]), se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in A$, per ogni \mathbf{x}_0 passa esattamente una linea di campo.

Osservazione 1.2. L'idea di 'campo' proviene da quella, fondamentale in Fisica, di *campo di forze*: una sorgente Q (massa, carica, corrente elettrica...) collocata nello spazio 'attiva' lo spazio stesso generando in ogni punto P un vettore \mathbf{v}_P (campo gravitazionale, elettrico, magnetico...); appena in P compare una grandezza q dello stesso tipo della sorgente, il campo si manifesta producendo una forza $q\mathbf{v}_P$ applicata in P , che sposta q lungo la linea di campo passante per P (fig. 1).

Definizione 1.3. Un campo $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$   detto *conservativo* se esiste una funzione $\Phi \in C^2(A)$ t.c. $\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

La funzione Φ   detta *potenziale*. Se A   connesso e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$   un campo conservativo, il potenziale Φ   unico a meno di una costante additiva. Inoltre, se $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ si ha per ogni $\mathbf{x} \in A$

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = H_{\Phi}(x),$$

pertanto la matrice $J_{\mathbf{F}}$   simmetrica per il Teorema di Schwarz (ved. [4]).

Esempio 1.4. Il *campo gravitazionale* $\mathbf{F} : (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, generato da una massa unitaria posta in $(0,0,0)$,   definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3},$$

dove abbiamo posto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Si tratta di un campo conservativo, il cui potenziale   (a meno di una costante) definito da

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\rho}.$$

La matrice jacobiana (simmetrica) di \mathbf{F}  

$$J_{\mathbf{F}}(x, y, z) = \frac{1}{\rho^5} \begin{bmatrix} 2x^2 - y^2 - z^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 2y^2 - x^2 - z^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 2z^2 - x^2 - y^2 \end{bmatrix}.$$

Le linee di campo di \mathbf{F} sono semirette dirette verso $(0,0,0)$, come si vede direttamente dalla Definizione 1.1.

Esempio 1.5. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

La matrice jacobiana

$$J_{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

non è simmetrica, quindi \mathbf{F} non è conservativo. Dato $P_0 = (x_0, y_0)$, la linea di campo γ passante per P_0 ha parametrizzazione $\mathbf{r} = (x, y)$ t.c.

$$\begin{cases} x' = -\lambda(t)y \\ y' = \lambda(t)x \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

per una opportuna funzione $\lambda \in C(I)$. Operando algebricamente sulle equazioni differenziali, vediamo che per ogni $t \in I$

$$\begin{aligned} D[x(t)^2 + y(t)^2] &= 2x(t)Dx(t) + 2y(t)Dy(t) \\ &= -\lambda(t)x(t)y(t) + \lambda(t)x(t)y(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dunque γ è una circonferenza di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = \rho_0^2,$$

dove abbiamo posto $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Introduciamo ora alcuni *operatori differenziali* che agiscono su campi e funzioni scalari: sia $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$, allora la *divergenza* di \mathbf{F} è la funzione definita da¹

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \begin{cases} D_x F_1 + D_y F_2 & \text{se } n = 2 \\ D_x F_1 + D_y F_2 + D_z F_3 & \text{se } n = 3. \end{cases}$$

Inoltre, se $n = 3$, il *rotore* di \mathbf{F} è il campo vettoriale definito da

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (D_y F_3 - D_z F_2)\mathbf{i} + (D_z F_1 - D_x F_3)\mathbf{j} + (D_x F_2 - D_y F_1)\mathbf{k}.$$

Una notazione alternativa per questi operatori è stabilita usando il *vettore simbolico* $\nabla = (D_x, D_y, D_z)$ ($\nabla = (D_x, D_y)$ se $n = 2$) e ponendo

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Introduciamo anche un operatore differenziale del secondo ordine detto *laplaciano*, che associa a una funzione $\Phi \in C^2(A)$ la funzione continua

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \nabla \Phi = D_{xx}^2 \Phi + D_{yy}^2 \Phi + D_{zz}^2 \Phi$$

(il terzo addendo non compare se $n = 2$).

Definizione 1.6. Un campo $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) è detto

- (i) *solenoidale* se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ in A ;
- (ii) *irrotazionale* se $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in A .

Una funzione $\Phi \in C^2(A)$ è detta *armonica* se $\Delta \Phi = 0$ in A .

¹In queste pagine ometteremo spesso le variabili indipendenti, per semplicità di scrittura.

Il campo dell'Esempio 1.4 è solenoidale e irrotazionale, come si vede facilmente. Quello dell'Esempio 1.5 è solenoidale (la nozione di campo irrotazionale non si applica poiché il campo è definito in \mathbb{R}^2). Le nozioni introdotte finora sono legate dalle seguenti relazioni:

Lemma 1.7. *Sia $\mathbf{F} \in C^2(A, \mathbb{R}^3)$ un campo. Allora per ogni $\mathbf{x} \in A$*

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0.$$

Dimostrazione. Per il Teorema di Schwarz si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= D_x(D_y F_3 - D_z F_2) + D_y(D_z F_1 - D_x F_3) + D_z(D_x F_2 - D_y F_1) \\ &= D_{xy}^2 F_3 - D_{xz}^2 F_2 + D_{yz}^2 F_1 - D_{xy}^2 F_3 + D_{xz}^2 F_2 - D_{yz}^2 F_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Lemma 1.8. *Sia $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo conservativo. Allora \mathbf{F} è irrotazionale.*

Dimostrazione. Sia $\Phi \in C^2(A)$ un potenziale per \mathbf{F} . Per il Teorema di Schwarz si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \operatorname{rot} \nabla \Phi \\ &= (D_{yz}^2 \Phi - D_{zy}^2 \Phi) \mathbf{i} + (D_{zx}^2 \Phi - D_{xz}^2 \Phi) \mathbf{j} + (D_{xy}^2 \Phi - D_{yx}^2 \Phi) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dunque \mathbf{F} è irrotazionale. \square

L'implicazione del Lemma 1.8 non si inverte:

Esempio 1.9. Il campo magnetico $\mathbf{F} : (\mathbb{R}^3 \setminus \vec{z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, generato da una corrente elettrica uniforme lungo l'asse \vec{z} , è definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}}{\rho^2},$$

dove abbiamo posto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. La matrice jacobiana (simmetrica) di \mathbf{F} è

$$J_{\mathbf{F}}(x, y, z) = \frac{1}{\rho^4} \begin{bmatrix} 2xy & y^2 - x^2 & 0 \\ y^2 - x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La linea di campo γ passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ha una parametrizzazione $\mathbf{r} = (x, y, z)$ soddisfacente

$$\begin{cases} x' = -\frac{\lambda(t)y}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{\lambda(t)x}{x^2 + y^2} \\ z' = 0, \end{cases}$$

da cui deduciamo che $z(t) = z_0$, e (ragionando come nell'Esempio 1.5) che $t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$ è costante. Ricaviamo dunque facilmente l'equazione cartesiana di γ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho_0^2 \\ z = z_0, \end{cases}$$

cioè γ è una circonferenza sul piano normale a \vec{z} , con centro $(0, 0, z_0)$ e raggio $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Si verifica facilmente che \mathbf{F} è solenoidale e irrotazionale. D'altra parte \mathbf{F} non è conservativo (ved. Osservazione 2.4).

Per invertire l'implicazione del Lemma 1.8 occorre aggiungere un'ipotesi di tipo topologico, richiamando la nozione di insieme *semplicemente connesso* (ved. [3]):

Teorema 1.10. *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un aperto semplicemente connesso, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo:*

- (i) *se $n = 2$ e $D_x F_2 - D_y F_1 = 0$ in A , allora \mathbf{F} è conservativo;*
- (ii) *se $n = 3$ e $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in A , allora \mathbf{F} è conservativo.*

La dimostrazione del Teorema 1.10 è rimandata alle Sezioni 2 e 3. Nell'Esempio 1.9 il campo è irrotazionale ma non conservativo, definito su un dominio non semplicemente connesso.

Esercizio 1.11. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x+y}{2} \mathbf{i} + \frac{y-x}{2} \mathbf{j}.$$

Scrivere la matrice $J_{\mathbf{F}}$. Osservandola, stabilire se \mathbf{F} è conservativo.

Esercizio 1.12. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = -2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}.$$

Quali sono le linee di campo di \mathbf{F} ?

Esercizio 1.13. Dimostrare che il campo dell'Esempio 1.4 è solenoidale.

Esercizio 1.14. Dimostrare l'identità differenziale

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) = \Phi \Delta \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi,$$

dove $\Phi, \Psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 1.15. Sia $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ una funzione armonica: dimostrare che il campo $\nabla \Phi$ è solenoidale.

Esercizio 1.16. Dimostrare che il campo \mathbf{F} dell'Esempio 1.9 è solenoidale e irrotazionale.

Esercizio 1.17. Dire se i seguenti insiemi sono semplicemente connessi:

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (3 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

2. INTEGRALI CURVILINEI DEL SECONDO TIPO

Introduciamo gli *integrali curvilinei del secondo tipo*:

Definizione 2.1. *Siano $\gamma = (\mathbf{r}, S)$, $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) una curva regolare a tratti, $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto t.c. $S \subset A$, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. L'integrale di \mathbf{F} lungo γ è*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot D\mathbf{r}(t) dt.$$

Se γ è una curva chiusa, l'integrale è detto *circuitazione*. L'integrale è invariante rispetto a parametrizzazioni equivalenti di γ . Dal punto di vista fisico, la Definizione 2.1 rappresenta il *lavoro* compiuto da una forza \mathbf{F} durante il moto del suo punto di applicazione lungo γ . Le differenze principali rispetto all'integrale curvilineo del primo tipo (ved. [6]) sono due:

- la funzione integranda è vettoriale;
- l'integrale dipende dall'orientamento della curva, ovvero, definita la curva $\gamma^- = (\mathbf{r}^-, S)$ che ha lo stesso sostegno di γ ma verso opposto, si ha

$$\int_{\gamma^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^- = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

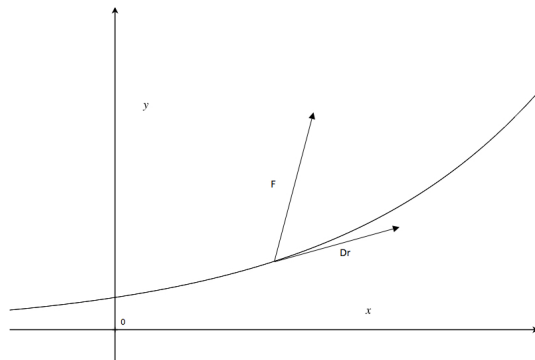


FIGURA 2.

Osserviamo che la funzione integranda nella Definizione 2.1 rappresenta, per ogni punto $\mathbf{r}(t)$ di γ , la componente di $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ tangente a γ (fig. 2).

Esempio 2.2. Calcoliamo l'integrale del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = (y + x)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$$

lungo l'arco di parabola γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (2t^3 - t^2 + t) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Usando la parametrizzazione equivalente

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

si perviene allo stesso risultato.

Mediante gli integrali si può dare una caratterizzazione dei campi conservativi:

Teorema 2.3. Sia $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) \mathbf{F} è conservativo;
- (ii) se $\gamma_1 = (\mathbf{r}_1, S_1)$, $\gamma_2 = (\mathbf{r}_2, S_2)$ sono curve regolari a tratti di parametrizzazioni $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(c)$, $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(d)$, e sostegni $S_1, S_2 \subset A$, allora

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2;$$

- (iii) se $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ è una curva regolare a tratti chiusa di sostegno $S \subset A$, allora

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

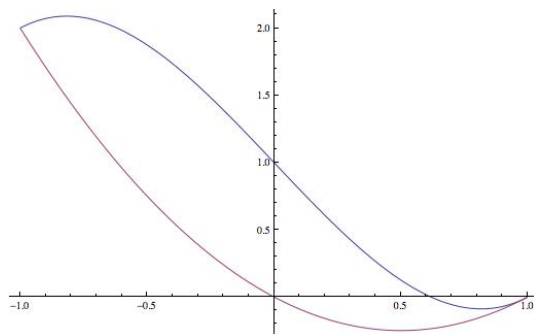


FIGURA 3.

Dimostrazione. Dimostriamo che (i) implica (ii). Sia $\Phi \in C^2(A)$ un potenziale di \mathbf{F} e definiamo due funzioni $h_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$h_i(t) = \Phi(\mathbf{r}_i(t)) \quad (i = 1, 2),$$

così che h_i è derivabile e si ha (ved. [4])

$$Dh_i(t) = \nabla\Phi(\mathbf{r}_i(t)) \cdot D\mathbf{r}_i(t).$$

Dunque, poiché $\nabla\Phi = \mathbf{F}$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot D\mathbf{r}_1(t) dt \\ &= \int_a^b Dh_1(t) dt \\ &= h_1(b) - h_1(a) \\ &= \Phi(\mathbf{r}_1(b)) - \Phi(\mathbf{r}_1(a)). \end{aligned}$$

Similmente si ricava

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = \Phi(\mathbf{r}_2(d)) - \Phi(\mathbf{r}_2(c)),$$

e per ipotesi i due integrali sono uguali.

Dimostriamo che (ii) implica (i), supponendo per semplicità $n = 2$ e A connesso (quindi connesso per archi, come visto in [3]). Fissiamo $P_0 = (x_0, y_0) \in A$, quindi definiamo $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ come segue: per ogni $P = (x, y) \in A$ esiste una curva regolare a tratti $\gamma = (\mathbf{r}, S)$, $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c. $\mathbf{r}(0) = P_0$, $\mathbf{r}(1) = P$, e $S \subset A$, quindi sia

$$\Phi(x, y) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

La funzione Φ è ben definita per (ii). Inoltre, per ogni $(x, y) \in A$ esiste $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(x, y) \subset A$, e per ogni $h \in]0, \delta[$

$$\frac{\Phi(x+h, y) - \Phi(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h F_1(x+t, y) dt.$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$ si ha $D_x\Phi(x, y) = F_1(x, y)$. Similmente si dimostra che $D_y\Phi(x, y) = F_2(x, y)$, dunque Φ è un potenziale per \mathbf{F} che pertanto risulta conservativo.

Dimostriamo che (ii) implica (iii). Sia $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la parametrizzazione di γ , t.c. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Fissiamo $c \in]a, b[$, quindi poniamo $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(t)$ per ogni $t \in [a, c]$ e $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(b + c - t)$ per ogni

$t \in [c, b]$, così che $\gamma_i = (\mathbf{r}_i, S_i)$ ($i = 1, 2$) sono due curve con sostegni in A , t.c. $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(c)$ e $\mathbf{r}_1(c) = \mathbf{r}_2(b)$ e γ è il concatenamento di γ_1 e γ_2^- . Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2^- \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo che (iii) implica (ii). Si procede come sopra (fig. 3). \square

Il Teorema 2.3 afferma che un campo \mathbf{F} è conservativo se, e solo se, il suo integrale su una curva γ dipende solo dagli estremi di γ (interpretando tale integrale come il lavoro di una forza, questa affermazione corrisponde alla definizione fisica di 'forza conservativa'). Esso fornisce anche una formula per il calcolo di tale integrale, analoga al Teorema fondamentale del calcolo integrale (ved. [1]): sia Φ un potenziale del campo conservativo $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sia γ una curva regolare (a tratti) con supporto contenuto in A

$$(2.1) \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)).$$

In particolare, se A è connesso, per ogni coppia di punti $P, Q \in A$ esiste una curva γ con sostegno in A che li congiunge, e per (2.1) si ha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(Q) - \Phi(P)$$

(il valore non dipende dalla scelta del potenziale, in quanto due potenziali di \mathbf{F} differiscono per una costante).

Osservazione 2.4. Le condizioni (ii), (iii) del Teorema 2.3 sono equivalenti a (i) solo se valgono per *ogni* curva o coppia di curve con sostegno in A . Per esempio, per verificare che il campo $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ (definito nell'Esempio 1.5) *non* è conservativo, basta osservare che la sua circuitazione lungo la circonferenza γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

non è 0:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) dt = 2\pi.$$

Ragionando all'inverso, possiamo affermare che la circuitazione del campo \mathbf{F} definito nell'Esempio 1.4 lungo l'ellisse γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 0 \\ z = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

è 0 (senza calcolarla), poiché \mathbf{F} è conservativo.

Esempio 2.5. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$$

e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = y \ln(1 + xy)\mathbf{i} + x \ln(1 + xy)\mathbf{j}.$$

Calcoliamo l'integrale di \mathbf{F} lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

Il calcolo diretto fornisce

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (e^t \ln(1 + te^t) + te^t \ln(1 + te^t)) dt \\ &= \int_1^{1+e} \ln(s) ds \\ &= [s \ln(s) - s]_1^{1+e} \\ &= (1 + e) \ln(1 + e) - e, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la sostituzione $s = 1 + te^t$. In alternativa, procediamo come segue: prima osserviamo che

$$D_x F_2(x, y) - D_y F_1(x, y) = \left(\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right) - \left(\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right) = 0,$$

e che A è semplicemente connesso. Per il Teorema 1.10 (i), \mathbf{F} è conservativo. Quindi determiniamo un potenziale di \mathbf{F} , $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$D_x \Phi = y \ln(1 + xy), \quad D_y \Phi = x \ln(1 + xy).$$

Dall'identità precedente ricaviamo che esiste una funzione $\Psi = \Psi(y)$ t.c.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int y \ln(1 + xy) dx \\ &= (1 + xy)(\ln(1 + xy) - 1) + \Psi(y), \end{aligned}$$

dalla seconda che

$$\begin{aligned} x \ln(1 + xy) &= D_y [(1 + xy)(\ln(1 + xy) - 1) + \Psi(y)] \\ &= x(\ln(1 + xy) - 1) + (1 + xy) \frac{x}{1 + xy} + D\Psi(y) \\ &= x \ln(1 + xy) + D\Psi(y), \end{aligned}$$

cioè Ψ è costante. Abbiamo dunque

$$\Phi(x, y) = (1 + xy)(\ln(1 + xy) - 1) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A questo punto basta applicare (2.1):

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, e) - \Phi(0, 1) = (1 + e) \ln(1 + e) - e$$

(osserviamo che il risultato non dipende da c).

Un'altra conseguenza importante del Teorema 2.3 è il seguente *metodo della spezzata* per determinare un potenziale per un campo \mathbf{F} conservativo. Supponiamo, per semplicità, che $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e fissiamo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Poniamo dunque

$$(2.2) \quad \Phi(x, y) = \int_0^x F_1(t, 0) dt + \int_0^y F_2(x, s) ds,$$

integrando sulla spezzata di vertici $(0, 0)$, $(x, 0)$ e (x, y) . La funzione $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è un potenziale per \mathbf{F} , come si vede facilmente (ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.3.) Il metodo si estende, con opportuni accorgimenti, a domini più complessi e al caso $n = 3$.

Esempio 2.6. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \cos(x) \cos(y) \mathbf{i} - \sin(x) \sin(y) \mathbf{j}.$$

Osserviamo che

$$D_x F_2(x, y) - D_y F_1(x, y) = 0,$$

dunque \mathbf{F} è conservativo (Teorema 1.10 (i)). Determiniamo un potenziale per \mathbf{F} applicando (2.2):

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_0^x \cos(t) dt - \int_0^y \sin(x) \sin(s) ds \\ &= [\sin(t)]_0^x - [-\sin(x) \cos(s)]_0^y \\ &= \sin(x) \cos(y). \end{aligned}$$

Se un campo \mathbf{F} è conservativo, il suo integrale lungo una curva γ può essere sostituito con quello lungo un'altra curva γ' avente gli stessi estremi:

Esempio 2.7. Calcoliamo l'integrale del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y) \mathbf{i} + (x + z) \mathbf{j} + (y - z) \mathbf{k},$$

lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \cos(t) \\ y = t \sin(t) \\ z = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il calcolo diretto è proibitivo. Osserviamo invece che \mathbf{F} è irrotazionale:

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x + y & x + z & y - z \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

dunque \mathbf{F} è conservativo (Teorema 1.10). D'altra parte, la curva γ' di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ha gli stessi estremi di γ . Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\gamma'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \int_0^{2\pi} (t - 2t^3) dt \\ &= 2\pi^2 - 8\pi^4. \end{aligned}$$

Esempio 2.8. Calcoliamo l'integrale del campo $\mathbf{F} : (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \mathbf{j},$$

lungo la semi-circonferenza γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

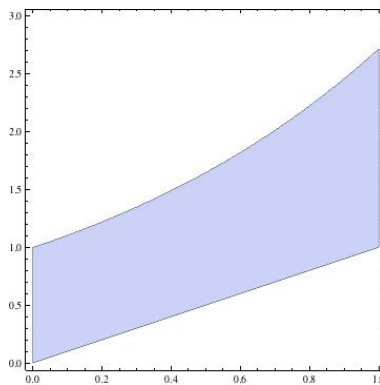


FIGURA 4.

Si ha

$$D_x F_2(x, y) - D_y F_1(x, y) = \frac{2x^2y - 4xy}{(x^2 + y^2)^2} \neq 0,$$

dunque \mathbf{F} non è conservativo. Non vi è quindi alternativa al calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} (-\cos(t)^2 \sin(t) + 2 \cos(t) \sin(t)) dt \\ &= \left[\frac{\cos(t)^3}{3} + \sin(t)^2 \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Introduciamo ora i *Teoremi di Gauß-Green*, che collegano gli integrali curvilinei del secondo tipo, in dimensione $n = 2$, agli integrali doppi (ved. [5]). In questi risultati assumeremo sempre che le curve chiuse abbiano l'orientamento positivo, da cui il simbolo ∂^+ (ved. [6]). Inoltre adotteremo per gli integrali curvilinei la seguente notazione:

$$\int_{\partial^+ D} F dx = \int_{\partial^+ D} (F, 0) \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_{\partial^+ D} F dy = \int_{\partial^+ D} (0, F) \cdot d\mathbf{r}.$$

Lemma 2.9. (Gauß-Green/1) *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto a \vec{x} t.c. la sua frontiera ∂D sia il sostegno di una curva regolare a tratti, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto t.c. $D \subset A$, $F \in C^1(A)$. Allora*

$$\iint_D D_y F(x, y) dx dy = - \int_{\partial^+ D} F dx.$$

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che esistano un intervallo $a, b \in \mathbb{R}$, $g_1, g_2 \in C^1([a, b])$ t.c. $g_1(x) < g_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Per le formule di riduzione viste in [5] si ha

$$\begin{aligned} \iint_D D_y F(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} D_y F(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b (F(x, g_2(x)) - F(x, g_1(x))) dx. \end{aligned}$$

D'altra parte, la curva $\partial^+ D$ si ottiene come concatenamento delle curve $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ (fig. 4) di parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = g_1(t) \end{cases}, t \in [a, b], \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}, t \in [g_1(b), g_2(b)],$$

$$\begin{cases} x = a + b - t \\ y = g_2(a + b - t) \end{cases}, t \in [a, b], \begin{cases} x = a \\ y = g_1(a) + g_2(a) - t \end{cases}, t \in [g_1(a), g_2(a)].$$

Integriamo il campo $F\mathbf{i}$ lungo $\partial^+ D$: gli integrali lungo i segmenti verticali γ_2, γ_4 sono entrambi 0, quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} F dx &= \int_{\gamma_1} F dx + \int_{\gamma_3} F dx \\ &= \int_a^b F(t, g_1(t)) dt + \int_a^b F(a + b - t, g_2(a + b - t))(-1) dt \\ &= - \int_a^b (F(t, g_2(t)) - F(t, g_1(t))) dt. \end{aligned}$$

Confrontando i due risultati si conclude. \square

Similmente si prova:

Lemma 2.10. (Gauß-Green/2) *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto a \vec{y} t.c. la sua frontiera ∂D sia il sostegno di una curva regolare a tratti, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto t.c. $D \subset A$, $F \in C^1(A)$. Allora*

$$\iint_D D_x F(x, y) dx dy = \int_{\partial^+ D} F dy.$$

Infine, dai Lemmi 2.9, 2.10 segue:

Teorema 2.11. (Gauß-Green/3) *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto a \vec{x} e a \vec{y} t.c. la sua frontiera ∂D sia il sostegno di una curva regolare a tratti, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto t.c. $D \subset A$, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale. Allora*

$$\iint_D (D_x F_2(x, y) - D_y F_1(x, y)) dx dy = \int_{\partial^+ D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Nel Teorema 2.11, il secondo membro esprime l'integrale curvilineo (del secondo tipo) del campo \mathbf{F} lungo $\partial^+ D$ dotata della parametrizzazione $\mathbf{r} = (x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ concorde con l'orientamento positivo, ovvero

$$\int_{\partial^+ D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (F_1(x(t), y(t))Dx(t) + F_2(x(t), y(t))Dy(t)) dt.$$

Osserviamo che, se \mathbf{F} è conservativo, entrambi gli integrali si annullano. Mediante i Teoremi di Gauß-Green possiamo trasformare integrali curvilinei in integrali doppi, e viceversa.

Esempio 2.12. Siano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x + y)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}.$$

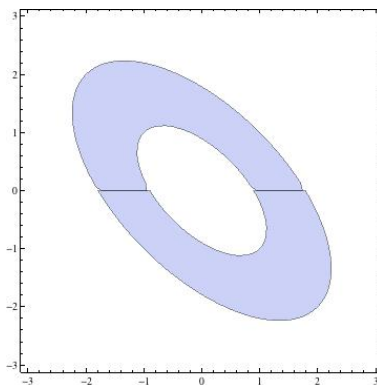


FIGURA 5.

L'integrale di \mathbf{F} lungo la circonferenza $\partial^+ D$ si può calcolare direttamente:

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} ((e^x + y) dx + 2x dy) &= \int_0^{2\pi} ((e^{\cos(t)} + \sin(t))(-\sin(t)) + (2 \cos(t)) \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos(t)} \sin(t) + 3 \cos(t)^2 - 1) dt \\ &= \left[e^{\cos(t)} + \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Ma è più semplice calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (2 - 1) dx dy = \pi,$$

che coincide con quello richiesto grazie al Teorema 2.11:

Il Teorema 2.11 si estende a domini regolari non normali mediante opportune decomposizioni. Riportiamo qui un caso abbastanza semplice, relativo a un dominio con un 'buco', la cui frontiera è l'unione di due curve di Jordan (ved. [6]):

Corollario 2.13. *Siano γ_1, γ_2 curve regolari, semplici, chiuse, orientate positivamente, t.c. il sostegno di γ_2 è interno a γ_1 , sia $D \subset \mathbb{R}^2$ l'intersezione del dominio interno di γ_1 con quello esterno di γ_2 . Siano inoltre $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto t.c. $D \subset A$ e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale. Allora*

$$\iint_D (D_x F_2(x, y) - D_y F_1(x, y)) dx dy = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2.$$

Dimostrazione. Si procede graficamente (fig. 5), decomponendo $D = D_1 \cup D_2$ mediante i segmenti orizzontali σ_1, σ_2 . Denotiamo $\gamma_{1,1}, \gamma_{2,2}$ le parti in cui resta divisa γ_1 e $\gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}$ quelle in cui resta divisa γ_2 . Allora la frontiera $\partial^+ D_1$ è il concatenamento di $\gamma_{1,1}, \sigma_1, \gamma_{2,1}^{-1}, \sigma_2$, mentre $\partial^+ D_2$ è il

concatenamento di $\gamma_{1,2}$, σ_2^- , $\gamma_{2,2}^-$, σ_1^{-2} . Applicando il Teorema 2.11 nei due domini, si ha

$$\begin{aligned}
\iint_D (D_x F_2 - D_y F_1) dx dy &= \iint_{D_1} (D_x F_2 - D_y F_1) dx dy + \iint_{D_2} (D_x F_2 - D_y F_1) dx dy \\
&= \int_{\partial^+ D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\partial^+ D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 \\
&= \int_{\gamma_{1,1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\sigma_1} F_1 dx + \int_{\gamma_{2,1}^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2^- + \int_{\sigma_2} F_1 dx \\
&+ \int_{\gamma_{1,2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\sigma_2^-} F_1 dx + \int_{\gamma_{2,2}^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2^- + \int_{\sigma_1^-} F_1 dx \\
&= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

In generale, applicando i Teoremi di Gauß-Green a un dominio con 'buchi', la frontiera esterna va percorsa in senso anti-orario e quelle dei 'buchi' in senso orario.

Esempio 2.14. Consideriamo l'anello

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e il campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}.$$

Dette γ_1 e γ_2 le circonferenze esterna e interna, rispettivamente, di D , si ha dal Corollario 2.13

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 &= \iint_D (1 + 1) dx dy \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$

I Teoremi di Gauß-Green si applicano al *calcolo di aree*. Infatti, se D è un dominio normale rispetto a \vec{x} (la cui frontiera sia una curva regolare a tratti), dal Lemma 2.9 con $F(x, y) = y$ si ha

$$(2.3) \quad |D| = - \int_{\partial^+ D} y dx.$$

Se D è un dominio normale rispetto a \vec{y} (la cui frontiera sia una curva regolare a tratti), dal Lemma 2.10 con $F(x, y) = x$ si ha

$$(2.4) \quad |D| = \int_{\partial^+ D} x dy.$$

Invece, dal Teorema 2.11 con $\mathbf{F} = (-y, x)$ segue

$$(2.5) \quad |D| = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} (x dy - y dx).$$

Esempio 2.15. Calcoliamo l'area del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} \leq 1\},$$

la cui frontiera è l'astroide γ (fig. 6) di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos(t)^3 \\ y = \sin(t)^3 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

²Come sopra, γ^- denota la curva γ con orientamento opposto.

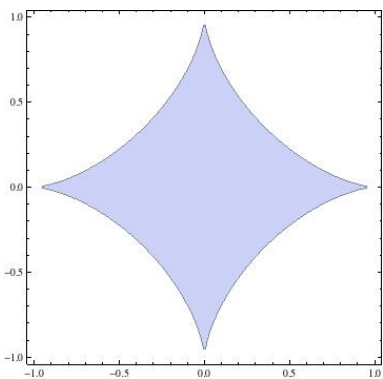


FIGURA 6.

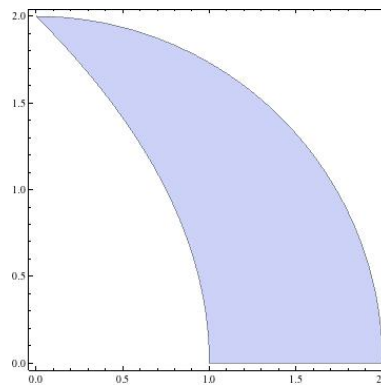


FIGURA 7.

Usiamo (2.4):

$$\begin{aligned}
 |D| &= \int_{\gamma} x \, dy \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} (\cos(t)^4 - \cos(t)^6) \, dt \\
 &= 3 \left[\frac{t}{16} + \frac{\sin(t) \cos(t)}{16} + \frac{\cos(t)^3 \sin(t)}{24} - \frac{\cos(t)^5 \sin(t)}{6} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{3}{8} \pi
 \end{aligned}$$

(il penultimo passaggio si realizza mediante una lunga sequenza di integrazioni per parti).

Esempio 2.16. Calcoliamo l'integrale

$$\iint_D \frac{1}{y+2} \, dx \, dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4, y^2 \geq 4 - 4x\}$$

(fig. 7). La frontiera $\partial^+ D$ è il concatenamento delle curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ di parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in [1, 2], \quad \begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{4 - 4t} \end{cases}, t \in [0, 1].$$

Poiché γ_1 è orizzontale, conviene applicare il Lemma 2.10:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{1}{y+2} \, dx \, dy &= \int_{\partial^+ D} \frac{x}{y+2} \, dy \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)^2}{\sin(t)+1} \, dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{1-t+\sqrt{1-t}} \, dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(t)) \, dt + \int_1^0 \frac{s - s^3}{s + s^2} \, ds \\
 &= 2 \left[t + \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[s - \frac{s^2}{2} \right]_1^0 \\
 &= \pi - \frac{5}{2},
 \end{aligned}$$

dove nel secondo integrale abbiamo usato la sostituzione $s = \sqrt{1-t}$.

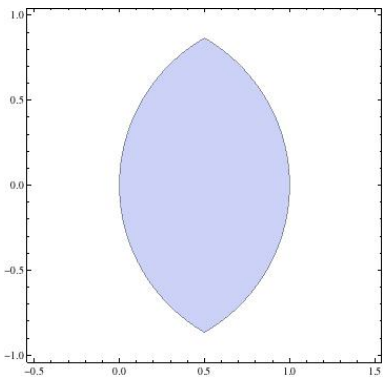


FIGURA 8.

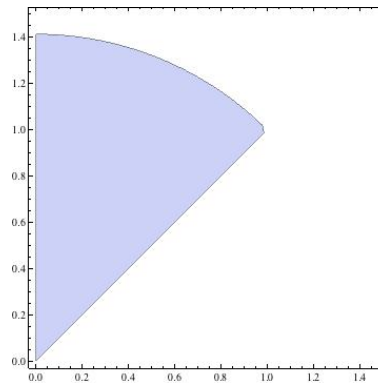


FIGURA 9.

Esempio 2.17. Calcoliamo l'area del dominio D , intersezione dei cerchi di centri $(0,0)$, $(1,0)$ rispettivamente, e raggio 1 (fig. 8). La frontiera $\partial^+ D$ è il concatenamento delle curve γ_1 , γ_2 di parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], \begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right].$$

Applichiamo (2.3), ottenendo

$$\begin{aligned} |D| &= \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)^2 dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\cos(t)^2 + \cos(t)) dt \\ &= \left[\frac{t + \sin(t) \cos(t)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\sin(t) + \frac{t + \sin(t) \cos(t)}{2} \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Esempio 2.18. Calcoliamo l'integrale del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + 2y^2 + x)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$$

lungo la curva γ , concatenamento delle curve γ_1 , γ_2 , γ_3 di parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in [0, 1], \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos(t) \\ y = \sqrt{2} \sin(t) \end{cases}, t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} - t \end{cases}, t \in [0, \sqrt{2}]$$

(fig. 9). La curva γ ha per sostegno la frontiera di

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq x \leq y\},$$

dunque per il Teorema 2.11

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D (2x - 4y) dx dy \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\rho \cos(\theta) - 4\rho \sin(\theta)) \rho d\theta d\rho \\
 &= \left(\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^2 d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta) - 2\sin(\theta)) d\theta \right) \\
 &= \left[\frac{2\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\sin(\theta) + 2\cos(\theta) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4.
 \end{aligned}$$

Osservazione 2.19. Usiamo il Teorema 2.11 per dimostrare il Teorema 1.10 (i). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto semplicemente connesso, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale t.c. $D_x F_2 = D_y F_1$ in A . Scelta comunque una curva regolare chiusa γ con sostegno in A , essa è la frontiera di un dominio $D \subset A$ (definizione di insieme semplicemente connesso, ved. [3]). Per il Teorema 2.11 abbiamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (D_x F_2 - D_y F_1) dx dy = 0.$$

Dunque, per il Teorema 2.3, \mathbf{F} è conservativo.

Esercizio 2.20. Ricalcolare il potenziale dell'Esempio 2.5 usando il metodo della spezzata.

Esercizio 2.21. Ricalcolare il potenziale dell'Esempio 2.6 integrando separatamente nelle due variabili.

Esercizio 2.22. Calcolare l'integrale del campo \mathbf{F} dell'Esempio 2.6 lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 + t \end{cases}, \quad t \in [1, 2].$$

Esercizio 2.23. Ricalcolare l'integrale dell'Esempio 2.7 determinando un potenziale del campo \mathbf{F} .

Esercizio 2.24. Calcolare direttamente l'integrale curvilineo dell'Esempio 2.14.

Esercizio 2.25. Stabilire se il campo \mathbf{F} definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2} \mathbf{i} - \frac{2y}{x^2 - y^2} \mathbf{j}$$

è conservativo nel suo insieme di definizione, quindi calcolare l'integrale di \mathbf{F} lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

Esercizio 2.26. Usando uno dei Teoremi di Gauß-Green, calcolare

$$\iint_D x^2 dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

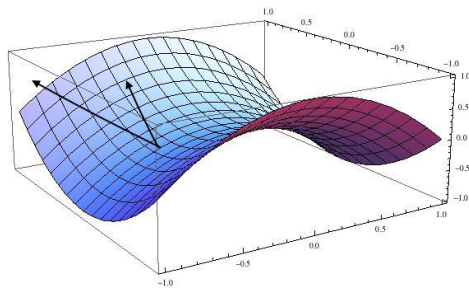


FIGURA 10.

Esercizio 2.27. Usando uno dei Teoremi di Gauß-Green, calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} (x^2 - y^2)dx + (y^2 - x)dy,$$

dove γ è la curva ottenuta concatenando le curve γ_1, γ_2 di parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \begin{cases} x = \sin(t)^2 \\ y = \cos(t)^2 \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Esercizio 2.28. Usando uno dei Teoremi di Gauß-Green, calcolare l'area del dominio D delimitato dall'ellisse di equazione

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Esercizio 2.29. Usando uno dei Teoremi di Gauß-Green, calcolare

$$\iint_D y \cos(x) dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Esercizio 2.30. Usando uno dei Teoremi di Gauß-Green, calcolare l'area del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \ln(x)\}.$$

3. INTEGRALI SUPERFICIALI DEL SECONDO TIPO

Introduciamo gli *integrali superficiali del secondo tipo*:

Definizione 3.1. Siano $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ una superficie regolare orientabile di parametrizzazione $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ e sostegno $S \subset \mathbb{R}^3$, $A \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto t.c. $S \subset A$, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. L'integrale di \mathbf{F} su Σ è

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \nu dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)) du dv,$$

dove

$$\nu(u, v) = \frac{D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)}{|D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)|}.$$

Nella notazione usualmente adottata si introduce l'*elemento di superficie*

$$dS = |D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)| du dv.$$

Come si vede dalla Definizione 3.1 e da [6], un integrale superficiale del secondo tipo non è altro che un integrale superficiale del primo tipo, in cui la funzione integranda (scalare) è $\mathbf{F} \cdot \nu$, che

esprime la componente di \mathbf{F} normale a Σ in un punto (fig. 10). Osserviamo che l'integrale dipende dall'orientamento di Σ , e cambia segno se questo cambia (se la superficie non è orientabile, la Definizione 3.1 non ha senso).

Dal punto di vista fisico, l'integrale esprime il *flusso* di \mathbf{F} attraverso Σ (per esempio, se \mathbf{F} descrive la velocità di un fluido in un condotto e Σ una sezione di tale condotto, il flusso è la *portata*).

Se Σ è il grafico di una funzione $g \in C^1(D)$, la Definizione 3.1 assume la seguente forma particolare:

$$(3.1) \quad \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \iint_D (-F_1 D_x g - F_2 D_y g + F_3) \, dx \, dy.$$

Infatti si adotta per Σ la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = g(x, y) \end{cases}, \quad (x, y) \in D,$$

da cui

$$\begin{aligned} D_x \mathbf{r} \times D_y \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & D_x g \\ 0 & 1 & D_y g \end{vmatrix} \\ &= -D_x g \mathbf{i} - D_y g \mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Esempio 3.2. Siano $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo definito da $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ e Σ la sfera di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = R \cos(\theta) \end{cases}, \quad (\varphi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi[\quad (R > 0).$$

Ricordiamo che

$$D_{\varphi} \mathbf{r} \times D_{\theta} \mathbf{r} = R^2 \sin(\varphi)^2 \cos(\theta) \mathbf{i} + R^2 \sin(\varphi)^2 \sin(\theta) \mathbf{j} + R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \mathbf{k}.$$

Ricaviamo dunque

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^3 (\sin(\varphi)^3 \cos(\theta)^2 + \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) \sin(\theta)) \, d\varphi \, d\theta \\ &= R^3 \left(\int_0^{\pi} \sin(\varphi)^3 \, d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \, d\theta \right) \\ &\quad + R^3 \left(\int_0^{\pi} \sin(\varphi)^2 \cos(\varphi) \, d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin(\theta) \, d\theta \right) \\ &= R^3 \left[\frac{\cos(\varphi)^3}{3} - \cos(\varphi) \right]_0^{\pi} \left[\frac{\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Notiamo che il flusso di \mathbf{F} attraverso Σ è pari al volume della regione delimitata dal sostegno di Σ .

Il risultato dell'Esempio 3.2 si chiarisce alla luce del seguente risultato (dovuto a Gauß):

Teorema 3.3. (Divergenza) *Siano $B \subset \mathbb{R}^3$ un dominio normale rispetto ai piani coordinati, la cui frontiera è il sostegno di una superficie regolare orientabile $\partial^+ B$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto t.c. $B \subset A$, e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Allora*

$$\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial^+ B} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

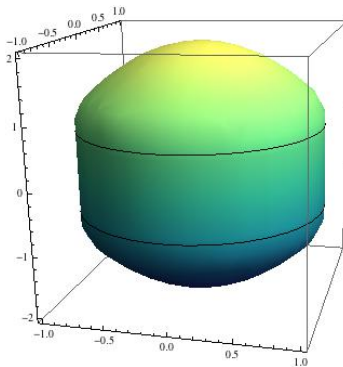


FIGURA 11.

Dimostrazione. Dimostriamo che

$$(3.2) \quad \iiint_B D_z F_3 \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial^+ B} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \nu \, dS.$$

Poiché B è normale rispetto al piano \vec{xy} , esistono un dominio regolare $D \subset \mathbb{R}^2$ e due funzioni $g_1, g_2 \in C^1(D)$ t.c. $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ per ogni $(x, y) \in D$ e

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

(fig. 11). Allora si ha

$$\begin{aligned} \iiint_B D_z F_3 \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} D_z F_3 \, dz \right) dx \, dy \\ &= \iint_D (F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Ricordiamo che la frontiera $\partial^+ B$ è orientata verso l'esterno. Essa si scompone in tre parti regolari: Σ_1 (il grafico di g_1 orientato verso il basso), Σ_2 (il grafico di g_2 orientato verso l'alto), Σ_3 (la frontiera 'laterale'), così che

$$\begin{aligned} \iint_{\partial^+ B} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \nu \, dS &= \iint_{\Sigma_1} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \nu \, dS + \iint_{\Sigma_2} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \nu \, dS + \iint_{\Sigma_3} (F_3 \mathbf{k}) \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_D F_3(x, y, g_1(x, y))(-1) \, dx \, dy + \iint_D F_3(x, y, g_2(x, y)) \, dx \, dy \\ &= \iint_D (F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))) \, dx \, dy \end{aligned}$$

(osserviamo che $\mathbf{k} \cdot \nu = 0$ nei punti di Σ_3). Così (3.2) è dimostrata. Similmente si prova che

$$\begin{aligned} \iiint_B D_x F_1 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\partial^+ B} (F_1 \mathbf{i}) \cdot \nu \, dS, \\ \iiint_B D_y F_2 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\partial^+ B} (F_2 \mathbf{j}) \cdot \nu \, dS. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro concludiamo. □

Il Teorema 3.3 (che si estende alle superfici regolari a pezzi) collega gli integrali superficiali del secondo tipo agli integrali tripli, e ha diverse importanti conseguenze:

Corollario 3.4. Siano $B \subset \mathbb{R}^3$ un dominio normale rispetto ai piani coordinati, la cui frontiera è il sostegno di una superficie regolare orientabile $\partial^+ B$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto t.c. $B \subset A$, e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo solenoidale. Allora

$$\iint_{\partial^+ B} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = 0.$$

Dimostrazione. Si ha $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ in A , da cui per il Teorema 3.3 la conclusione. \square

Si vede così che il campo gravitazionale (Esempio 1.4) ha flusso nullo attraverso qualunque superficie regolare, orientabile, chiusa di \mathbb{R}^3 che non passa per $\mathbf{0}$, mentre il campo magnetico (Esempio 1.9) ha flusso nullo attraverso le superfici chiuse che non intersecano \vec{z} .

Corollario 3.5. Siano $B \subset \mathbb{R}^3$ un dominio normale rispetto ai piani coordinati, la cui frontiera è il sostegno di una superficie regolare orientabile $\partial^+ B$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto t.c. $B \subset A$, e $\Phi \in C^2(A)$. Allora

$$\iiint_B \Delta \Phi(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial^+ B} \nabla \Phi \cdot \boldsymbol{\nu} dS.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 3.3 al campo $\nabla \Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. \square

In particolare, se Φ è una funzione armonica, il flusso di $\nabla \Phi$ attraverso ogni superficie regolare, orientabile, chiusa con sostegno contenuto nel dominio di Φ è nullo. Il Teorema 3.3 può essere usato per calcolare un flusso:

Esempio 3.6. Calcoliamo il flusso di $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

attraverso la frontiera di

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

Per il Teorema 3.3 si ha (passando alle coordinate cilindriche)

$$\begin{aligned} \iint_{\partial^+ B} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS &= \iiint_B (2x + 1) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2-1}^{1-\rho^2} (2\rho \cos(\theta) + 1)\rho d\zeta d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2(\rho - \rho^3)(2\rho \cos(\theta) + 1) d\theta d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Il prossimo risultato (che non dimostriamo) collega invece gli integrali superficiali a quelli curvilinei, entrambi del secondo tipo:

Teorema 3.7. (Stokes) Siano $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ una superficie regolare orientabile il cui bordo $\partial^+ \Sigma$ è una curva regolare a tratti, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto t.c. $S \subset A$, e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Allora

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \int_{\partial^+ \Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

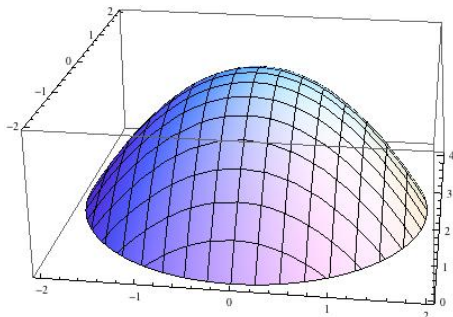


FIGURA 12.

Il Teorema 3.7 rappresenta un'estensione al caso $n = 3$ del Teorema 2.11. Supponiamo che Σ sia una superficie giacente sul piano $\vec{x}\vec{y}$, identificabile con un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, allora si ha $\nu = \mathbf{k}$ e quindi

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \iint_D (D_x F_2 - D_y F_1) \, dx \, dy.$$

Dalla tesi del Teorema 3.7 si deduce dunque il Teorema 2.11. Ovviamente, se \mathbf{F} è conservativo, entrambi gli integrali si annullano.

Esempio 3.8. Siano $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e Σ la superficie di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4 \\ x^2 + y^2 \leq 4, \end{cases}$$

orientata verso l'alto (fig. 12). Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso Σ , prima direttamente e poi applicando il Teorema 3.7. Si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{k}.$$

Adottiamo per Σ la parametrizzazione definita da

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}, \quad (x, y) \in D,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS &= \iint_D 2\mathbf{k} \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx \, dy \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

D'altra parte, $\partial^+ \Sigma$ ammette la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (4 \sin(t)^2 + 4 \cos(t)^2) dt \\ &= 8\pi.\end{aligned}$$

Il Teorema 3.7 consente di convertire un integrale superficiale in uno curvilineo o viceversa, secondo i casi. Nei prossimi esempi ed esercizi ometteremo gli orientamenti, rimandando alla convenzione seguente: *tutte le superfici sono orientate verso l'alto e tutte le curve nel senso anti-orario.*

Esempio 3.9. Calcoliamo la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$$

lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = \sin(t) - \cos(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

La curva γ si può vedere come il bordo della superficie Σ , definita come il grafico di $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad g(x, y) = y - x.$$

Calcoliamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ z & y & xy \end{vmatrix} = z\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Per il Teorema 3.7 si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_D (y - x - 1) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 \sin(\theta) - \rho^2 \cos(\theta) - \rho) \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(\theta) - \cos(\theta)}{3} - \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

Particolari geometrie fanno sì che il rotore di un campo sia un vettore costante, semplificando notevolmente i calcoli:

Esempio 3.10. Calcoliamo la circuitazione del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$$

lungo la curva γ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}.$$

La curva γ si può riguardare come il bordo della superficie Σ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2x + 5y, \end{cases}, \quad (x, y) \in D,$$

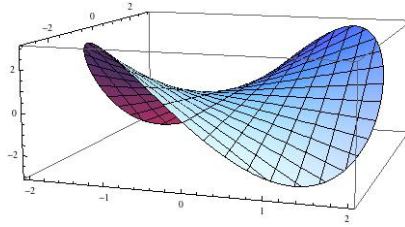


FIGURA 13.

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Abbiamo inoltre

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & z & -x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Applicando il Teorema 3.7 ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_D (-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx \, dy \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

Esempio 3.11. Calcoliamo la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

lungo la curva γ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = xy. \end{cases}$$

Si ha

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & x+z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

D'altra parte, γ è il bordo della superficie Σ (fig. 13), definita come il grafico di $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}, \quad g(x, y) = xy.$$

Per il Teorema 3.7 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_D (x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\rho \cos(\theta) + 3\rho \sin(\theta)) 6\rho \, d\rho \, d\theta \\ &= 6 \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} (2 \cos(\theta) + 3 \sin(\theta)) \, d\theta \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

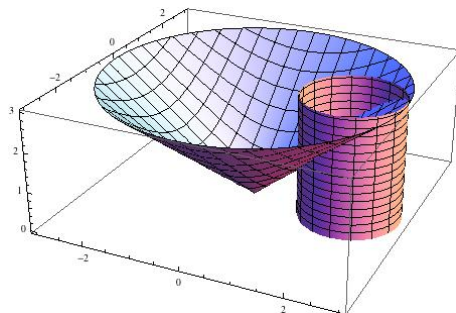


FIGURA 14.

dove abbiamo usato la sostituzione

$$\begin{cases} x = 2\rho \cos(\theta) \\ y = 3\rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad (\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[.$$

Particolarmente semplici sono i casi in cui il flusso risulta nullo:

Esempio 3.12. Calcoliamo la circuitazione del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

lungo la curva γ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Riformuliamo γ come il bordo della semisfera Σ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y \geq 0, \end{cases}$$

quindi osserviamo che \mathbf{F} è irrotazionale:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dunque, per il Teorema 3.7,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = 0.$$

Esempio 3.13. Calcoliamo la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

lungo la curva γ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases}$$

Riformuliamo γ come il bordo della superficie Σ (fig. 14) definita come il grafico di $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 3 \leq 0\}, \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Osserviamo che

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xz & yz & z \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Per il Teorema 3.7 si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_D \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx \, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esempio 3.14. Siano $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + e^{x^2 + y^2}\mathbf{k},$$

e Σ il grafico della funzione $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad g(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso Σ . Poiché il calcolo diretto è complicato, applichiamo il Teorema 3.7. Il bordo $\partial^+ \Sigma$ ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = \ln(2) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

da cui

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS &= \int_{\partial^+ \Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos(t) + \sin(t))(-\sin(t)) + (\sin(t) - \cos(t))\cos(t)) \, dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) \, dt \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

Alcune conseguenze del Teorema 3.7:

Corollario 3.15. Siano $\Sigma_1 = (\mathbf{r}_1, S_1)$, $\Sigma_2 = (\mathbf{r}_2, S_2)$ superfici regolari orientabili, t.c. $\partial^+ \Sigma_1 = \partial^+ \Sigma_2$ è una curva regolare a tratti, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto t.c. $S_1 \cup S_2 \subset A$, e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Allora

$$\iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu_1 \, dS_1 = \iint_{\Sigma_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu_2 \, dS_2.$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi discende che Σ_1 e Σ_2 hanno lo stesso orientamento. Applicando due volte il Teorema 3.7 abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu_1 \, dS_1 &= \int_{\partial^+ \Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 \\ &= \int_{\partial^+ \Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \iint_{\Sigma_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu_2 \, dS_2, \end{aligned}$$

e concludiamo. □

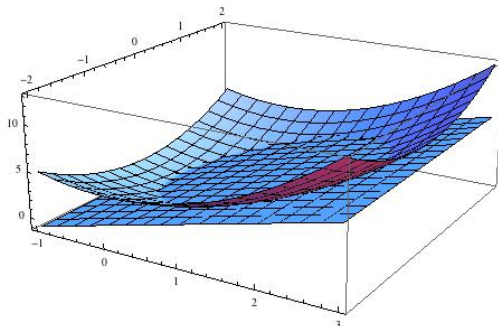


FIGURA 15.

Esempio 3.16. Siano $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$$

e Σ la superficie di equazione cartesiana

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z \leq 2x + 1. \end{cases}$$

Calcoliamo il flusso di $\text{rot } \mathbf{F}$ attraverso Σ . Si ha

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xz & yz & -xy \end{vmatrix} = -(x+y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}.$$

Osserviamo che la superficie Σ' di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2x + 1 \end{cases}, \quad (x, y) \in D,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 1\},$$

ha lo stesso bordo di Σ (fig. 15), dunque per il Corollario 3.15 si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \nu \, dS &= \iint_{\Sigma'} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \nu' \, dS' \\ &= \iint_D (2x + 2y) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (\rho + \rho^2 \cos(\theta) + \rho^2 \sin(\theta)) \, d\rho \, d\theta \\ &= 4\pi, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato in D le coordinate polari

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad (\rho, \theta) \in [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi[.$$

Corollario 3.17. Siano $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ una superficie regolare orientabile chiusa, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto t.c. $S \subset A$, e $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Allora

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = 0.$$

Dimostrazione. Tracciamo su Σ una curva regolare chiusa γ , che la divide in due superfici Σ_1, Σ_2 con orientamenti opposti. Sulla seconda invertiamo l'orientamento, così che $\partial^+\Sigma_1 = \partial^+(\Sigma_2^-)$. Dal Corollario 3.15 abbiamo allora³

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS &= \iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS + \iint_{\Sigma_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS - \iint_{\Sigma_2^-} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= 0, \end{aligned}$$

e concludiamo. □

Osserviamo che il Corollario 3.17 è un caso particolare del Corollario 3.4, attraverso il Lemma 1.7 (rot \mathbf{F} è solenoidale).

Osservazione 3.18. Usiamo il Teorema 3.7 per dimostrare il Teorema 1.10 (ii). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto semplicemente connesso, $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale irrotazionale. Scelta comunque una curva regolare chiusa γ con sostegno in A , essa è il bordo di una superficie Σ con sostegno contenuto in A (definizione di insieme semplicemente connesso, ved. [3]). Per il Teorema 3.7 abbiamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = 0.$$

Dunque, per il Teorema 2.3, \mathbf{F} è conservativo.

Esercizio 3.19. Usando i Teoremi 3.3 e 3.7, dimostrare che per ogni campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si ha

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0.$$

Esercizio 3.20. Applicando il Teorema 3.3, calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

attraverso l'ellissoide di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$$

Esercizio 3.21. Applicando il Teorema 3.7, calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

lungo il bordo della superficie Σ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Esercizio 3.22. Applicando il Teorema 3.7, calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -2z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 2x^3y^2\mathbf{k}$$

lungo il bordo della superficie Σ (non regolare!) di equazione cartesiana

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

³Denotiamo ν, dS i versori normali e gli elementi di superficie di tutte le superfici coinvolte.

Esercizio 3.23. Applicando il Teorema 3.7, calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$$

lungo il bordo della superficie Σ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

Esercizio 3.24. Applicando il Teorema 3.7, calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \cos(x)\mathbf{i} + \sin(y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

lungo il bordo della superficie Σ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

Esercizio 3.25. Applicando il Teorema 3.7, calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$$

lungo la curva γ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = z. \end{cases}$$

Esercizio 3.26. Applicando il Teorema 3.7, calcolare il flusso del rotore di

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -2z^2\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 2x^3y^2\mathbf{k}$$

attraverso la superficie Σ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 3 \\ z \leq 1. \end{cases}$$

Esercizio 3.27. Calcolare il flusso del rotore di

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (2x + z^2)\mathbf{k}$$

attraverso la superficie Σ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

(suggerimento: trovare un'altra superficie Σ' avente lo stesso bordo e orientamento di Σ , quindi applicare il Corollario 3.15).

4. FORME DIFFERENZIALI

In questa sezione riformuliamo alcuni concetti delle sezioni precedenti in un linguaggio diverso (per una trattazione estesa ved. [7], [8]). Ricordiamo che una *forma lineare* nelle variabili u_1, \dots, u_n è un polinomio di grado 1 omogeneo, ovvero la funzione

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n,$$

indotta dai coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Denotiamo \mathcal{L}_n l'insieme delle forme lineari in n variabili.

Definizione 4.1. Una forma differenziale è una funzione $\omega : A \rightarrow \mathcal{L}_n$ definita in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), che ad ogni punto $\mathbf{x} \in A$ associa la forma lineare

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto F_1(\mathbf{x})u_1 + \dots + F_n(\mathbf{x})u_n,$$

dove $F_i \in C^1(A)$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Come al solito, ci concentriamo sui casi $n = 2, 3$. Diremo che ω è *esatta* se esiste una funzione $\Phi \in C^2(A)$ t.c. $d\Phi(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ (in tal caso Φ è detta *potenziale* di ω); e che ω è *chiusa* se per in A si ha

$$D_y F_1 = D_x F_2 \quad (n = 2), \quad \text{e} \quad D_z F_1 = D_x F_3, \quad D_z F_2 = D_y F_3 \quad (n = 3).$$

Inoltre, in analogia col caso dei differenziali, useremo per le forme differenziali la seguente notazione

$$\omega = \begin{cases} F_1 dx + F_2 dy & \text{se } n = 2 \\ F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz & \text{se } n = 3. \end{cases}$$

Chiaramente esiste una corrispondenza biunivoca tra forme differenziali e campi vettoriali definiti in A , in cui alla forma ω è associato il campo $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$. Tale corrispondenza permette di riformulare le proprietà appena introdotte come segue:

$$\omega \text{ è esatta} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ è conservativo}$$

$$\omega \text{ è chiusa} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ è irrotazionale } (n = 3) \text{ o soddisfa } D_y F_1 = D_x F_2 \quad (n = 2).$$

Pertanto, dal Lemma 1.8 e dal Teorema 1.10 segue un analogo risultato sulle forme:

Teorema 4.2. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) aperto, ω una forma differenziale definita in A :

- (i) se ω è esatta, allora ω è chiusa;
- (ii) se A è semplicemente connesso e ω è chiusa, allora ω è esatta.

Esempio 4.3. Sia ω la forma differenziale definita in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da

$$\omega = \frac{e^{y^2}}{x^2 + y^2} dx + \frac{e^{x^2}}{x^2 + y^2} dy.$$

Si ha

$$D_x F_2 - D_y F_1 = \frac{e^{x^2}(2x^3 + 2xy^2 - 2x) - e^{y^2}(2x^2y + 2y^3 - 2y)}{(x^2 + y^2)^2} \neq 0,$$

dunque ω non è chiusa, in particolare non è esatta (Teorema 4.2 (i)).

Esempio 4.4. Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega = \frac{2xz}{x^2 - y} dx - \frac{z}{x^2 - y} dy + \ln(x^2 - y) dz.$$

Il suo insieme di definizione è

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < x^2\},$$

semplicemente connesso. Inoltre ω è chiusa:

$$D_x F_2 - D_y F_1 = -\frac{2xz}{(x^2 - y)^2} + \frac{2xz}{(x^2 - y)^2} = 0,$$

$$D_x F_3 - D_z F_1 = \frac{2x}{x^2 - y} - \frac{2x}{x^2 - y} = 0,$$

$$D_y F_3 - D_z F_2 = -\frac{1}{x^2 - y} + \frac{1}{x^2 - y} = 0.$$

Per il Teorema 4.2 (ii), ω è esatta. Per trovarne un potenziale, cominciamo col porre la condizione

$$D_z \Phi = \ln(x^2 - y),$$

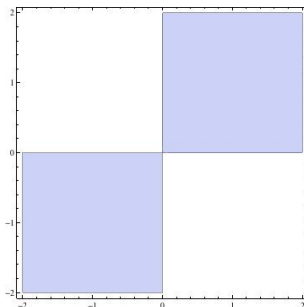


FIGURA 16.

che implica

$$\Phi(x, y, z) = \ln(x^2 - y)z + \Psi(x, y).$$

Derivando rispetto a x e y , scopriamo che Ψ è costante. I potenziali di ω sono dunque le funzioni del tipo

$$\Phi(x, y, z) = \ln(x^2 - y)z + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Siano ω una forma differenziale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva regolare a tratti con parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sostegno $S \subset A$: l'integrale di ω lungo γ è definito da

$$\int_{\gamma} \omega = \begin{cases} \int_a^b (F_1(\mathbf{r}(t))Dx(t) + F_2(\mathbf{r}(t))Dy(t)) dt & \text{se } n = 2 \\ \int_a^b (F_1(\mathbf{r}(t))Dx(t) + F_2(\mathbf{r}(t))Dy(t) + F_3(\mathbf{r}(t))Dz(t)) dt & \text{se } n = 3 \end{cases}$$

Come si vede, questo tipo di integrale corrisponde a quello della Definizione 2.1. Dal Teorema 2.3 e da (2.1) si ricava quanto segue:

Teorema 4.5. *Siano ω una forma differenziale esatta in A , Φ un potenziale di ω , $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva regolare a tratti di parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sostegno $S \subset A$, allora*

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)).$$

In particolare, se γ è chiusa si ha

$$\int_{\gamma} \omega = 0,$$

e se γ_1, γ_2 sono curve con sostegni in A aventi gli stessi estremi, si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Vale inoltre una formula analoga a (2.2) per il calcolo di un potenziale di ω .

Esempio 4.6. Studiamo la forma differenziale

$$\omega = \frac{dx}{x\sqrt{xy}} + \frac{dy}{y\sqrt{xy}}$$

nel suo insieme di definizione

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}.$$

Si vede facilmente che ω è chiusa. Tuttavia A non è semplicemente connesso (fig. 16), dunque non possiamo stabilire mediante il Teorema 4.2 se ω è esatta. Procediamo *localmente*: poniamo

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}, \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\},$$

così che A_i è semplicemente connesso e ω , ristretta ad A_i , è esatta ($i = 1, 2$). Usando (2.2), si vede che i potenziali di ω in A_1 sono esattamente le funzioni $\Phi : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$\Phi(x, y) = -\frac{2}{\sqrt{xy}} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Lo stesso vale in A_2 , dunque i potenziali di ω in A sono esattamente le funzioni $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{xy}} + c_1 & \text{se } (x, y) \in A_1 \\ -\frac{2}{\sqrt{xy}} + c_2 & \text{se } (x, y) \in A_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Calcoliamo adesso l'integrale di ω lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 + \cos(t) \\ y = 1 + \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

Il sostegno di γ è contenuto in A_1 , dunque possiamo calcolare

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(1, 1) - \Phi(3, 1) = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2.$$

Esempio 4.7. Studiamo la forma differenziale definita in \mathbb{R}^3 da

$$\omega = \cos(1 + yz) dx - xz \sin(1 + yz) dy - xy \sin(1 + yz) dz.$$

Si vede facilmente che ω è chiusa. Per il Teorema 4.2, essa è esatta. Un potenziale di ω è definito da

$$\Phi(x, y, z) = x \cos(1 + yz).$$

Calcoliamo l'integrale di ω lungo la spirale di elica γ , di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Basta applicare il Teorema 4.5:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \Phi(1, 0, 2\pi) - \Phi(1, 0, 0) \\ &= \cos(1) - \cos(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esercizio 4.8. Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = \frac{1 - x + y}{e^{x+y}} dx + \frac{-1 - x + y}{e^{x+y}} dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione. Quindi calcolare l'integrale di ω lungo la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - \ln(t) \end{cases}, \quad t \in [1, 2].$$

Esercizio 4.9. Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = 3x\sqrt{y-x} dx - (x+2y)\sqrt{y-x} dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione, quindi calcolare il suo integrale lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \end{cases}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Esercizio 4.10. Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+2y^2}} dx + \frac{2y}{\sqrt{1+x^2+2y^2}} dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione. Quindi calcolare il suo integrale lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \ln(t+1) \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. IANNIZZOTTO, Calcolo integrale.
- [2] A. IANNIZZOTTO, Equazioni differenziali ordinarie.
- [3] A. IANNIZZOTTO, Funzioni di più variabili reali.
- [4] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale in più variabili reali.
- [5] A. IANNIZZOTTO, Calcolo integrale in più variabili reali.
- [6] A. IANNIZZOTTO, Curve e superfici.
- [7] C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica 2, Zanichelli (2016).
- [8] S. SALSA, A. SQUELLATI, Esercizi di analisi matematica 2, Zanichelli (2011).

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
 VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
E-mail address: `antonio.iannizzotto@unica.it`