

CURVE E SUPERFICI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Curve in \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$), sostegni, parametrizzazioni, equazioni cartesiane e polare. Interpretazioni geometrica e fisica. Curve di Jordan. Retta tangente. Curve regolari (a tratti), rettificabili. Integrali curvilinei del primo tipo. Lunghezza di una curva. Ascissa curvilinea. Superfici in \mathbb{R}^3 , sostegni, parametrizzazioni, equazioni cartesiane e polare. Superfici regolari (a pezzi), con bordo o senza. Orientamento. Area di una superficie. Superfici di rotazione. Integrali superficiali del primo tipo. Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

INDICE

1. Curve in \mathbb{R}^2	1
2. Curve in \mathbb{R}^3	14
3. Superfici in \mathbb{R}^3	16
Riferimenti bibliografici	28

Versione del 26 dicembre 2020

1. CURVE IN \mathbb{R}^2

Tre punti, anche lontani, ai confini del mondo visibile, suscitano il desiderio di unirli con una linea: così si formano le costellazioni.

E. JÜNGER

Intuitivamente, una *curva* è una linea continua, formata da infiniti punti, situata su un piano o nello spazio. Le *curve algebriche* (per esempio rette, coniche, cubiche) si possono descrivere come 'luoghi' formati da tutti i punti le cui coordinate annullano un polinomio in più variabili (ved. [10]). Compito dell'Analisi matematica è quello di estendere tale rappresentazione a una classe più ampia di curve, dette *trascendenti* (per esempio curve logaritmiche, esponenziali). Per realizzare tale estensione, occorre definire una nozione di 'curva' più rigorosa e formale.

Studieremo dapprima le *curve piane*:

Definizione 1.1. Una *curva piana* è una coppia $\gamma = (\mathbf{r}, S)$, dove $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) è una funzione detta *parametrizzazione*, e $S = \mathbf{r}(I)$ un insieme detto *sostegno*. La curva γ è detta

- (i) *chiusa* se $I = [a, b]$ e $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$;
- (ii) *semplice* se $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ per ogni $t_1, t_2 \in \text{int}(I)$, $t_1 \neq t_2$;
- (iii) *continua* se \mathbf{r} è continua;
- (iv) *limitata* se S è limitato.

Chiaramente, se $I = [a, b]$ e \mathbf{r} è continua, allora γ è limitata e S è un insieme compatto e connesso (Teoremi di Weierstraß e dei valori intermedi, ved. [4]). I punti $\mathbf{r}(a)$, $\mathbf{r}(b)$ sono detti *estremi* di γ . L'insieme S , in molti casi, può essere descritto mediante una relazione nelle variabili (x, y) , detta *equazione cartesiana*:

$$(1.1) \quad f(x, y) = 0,$$

dove $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto t.c. $S \subset A$. Tuttavia l'equazione (1.1) non descrive compiutamente la curva γ (per esempio non permette di stabilire se (ii) è verificata). Per questo è necessario conoscere la parametrizzazione, che spesso è rappresentata da un sistema detto *equazione parametrica*:

$$(1.2) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

dove $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono le funzioni componenti di \mathbf{r} ovvero $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ per ogni $t \in I$. Inoltre, se γ è semplice, la parametrizzazione conferisce alla curva un *orientamento*: questo è una relazione di ordine totale \prec fra i punti di S definita per ogni $t_1, t_2 \in I$ da

$$\mathbf{r}(t_1) \prec \mathbf{r}(t_2) \iff t_1 < t_2.$$

Esempio 1.2. La curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (R > 0)$$

è continua, chiusa, semplice, orientata in senso *anti-orario* e ha come sostegno la circonferenza S di equazione

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

La parametrizzazione

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 4\pi]$$

descrive una curva non semplice, ancora con sostegno S . Inoltre, l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{R^2 - t^2} \end{cases}, \quad t \in [-R, R]$$

descrive la semi-circonferenza formata dai punti di S con ordinata non negativa (come si parametrizza l'altra semi-circonferenza?)

Osservazione 1.3. Per chiarire la differenza fra le equazioni (1.1) e (1.2) è utile fare riferimento all'*interpretazione fisica* del concetto di curva: sia P un punto mobile sul piano, la cui posizione all'istante $t \in I$ è $\mathbf{r}(t)$. Il moto di P nell'intervallo I si svolge sulla traiettoria S , descritta da (1.1), con legge oraria data da (1.2), cioè tale moto ha *un grado di libertà*. Per esempio, in base alle *leggi di Keplero* la Terra ruota intorno al Sole su un'orbita ellittica, che può essere rappresentata dall'equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

e compie una rotazione nell'intervallo $[0, T]$. Se la velocità scalare di tale rotazione fosse costante (ma non è così), il moto della Terra sarebbe descritto dall'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ y = b \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \end{cases}, \quad t \in [0, T].$$

Una classe di curve che abbiamo già descritto (ved. [2]) è quella dei *grafici* di funzioni: detti $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, il suo grafico $\text{gr}(g)$ è il sostegno di una curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

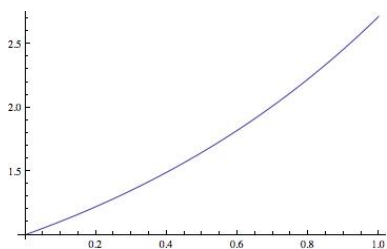


FIGURA 1.

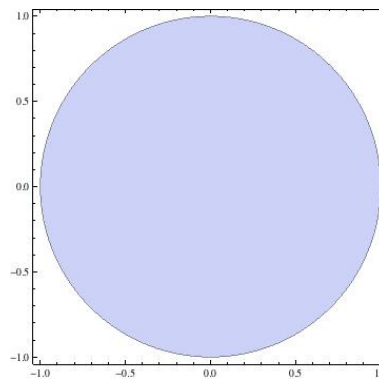


FIGURA 2.

Esempio 1.4. Siano $I = [0, 1]$ e $g(x) = e^x$ per ogni $x \in I$. Allora $\text{gr}(g)$ è il sostegno di una curva γ (fig. 1), che può essere parametrizzata anche da

$$\begin{cases} x = \ln(t) \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [1, e].$$

Una curva continua, semplice, chiusa è detta *curva di Jordan*. Per tali curve vale il seguente risultato¹:

Teorema 1.5. (Jordan) *Sia $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva di Jordan. Allora esistono $A, B \subset \mathbb{R}^2$ aperti connessi t.c.*

- (i) A è limitato, B è illimitato;
- (ii) $A \cup B = \mathbb{R}^2 \setminus S$;
- (iii) $\partial A = \partial B = S$.

La circonferenza dell'Esempio 1.2 divide il piano \mathbb{R}^2 nel cerchio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$$

e nel dominio illimitato

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R^2\}$$

(fig. 2). Per una curva di Jordan γ si definisce un orientamento *positivo* indipendente dalla parametrizzazione: esso è tale che un punto mobile, percorrendo il sostegno S , abbia ad ogni istante l'insieme A alla sua sinistra. Conviene dunque definire, per le curve di questo tipo, parametrizzazioni che inducono l'orientamento positivo (torneremo su questo concetto in [7]).

Definizione 1.6. *Due curve $\gamma_i = (\mathbf{r}_i, S_i)$ ($i = 1, 2$) sono dette equivalenti se esiste una funzione $\varphi \in C^1(I_1, I_2)$ t.c. per ogni $t \in I_1$*

- (i) $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\varphi(t))$;
- (ii) $D\varphi(t) > 0$.

Ovviamente, due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno e lo stesso orientamento. Ricordiamo che la funzione φ , detta *cambiamento di parametro*, è un diffeomorfismo (ved. [5]).

Esempio 1.7. Il *folium di Cartesio* è la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t(t - 1) \\ y = t(t - 1)(2t - 1) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

¹Nonostante la semplicità dell'enunciato, la dimostrazione del Teorema di Jordan è un problema delicato, quindi la omettiamo.

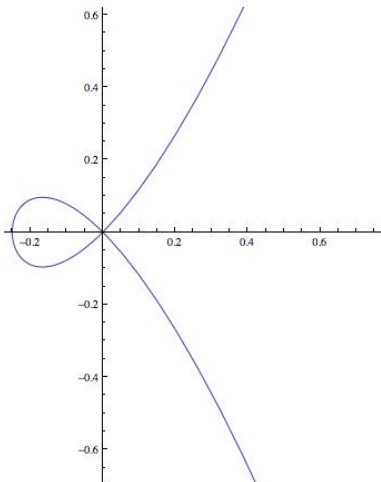


FIGURA 3.

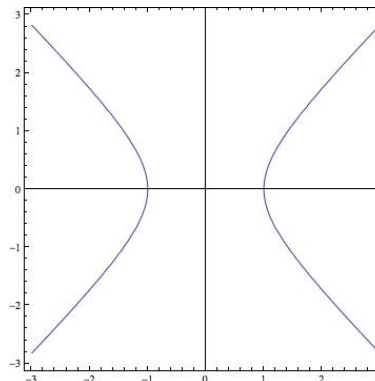


FIGURA 4.

Si tratta di una curva illimitata, continua, non semplice, non chiusa (fig. 3). Essa non ha un'equazione cartesiana unica, ma può essere descritta suddividendo l'intervallo \mathbb{R} di variazione del parametro in 4 parti. Per esempio, per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ si ricava l'equazione cartesiana

$$y = -x\sqrt{4x+1}.$$

Esempio 1.8. L'iperbole γ di equazione cartesiana

$$x^2 - y^2 = 1$$

(fig. 4) ha le parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = \pm \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove il segno $+$ nella prima equazione individua i punti del ramo destro di γ e il segno $-$ quelli del ramo sinistro.

Per le curve che presentano una forma 'rotante', può essere utile cambiare sistema di riferimento (ved. [4]) e convertire l'equazione parametrica (1.2) in un'equazione polare:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Esempio 1.9. La spirale di Archimede ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = (1+t) \cos(t) \\ y = (1+t) \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty[$$

ed è una curva illimitata, semplice, continua, composta da infinite spire corrispondenti agli intervalli $t \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{N}$) t.c. la distanza fra due spire consecutive è costante (fig. 5). La sua equazione polare è

$$\begin{cases} \rho = 1+t \\ \theta = t \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty[.$$

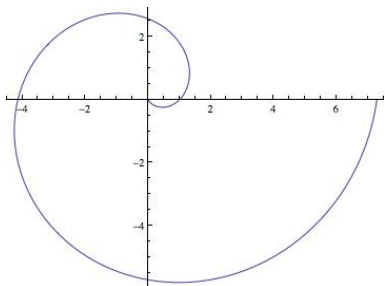


FIGURA 5.

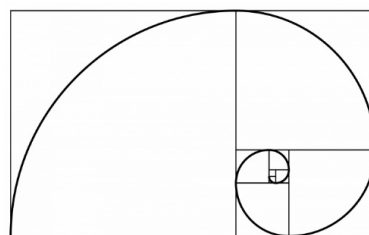


FIGURA 6.

Esempio 1.10. La *spirale logaritmica* ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty[.$$

La differenza principale rispetto alla spirale di Archimede è che la distanza fra due spire consecutive è crescente (fig. 6). Questa curva compare spesso in natura e si può costruire mediante una successione di rettangoli aurei (ved. [1]). La sua equazione polare è

$$\begin{cases} \rho = e^t \\ \theta = t \end{cases}, \quad t \in [-\pi, +\infty[.$$

La continuità della parametrizzazione non è sufficiente a garantire che una curva, intesa secondo la Definizione 1.1, corrisponda realmente al concetto geometrico di 'curva'. Per esempio, la *curva di Peano* è una curva $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ con $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua e $S = [0, 1]^2$ (la parametrizzazione si costruisce ricorsivamente in modo da 'occupare' progressivamente tutto il quadrato, fig. 7).

Definizione 1.11. Una curva $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ è detta *regolare* se $\mathbf{r} \in C^1(I)$ e $D\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$.

Se γ è una curva regolare di equazione parametrica (1.2) e $P = \mathbf{r}(t)$ è un punto del sostegno di γ , sono definiti il *versore tangente* e il *versore normale* a γ in P :

$$\tau(t) = \frac{Dx(t)\mathbf{i} + Dy(t)\mathbf{j}}{\sqrt{Dx(t)^2 + Dy(t)^2}}, \quad \nu(t) = \frac{-Dy(t)\mathbf{i} + Dx(t)\mathbf{j}}{\sqrt{Dx(t)^2 + Dy(t)^2}}$$

(fig. 8). Chiaramente la retta passante per P e parallela a $\tau(t)$ è tangente a γ , inoltre si ha $\tau(t) \cdot \nu(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

Osservazione 1.12. (Moto circolare uniforme) Sia $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ la circonferenza definita nell'Esempio 1.2 e sia P un punto che si muove lungo S con legge oraria descritta dalla parametrizzazione \mathbf{r} . All'istante $t \in I$, la velocità e l'accelerazione di P sono rispettivamente

$$\mathbf{v}(t) = -R \sin(t)\mathbf{i} + R \cos(t)\mathbf{j} = R\tau(t),$$

$$\mathbf{a}(t) = -R \cos(t)\mathbf{i} - R \sin(t)\mathbf{j} = -R\nu(t),$$

cioè la velocità di P è tangenziale e l'accelerazione è normale alla traiettoria. Questo avviene in tutti i *moti uniformi*, in cui la velocità scalare $|\mathbf{v}(t)|$ è costante, infatti si ha per ogni $t \in I$

$$D\mathbf{r}(t) \cdot D^2\mathbf{r}(t) = \frac{D[|D\mathbf{r}(t)|^2]}{2} = 0.$$

In particolare, se $S = \text{gr}(g)$, $g \in C^1(I)$, si ha

$$\tau(t) = \frac{\mathbf{i} + Dg(t)\mathbf{j}}{\sqrt{1 + Dg(t)^2}}, \quad \nu(t) = \frac{Dg(t)\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{1 + Dg(t)^2}}.$$

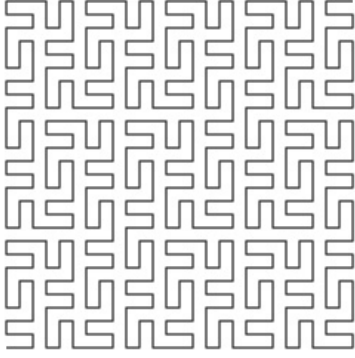


FIGURA 7.

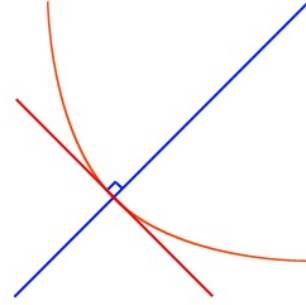


FIGURA 8.

Esempio 1.13. Consideriamo la parabola di equazione cartesiana $y = x^2$, che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\tau(t) = \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \quad \nu(t) = \frac{2t\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}}.$$

Introduciamo un metodo per 'unire' più curve: siano $\gamma_1 = (\mathbf{r}_1, S_1)$, $\gamma_2 = (\mathbf{r}_2, S_2)$ curve con $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b)$; allora il *concatenamento* di γ_1 e γ_2 è la curva $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ di parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \mathbf{r}_2(t) & \text{se } t \in [b, c] \end{cases}$$

e sostegno $S = S_1 \cup S_2$. Ovviamente, se γ_1 e γ_2 sono continue, tale è anche γ . Allo stesso modo si definisce il concatenamento di m curve, per ogni intero $m \geq 3$.

Definizione 1.14. Una curva γ è detta *regolare a tratti* se esistono $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ curve regolari ($m \in \mathbb{N}_0$) t.c. γ è il concatenamento di $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Costruiamo ora una definizione (e insieme una procedura di calcolo) per la *lunghezza* di una curva. Questa deve soddisfare i seguenti assiomi:

- (a) dati due punti P, Q , la curva di lunghezza minima passante per P e Q è il segmento PQ ;
- (b) la lunghezza è additiva rispetto al concatenamento di curve;
- (c) la lunghezza è invariante rispetto a parametrizzazioni equivalenti.

Denoteremo $L(\gamma)$ la lunghezza di una curva γ . Cominciamo dal caso più semplice: sia σ un segmento congiungente i punti $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$, che ha la seguente parametrizzazione:

$$\begin{cases} x = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y = (1-t)y_0 + ty_1 \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

Per l'assioma (a) poniamo

$$L(\sigma) = |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(0)| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Sia ora π una poligonale (o spezzata), ovvero il concatenamento di m segmenti consecutivi $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ denotiamo $\mathbf{r}_i : [a_{i-1}, a_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{r}_i(a_i) = \mathbf{r}_{i+1}(a_i)$) la parametrizzazione di σ_i .

Per **(b)** abbiamo necessariamente

$$L(\pi) = \sum_{i=1}^m L(\sigma_i) = \sum_{i=1}^m |\mathbf{r}_i(a_i) - \mathbf{r}_i(a_{i-1})|.$$

Sia infine $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva di parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Fissata una decomposizione $a = t_0 < t_1 \dots < t_m = b$, denotiamo π la poligonale di vertici $\mathbf{r}(t_i)$ ($i = 0, \dots, m$), sottesa a γ . Se

$$\sup\{L(\pi) : \pi \text{ poligonale sottesa a } \gamma\} = \ell < +\infty,$$

diciamo che γ è *rettificabile* e definiamo la sua lunghezza ponendo

$$L(\gamma) = \ell.$$

Ovviamente questa definizione verifica gli assiomi **(a)**, **(b)**, mentre non è ancora chiaro se essa verifichi anche **(c)**.

Teorema 1.15. *Sia $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva regolare. Allora γ è rettificabile e*

$$L(\gamma) = \int_a^b |D\mathbf{r}(t)| dt.$$

Dimostrazione. Fissata una decomposizione $a = t_0 < \dots < t_m = b$ e definita come sopra la poligonale di vertici $\mathbf{r}(t_0), \dots, \mathbf{r}(t_m)$, abbiamo

$$\begin{aligned} L(\pi) &= \sum_{i=1}^m |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} D\mathbf{r}(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} |D\mathbf{r}(t)| dt \\ &= \int_a^b |D\mathbf{r}(t)| dt, \end{aligned}$$

da cui deduciamo che γ è rettificabile e

$$L(\gamma) \leq \int_a^b |D\mathbf{r}(t)| dt.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c. $|D\mathbf{r}(t') - D\mathbf{r}(t'')| < \varepsilon$ per ogni $t', t'' \in [a, b]$, $|t' - t''| < \delta$ (Teorema di Cantor-Heine, ved. [4]). Sia $a = t_0 < \dots < t_m = b$ una decomposizione t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, e sia π la poligonale sottesa a γ indotta da tale decomposizione. Si ha allora per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |D\mathbf{r}(t)| dt &< \int_{t_{i-1}}^{t_i} |D\mathbf{r}(t_{i-1})| dt + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} D\mathbf{r}(t_{i-1}) dt \right| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} D\mathbf{r}(t) dt \right| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |D\mathbf{r}(t_{i-1}) - D\mathbf{r}(t)| dt + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\ &< |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| + 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |D\mathbf{r}(t)| dt &= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} |D\mathbf{r}(t)| dt \\
 &< \sum_{i=1}^m |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| + 2\varepsilon(b-a) \\
 &= L(\pi) + 2\varepsilon(b-a) \\
 &\leq L(\gamma) + 2\varepsilon(b-a).
 \end{aligned}$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si ha

$$L(\gamma) \geq \int_a^b |D\mathbf{r}(t)| dt,$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Dal Teorema 1.15 vediamo che anche l'assioma (c) è verificato, almeno per le curve regolari. Infatti, se $\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sono parametrizzazioni equivalenti (Definizione 1.6), esiste un diffeomorfismo $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ t.c. $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ \varphi$, da cui

$$\int_a^b |D\mathbf{r}_1(t)| dt = \int_c^d |D\mathbf{r}_2(\tau)| d\tau.$$

Esempio 1.16. Calcoliamo la lunghezza della circonferenza dell'Esempio 1.2:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin(t)^2 + R^2 \cos(t)^2} dt = 2\pi R.$$

In particolare, se γ è il grafico di una funzione $g \in C^1([a, b])$ si ha

$$(1.4) \quad L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + Dg(t)^2} dt.$$

Esempio 1.17. Sia γ l'arco di parabola di equazione cartesiana

$$y = x^2,$$

dove $x \in [0, 1]$. Si ha

$$\begin{aligned}
 L(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt \\
 &= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sqrt{1 + \sinh(s)^2} \frac{\cosh(s)}{2} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh(s)^2 ds \\
 &= \frac{1}{4} \left[s + \sinh(s) \cosh(s) \right]_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \\
 &= \frac{\ln(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5}}{4},
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la sostituzione

$$t = \frac{\sinh(s)}{2}.$$

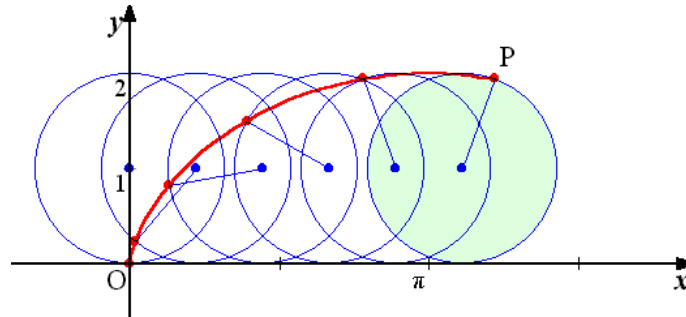


FIGURA 9.

Esempio 1.18. La *cicloide* è una curva γ che descrive il moto di un punto di una circonferenza quando questa 'rotola' lungo una retta (fig. 9). La sua parametrizzazione è

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcoliamo la lunghezza, usando la sostituzione $s = \cos(t)$:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin(t)^2} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos(t)} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_1^{-1} \frac{-1}{\sqrt{1+s}} ds \\ &= 8. \end{aligned}$$

Esempio 1.19. Consideriamo la curva dell'Esempio 1.10, ristretta all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. La sua lunghezza è

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{D(e^t \cos(t))^2 + D(e^t \sin(t))^2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t dt \\ &= \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1). \end{aligned}$$

Non sempre il Teorema 1.15 fornisce un integrale calcolabile in modo elementare:

Esempio 1.20. Sia γ l'ellisse di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0).$$

La sua lunghezza è espressa dall'*integrale ellittico*

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin(t)^2 + b^2 \cos(t)^2} dt,$$

che non ha una formula risolutiva elementare (per $a \neq b$).

Non si può rimuovere l'ipotesi che γ sia una curva regolare:

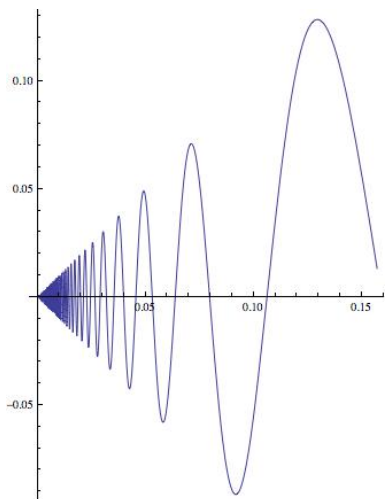


FIGURA 10.

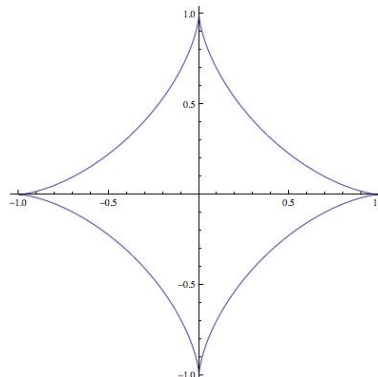


FIGURA 11.

Esempio 1.21. Sia γ il grafico della funzione $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}.$$

Osserviamo che g è continua in $[0, 1]$ ma non è derivabile in 0, e infatti γ ha lunghezza infinita (fig. 10).

Per l'assioma (b) la tesi del Teorema 1.15 si estende facilmente alle curve regolari a tratti:

Corollario 1.22. Sia $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva regolare a tratti. Allora γ è rettificabile e

$$L(\gamma) = \int_a^b |D\mathbf{r}(t)| dt.$$

Esempio 1.23. L'*astroide* è una curva γ regolare a tratti di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = \cos(t)^3 \\ y = \sin(t)^3 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Essa si ottiene concatenando 4 curve regolari $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ di pari lunghezza (fig. 11). È sufficiente calcolare la lunghezza di una di esse:

$$\begin{aligned} L(\gamma_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos(t)^4 \sin(t)^2 + 9 \sin(t)^4 \cos(t)^2} dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(t) dt \\ &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

da cui $L(\gamma) = 6$.

Esempio 1.24. La *catenaria* è una curva γ che rappresenta la posizione di equilibrio di una corda sospesa agli estremi e soggetta al suo peso (fig. 12). La sua parametrizzazione è

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cosh(t) \end{cases}, \quad t \in [-1, 1].$$

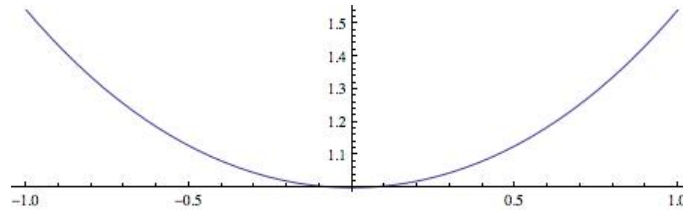


FIGURA 12.

Ne calcoliamo la lunghezza:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh(t)^2} dt \\ &= [\sinh(t)]_{-1}^1 \\ &= e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Sia $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva regolare, con $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $L(\gamma) = l$. Fissato $t \in]a, b[$, la restrizione di \mathbf{r} all'intervallo $[a, t]$ parametrizza una curva regolare di lunghezza

$$\sigma(t) = \int_a^t |D\mathbf{r}(\tau)| d\tau.$$

È così definita una funzione $\sigma \in C^1([a, b])$ t.c. $\sigma(0) = 0$, $\sigma(b) = l$, $D\sigma(t) = |D\mathbf{r}(t)| > 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Dunque σ è un diffeomorfismo, che individua per γ una parametrizzazione equivalente $\mathbf{r}' : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ detta *ascissa curvilinea*, definita univocamente da

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{r}(\sigma^{-1}(s)).$$

Osserviamo anche che per ogni $s \in [0, l]$

$$D\mathbf{r}'(s) = \tau(s).$$

L'ascissa curvilinea fornisce a una curva la sua parametrizzazione 'naturale' e consente di definire gli *integrali curvilinei del primo tipo*²:

Definizione 1.25. Siano $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ una curva regolare, $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto t.c. $S \subset A$, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. L'integrale di f lungo γ è definito da

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |D\mathbf{r}(t)| dt.$$

La Definizione 1.25 è ben posta in quanto il valore dell'integrale è invariante rispetto a parametrizzazioni equivalenti. Essa riconduce il calcolo di un integrale curvilineo a quello di un integrale ordinario (ved. [3]). Se $f(x, y) = 1$ per ogni $(x, y) \in A$, ovviamente otteniamo

$$\int_{\gamma} 1 ds = L(\gamma).$$

Esempio 1.26. Calcoliamo

$$\int_{\gamma} x^2 ds,$$

²In questo tipo di integrali curvilinei la funzione integranda è scalare, mentre nel secondo tipo essa è una funzione vettoriale (ved. [7]).

dove γ è la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \ln(t) \end{cases}, \quad t \in [1, e].$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x^2 ds &= \int_1^e t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt \\ &= \left[\frac{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^e \\ &= \frac{(e^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Esempio 1.27. Calcoliamo

$$\int_{\gamma} x ds,$$

dove γ è la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}, \quad t \in [1, 2].$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x ds &= \int_1^2 t \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}} dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{s^2}{2(s^2 - 1)} ds \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{s-1}{s+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \\ &= \frac{\sqrt{17} - \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{17} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \right), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la sostituzione $s = \sqrt{t^4 + 1}$.

In generale, se $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in A$, l'integrale di f lungo γ può rappresentare:

- (a) la massa totale di un filo sottile disposto lungo S con densità f ;
- (b) l'area della superficie (ved. Sezione 3) di equazione cartesiana

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in S, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Nello spirito dell'interpretazione (a), definiamo il *centro di massa* di una curva $\gamma = (\mathbf{r}, S)$ con densità f come il punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ di coordinate

$$(1.5) \quad \bar{x} = \frac{\int_{\gamma} x f(x, y) ds}{\int_{\gamma} f ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\gamma} y f(x, y) ds}{\int_{\gamma} f ds}.$$

Se $f(x, y) = 1$ per ogni $(x, y) \in A$, tale punto è detto *baricentro* e (1.5) diventa

$$\bar{x} = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} x ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} y ds.$$

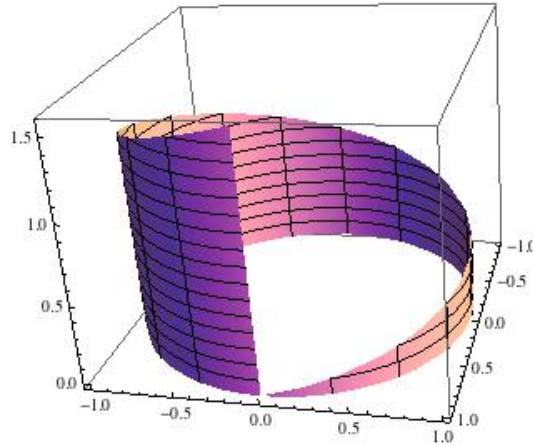


FIGURA 13.

Esempio 1.28. Determiniamo il baricentro della semi-circonferenza di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

Applicando (1.5) si ha

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t) \, dt = 0, \\ \bar{y} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \, dt = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Esempio 1.29. Calcoliamo l'area della superficie di equazione cartesiana

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right\}$$

(fig. 13). Detta γ la circonferenza giacente sul piano $z = 0$ di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = 1,$$

e posto $f(x, y) = \arctan(y/x)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, si può calcolare l'area richiesta come descritto nell'interpretazione (b):

$$\int_\gamma \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \, ds = \int_0^{2\pi} t \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} \, dt = 2\pi^2.$$

Esercizio 1.30. Descrivere, al variare di $k \in \mathbb{N}_0$, la curva γ_k di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = \cos(t)^k \\ y = \sin(t)^k \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Per quali valori di k la curva γ_k è regolare? Calcolare la lunghezza di γ_2 .

Esercizio 1.31. Siano γ_1, γ_2 le curve di parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1, 1], \quad \begin{cases} x = \cos(\pi - t) \\ y = \sin(\pi - t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi],$$

rispettivamente. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno la stessa lunghezza (senza calcolarla).

Esercizio 1.32. Calcolare la lunghezza della curva dell'Esempio 1.9, per $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.33. Calcolare la lunghezza della curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, \quad t \in [0, 2].$$

Esercizio 1.34. Calcolare l'integrale dell'Esempio 1.26 usando la parametrizzazione equivalente

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

Esercizio 1.35. Calcolare

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds,$$

dove γ è la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \cos(t) \\ y = t \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

Esercizio 1.36. Calcolare

$$\int_{\gamma} y^2 ds,$$

dove γ è la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \cos(t) - \sin(t) \\ y = t \sin(t) + \cos(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 1.37. Determinare il centro di simmetria dell'ellisse di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. CURVE IN \mathbb{R}^3

La teoria delle *curve nello spazio* non presenta differenze sostanziali rispetto a quella delle curve piane, quindi ne riportiamo solo rapidi cenni (per un'esposizione completa ved. [8], [9]). La Definizione 1.1 si estende nel modo più ovvio a una curva $\gamma = (\mathbf{r}, S)$, dove $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la parametrizzazione e $S = \mathbf{r}(I)$ il sostegno. L'equazione cartesiana diventa un sistema

$$(2.1) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

quella parametrica diventa

$$(2.2) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Esempio 2.1. La retta passante per $P_0 = (0, 1, -1)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$ ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

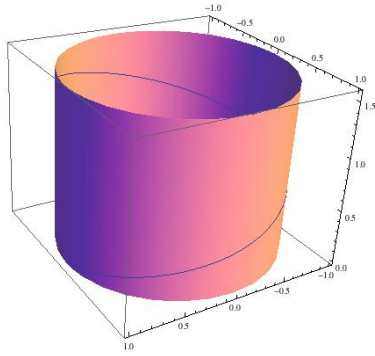


FIGURA 14.

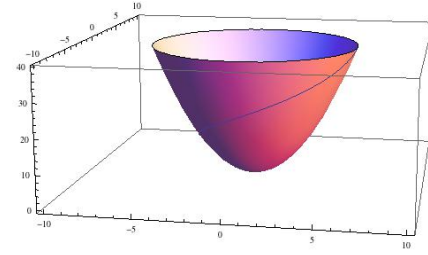


FIGURA 15.

Da essa si ricava facilmente l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Anche le Definizioni 1.6, 1.11, 1.14 si estendono in modo analogo, come pure i concetti di lunghezza, ascissa curvilinea e integrale curvilineo del primo tipo e il Teorema 1.15, sempre ricordando che nel caso tridimensionale si ha

$$D\mathbf{r}(t) = Dx(t)\mathbf{i} + Dy(t)\mathbf{j} + Dz(t)\mathbf{k}.$$

Dati una curva regolare γ e un suo punto $P = \mathbf{r}(t)$, il versore tangente a γ in P è

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{Dx(t)\mathbf{i} + Dy(t)\mathbf{j} + Dz(t)\mathbf{k}}{\sqrt{Dx(t)^2 + Dy(t)^2 + Dz(t)^2}},$$

mentre non esiste un versore normale univocamente definito (in P è individuato un piano normale a $\boldsymbol{\tau}(t)$).

Esempio 2.2. L'*elica cilindrica* è una curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ z = Pt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove $R, P > 0$ sono detti raggio e passo, rispettivamente. Si tratta di una curva regolare, illimitata (fig. 14). Restringendo a $[0, 2\pi]$ l'intervallo di variazione del parametro t , possiamo calcolare la lunghezza di una 'spira' di γ mediante l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} 1 \, ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2 + P^2} \, dt \\ &= 2\pi \sqrt{R^2 + P^2}. \end{aligned}$$

Il versore tangente a γ è per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{-R \sin(t)\mathbf{i} + R \cos(t)\mathbf{j} + P\mathbf{k}}{\sqrt{R^2 + P^2}}.$$

Esempio 2.3. Calcoliamo

$$\int_{\gamma} \sqrt{z} \, ds,$$

dove γ è la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \cos(t) \\ y = t \sin(t) \\ z = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(fig. 15). Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sqrt{z} \, ds &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t))^2 + (2t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{1 + 5t^2} \, dt \\ &= \left[\frac{1}{15} (1 + 5t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{(1 + 20\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{15}. \end{aligned}$$

Osservazione 2.4. Ovviamente, alcune curve in \mathbb{R}^3 hanno dimensione 'intrinseca' 2, ovvero hanno supporto giacente su un piano α . È il caso della parabola γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t^2, \end{cases}$$

che giace sul piano α di equazione cartesiana $x + y = 1$. In questo caso, è conveniente cambiare il sistema di riferimento in modo da far coincidere α col piano $z = 0$, quindi studiare la curva secondo i metodi esposti nella Sezione 1 (invece le curve degli Esempi 2.2, 2.3 non sono riducibili a curve piane in quanto giacciono su un cilindro e su un paraboloido, rispettivamente).

La nozione di curva di Jordan e il Teorema 1.5 non hanno corrispettivi nello spazio. Come vedremo nella Sezione 3, una curva continua, semplice, chiusa in \mathbb{R}^3 si può vedere come il bordo di una superficie limitata (ma questa non è unica).

Esercizio 2.5. Determinare il centro di simmetria della curva dell'Esempio 2.2.

Esercizio 2.6. Calcolare la lunghezza della curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \\ z = \ln(t) \end{cases}, \quad t \in [1, 2].$$

Esercizio 2.7. Calcolare la lunghezza della curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \sin(t) \\ z = e^t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. SUPERFICI IN \mathbb{R}^3

Anche il concetto di *superficie* si presta a una spiegazione intuitiva: si tratta di un oggetto di dimensione 2 immerso in uno spazio di dimensione 3, e dotato in ogni punto di una certa curvatura. Un punto P , vincolato a una superficie, ha un moto caratterizzato da *due gradi di libertà*, come un viaggiatore che definisce la propria posizione sulla superficie terrestre mediante latitudine e longitudine. Formalmente:

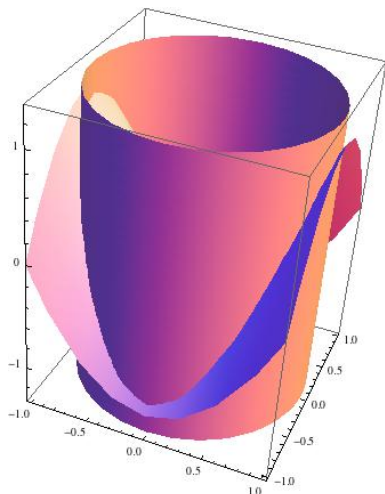


FIGURA 16.

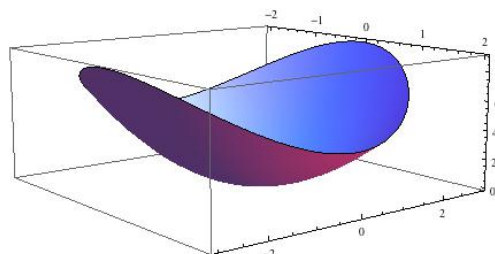


FIGURA 17.

Definizione 3.1. Una superficie è una coppia $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$, dove $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) è una funzione detta parametrizzazione e $S = \mathbf{r}(D)$ un insieme detto sostegno. La superficie Σ è detta

- (i) semplice se $\mathbf{r}(u_1, v_1) \neq \mathbf{r}(u_2, v_2)$ per ogni $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$, $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$;
- (ii) continua se \mathbf{r} è continua;
- (iii) limitata se S è limitato.

Il sostegno S viene di solito indicato mediante un'equazione cartesiana

$$(3.1) \quad f(x, y, z) = 0,$$

e la parametrizzazione mediante un'equazione parametrica

$$(3.2) \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D.$$

Confrontando (2.1) e (3.1), si vede come una curva in \mathbb{R}^3 venga descritta come l'intersezione di due superfici.

Esempio 3.2. Consideriamo le superfici di equazioni cartesiane

$$x^2 - y^2 - z = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

la cui intersezione è una curva γ (fig. 16) di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Una nozione delicata è quella di *bordo* di una superficie Σ , di parametrizzazione $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$: questo si può definire come una curva $\partial\Sigma$, con parametrizzazione ottenuta per composizione da una parametrizzazione di ∂D e \mathbf{r} ³.

³La notazione $\partial\Sigma$ non crei confusione: il bordo di una superficie *non coincide* con la frontiera del suo sostegno nella topologia di \mathbb{R}^3 (ved. [4]), anzi di solito si ha $S = \partial S$.

Esempio 3.3. Consideriamo la superficie Σ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}, \quad (u, v) \in D,$$

dove

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

Allora $\partial\Sigma$ (fig. 17) è la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 3 \sin(t) \\ z = 4 \cos(t)^2 + 9 \sin(t)^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Siano $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ una superficie continua, semplice, e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di S , univocamente individuato da una coppia di valori $(u_0, v_0) \in D$ dei parametri. Le *linee coordinate* passanti per P_0 sono le curve γ_u, γ_v di parametrizzazioni

$$\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases},$$

per $u \in I, v \in J$ rispettivamente ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli). Supponiamo che $\mathbf{r} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ con $D_u \mathbf{r}, D_v \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ in D , allora γ_u, γ_v sono curve regolari passanti per P_0 e in tale punto le equazioni parametriche delle rispettive rette tangenti $\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_v$ sono

$$\begin{cases} x = x_0 + D_u x(u_0, v_0)(u - u_0) \\ y = y_0 + D_u y(u_0, v_0)(u - u_0) \\ z = z_0 + D_u z(u_0, v_0)(u - u_0) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_0 + D_v x(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y = y_0 + D_v y(u_0, v_0)(v - v_0) \\ z = z_0 + D_v z(u_0, v_0)(v - v_0) \end{cases},$$

rispettivamente. Se vale la condizione

$$(3.3) \quad D_u \mathbf{r}(u_0, v_0) \times D_v \mathbf{r}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0},$$

allora le rette $\mathcal{T}_u, \mathcal{T}_v$ sono incidenti e individuano un piano α detto *piano tangente* a Σ in P_0 . Il piano α è individuato, oltre che dal passaggio per P_0 , dal *versore normale*

$$(3.4) \quad \nu(u_0, v_0) = \frac{D_u \mathbf{r}(u_0, v_0) \times D_v \mathbf{r}(u_0, v_0)}{|D_u \mathbf{r}(u_0, v_0) \times D_v \mathbf{r}(u_0, v_0)|},$$

ovvero l'equazione cartesiana di α è

$$(3.5) \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nu(u_0, v_0) = 0.$$

Definizione 3.4. Siano $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ e P_0 come sopra t.c. $\mathbf{r} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ e valga (3.3), allora P_0 è detto *punto regolare* di Σ , altrimenti è detto *punto singolare*. Se ogni punto di Σ è regolare, diremo che Σ è una *superficie regolare*.

Talvolta nella Definizione 3.4 si fa eccezione per i punti di $\partial\Sigma$.

Esempio 3.5. Sia Σ la sfera di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (R > 0).$$

Possiamo dotare Σ di una parametrizzazione usando le coordinate polari sferiche introdotte in [4]. Poniamo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi[$ e

$$\begin{cases} x = R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = R \cos(\varphi) \end{cases}, (\varphi, \theta) \in D.$$

Chiaramente la parametrizzazione \mathbf{r} così definita è di classe C^1 . Verifichiamo la condizione (3.3): si ha

$$\begin{aligned} D_\varphi \mathbf{r}(\varphi, \theta) \times D_\theta \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R \cos(\varphi) \cos(\theta) & R \cos(\varphi) \sin(\theta) & -R \sin(\varphi) \\ -R \sin(\varphi) \sin(\theta) & R \sin(\varphi) \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= R^2 \sin(\varphi)^2 \cos(\theta) \mathbf{i} + R^2 \sin(\varphi)^2 \sin(\theta) \mathbf{j} + R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

dunque (3.3) è verificata per $\varphi \in]0, \pi[$, ovvero gli unici punti singolari di Σ sono i 'poli' $(0, 0, \pm R)$. In ogni altro punto, il versore normale è

$$\nu(\varphi, \theta) = \sin(\varphi) \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\varphi) \sin(\theta) \mathbf{j} + \cos(\varphi) \mathbf{k}$$

(notiamo che $\nu = \mathbf{r}/R$). Da questo, mediante (3.5), si può ricavare il piano tangente in ogni punto di Σ (diverso dai poli), per esempio il piano tangente in $(R, 0, 0)$ (cioè $(\varphi, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$) ha equazione cartesiana

$$x = R.$$

Infine, il bordo $\partial\Sigma$ è il 'meridiano' corrispondente a $\theta = 0$.

Osservazione 3.6. Come si vede dall'Esempio 3.5, le definizioni di punto e superficie regolare e di bordo dipendono dalla parametrizzazione adottata (basterebbe adottare un'altra parametrizzazione per la sfera per avere un bordo e punti singolari differenti). Questo prova che le nozioni ora introdotte non descrivono proprietà del sostegno S , ma della superficie parametrizzata Σ .

Una classe importante di superfici è quella dei *grafici* di funzioni reali di due variabili: siano $D \subset \mathbb{R}^2$, $g \in C^1(D)$ e Σ la superficie di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = g(x, y) \end{cases}, (x, y) \in D.$$

Si vede facilmente che Σ è una superficie regolare con versore normale

$$\nu(x, y) = \frac{-D_x g(x, y) \mathbf{i} - D_y g(x, y) \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{|\nabla g(x, y)|^2 + 1}}.$$

Se ne ricava l'equazione del piano tangente in un punto $P_0 = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$:

$$-D_x g(x_0, y_0)(x - x_0) - D_y g(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - g(x_0, y_0)) = 0,$$

che ovviamente equivale a quella introdotta in [5].

Esempio 3.7. Il paraboloide dell'Esempio 3.3 è una superficie regolare. Nel punto di coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ essa ha piano tangente

$$x + y - z = \frac{1}{2}.$$

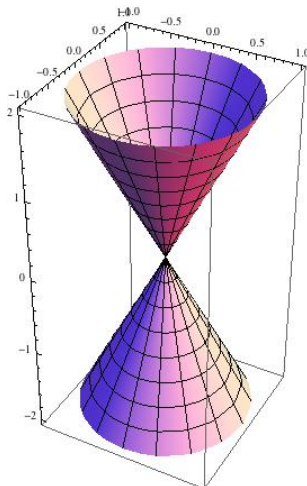


FIGURA 18.

Un'altra classe importante è quella delle *superfici di rotazione*: sia γ una curva regolare giacente sul piano $\vec{x}\vec{z}$, di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

La rotazione di γ intorno all'asse \vec{z} descrive una superficie Σ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x(t) \cos(\theta) \\ y = x(t) \sin(\theta) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad (t, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi[.$$

Si vede facilmente che Σ ha, in ogni suo punto regolare, versore normale

$$\nu(t, \theta) = \frac{-x(t)Dz(t) \cos(\theta)\mathbf{i} - x(t)Dz(t) \sin(\theta)\mathbf{j} + x(t)Dx(t)\mathbf{k}}{|x(t)|\sqrt{Dx(t)^2 + Dz(t)^2}}.$$

Esempio 3.8. Il cono (a due falde) descritto dalla rotazione intorno a \vec{z} della retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} z = mx \\ y = 0 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

è una superficie Σ (fig. 18) di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \cos(\theta) \\ y = t \sin(\theta) \\ z = mt \end{cases}, \quad (t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[.$$

dotata in ogni punto (tranne $(0, 0, 0)$) di versore normale

$$\nu(t, \theta) = \frac{-mt \cos(\theta)\mathbf{i} + mt \sin(\theta)\mathbf{j} + t\mathbf{k}}{|t|\sqrt{1 + m^2}},$$

da cui si ricava il piano tangente. Per esempio, posto $m = 2$, il piano tangente al cono Σ in $(1, 0, 2)$ ha equazione cartesiana

$$z - 2x = 0.$$

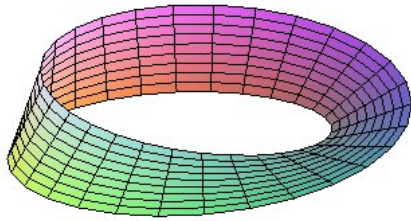


FIGURA 19.

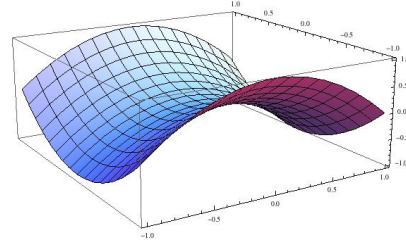


FIGURA 20.

Osservazione 3.9. Anche per le superfici può essere utile scrivere l'equazione polare usando le coordinate sferiche o cilindriche di \mathbb{R}^3 (ved. [4]). In coordinate sferiche, ovviamente, la superficie dell'Esempio 3.5 ha equazione

$$\rho = R,$$

mentre il cono dell'Esempio 3.8 si descrive in coordinate cilindriche mediante l'equazione

$$\zeta = m\rho.$$

Accenniamo ora al problema dell'orientamento di una superficie:

Definizione 3.10. Una superficie regolare $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ è detta orientabile se, per ogni curva regolare semplice chiusa $\gamma = (\mathbf{p}, S')$ con $S' \subset S$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \nu(\mathbf{p}(t)) = \nu(\mathbf{p}(a)),$$

dove $\nu(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è il versore normale a Σ in ogni punto $(x, y, z) \in S$.

La Definizione 3.10 non è di immediata comprensione. Basti pensare che esistono superfici regolari, come il nastro di Möbius (fig. 19) che la smentiscono: su queste superfici, è possibile descrivere a partire da un punto P una curva regolare semplice che termina in P ma 'dalla parte opposta' rispetto al punto di partenza. Se Σ è una superficie orientabile, allora in ogni punto $P \in S$ si applicano due versori normali, ν definito da (3.4) e $-\nu$: questi individuano la pagina positiva e la pagina negativa di Σ , rispettivamente.

Se Σ è una superficie orientabile dotata di bordo $\partial\Sigma$, adotteremo la seguente convenzione: l'orientamento positivo di $\partial\Sigma$ è quello t.c. un punto P che percorre $\partial\Sigma$ sulla pagina positiva trova i punti di Σ alla sua sinistra (questa convenzione si può interpretare come una versione tridimensionale dell'orientamento introdotto nella Sezione 1 per le curve di Jordan).

Esempio 3.11. Sia Σ la superficie di parametrizzazione⁴

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = y^2 - x^2 \end{cases}, \quad (x, y) \in [-1, 1]^2.$$

Si ha per ogni $(x, y) \in [-1, 1]^2$

$$\nu(x, y) = \frac{2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

dunque la pagina positiva di Σ è rivolta verso l'alto e l'orientamento positivo di $\partial\Sigma$ è quello anti-orario visto dall'alto (fig. 20).

⁴Denotiamo x, y sia i parametri sia le prima due componenti di \mathbf{r} con un lieve abuso di notazione.

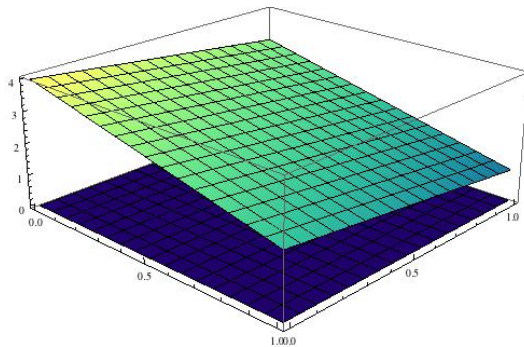


FIGURA 21.

Ritorniamo sul problema dell'orientamento di una superficie e del suo bordo in [7].

Definiamo ora l'area di una superficie Σ (denotata $A(\Sigma)$), cominciando dal caso più semplice: siano $D = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo, α il piano in \mathbb{R}^3 passante per $P_0 = (a, c, h)$ ($h > 0$) e normale al vettore $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ ($\nu_3 > 0$), e Σ la superficie avente per sostegno la parte di α che si proietta su D , ovvero

$$S = \{(x, y, z) \in \alpha : (x, y) \in D\},$$

e parametrizzazione lineare $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = h - \frac{\nu_1}{\nu_3}(u - a) - \frac{\nu_2}{\nu_3}(v - c) \end{cases}, \quad (u, v) \in D$$

(fig. 21). Dunque Σ è un parallelogramma, la cui area è nota dalla geometria elementare:

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= |(\mathbf{r}(b, c) - \mathbf{r}(a, c)) \times (\mathbf{r}(a, d) - \mathbf{r}(a, c))| \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b - a & 0 & -\frac{\nu_1}{\nu_3}(b - a) \\ 0 & d - c & -\frac{\nu_2}{\nu_3}(d - c) \end{vmatrix} \\ &= \left| (b - a)(d - c) \frac{\nu_1}{\nu_3} \mathbf{i} + (b - a)(d - c) \frac{\nu_2}{\nu_3} \mathbf{j} + (b - a)(d - c) \mathbf{k} \right| \\ &= (b - a)(d - c) \sqrt{\frac{\nu_1^2}{\nu_3^2} + \frac{\nu_2^2}{\nu_3^2} + 1} \\ &= \frac{(b - a)(d - c)}{\nu_3} \end{aligned}$$

(ricordiamo che $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$). Osserviamo che si ha per ogni $(u, v) \in D$

$$D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v) = \frac{\nu_1}{\nu_3} \mathbf{i} + \frac{\nu_2}{\nu_3} \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

da cui

$$\iint_D |D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)| \, du \, dv = \iint_D \frac{1}{\nu_3} \, du \, dv = \frac{(b - a)(d - c)}{\nu_3}.$$

In analogia con questo caso, definiamo l'area di una superficie generale come segue:

Definizione 3.12. Sia $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ una superficie regolare, semplice, limitata. La sua area è

$$A(\Sigma) = \iint_D |D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)| \, du \, dv.$$

La funzione integranda $|D_u \mathbf{r} \times D_v \mathbf{r}|$ è detta *elemento d'area* e misura, per ogni $(u, v) \in D$, la pendenza (o inclinazione) di Σ nel punto $\mathbf{r}(u, v)$. Osserviamo che, per la Definizione 3.4, l'elemento d'area è una funzione (strettamente) positiva. La Definizione 3.12 è ben posta, in quanto

- $A(\Sigma)$ è invariante per parametrizzazioni equivalenti;
- se $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 0)$, si ha $|D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)| = 1$ per ogni $(u, v) \in D$, da cui (ved. [6])

$$A(\Sigma) = |D|$$

Esempio 3.13. La sfera dell'Esempio 3.5 ha area

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi R^2 [-\cos(\varphi)]_0^\pi \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Esaminiamo i due casi particolari visti in precedenza. Se Σ è il grafico di una funzione $g \in C^1(D)$, dalla Definizione 3.12 si ricava

$$(3.6) \quad A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{|\nabla g(x, y)|^2 + 1} dx dy.$$

Esempio 3.14. Sia Σ la parte del paraboloide di equazione cartesiana

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

che si proietta sul cerchio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Posto $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, per (3.6) si ha

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4\rho^2 + 1} \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12} (4\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} (\sqrt{125} - 1). \end{aligned}$$

Se Σ è la superficie descritta dalla rotazione intorno all'asse \vec{z} della curva γ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

allora dalla Definizione 3.12 si ricava

$$(3.7) \quad A(\Sigma) = 2\pi \int_a^b |x(t)| \sqrt{Dx(t)^2 + Dz(t)^2} dt.$$

Ovviamente, la formula (3.7) si adatta ai casi in cui la rotazione ha un'ampiezza $\theta \in]0, 2\pi[$ o avviene intorno a un altro asse (come?).

Esempio 3.15. Sia Σ il cono descritto dalla rotazione intorno a \vec{z} del segmento di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

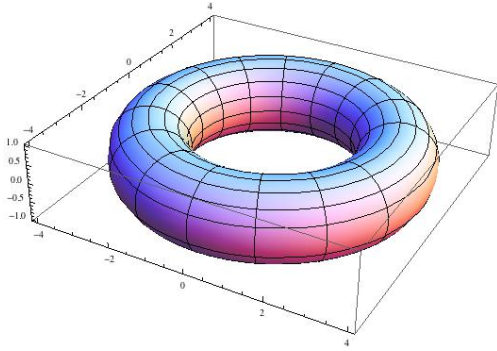


FIGURA 22.

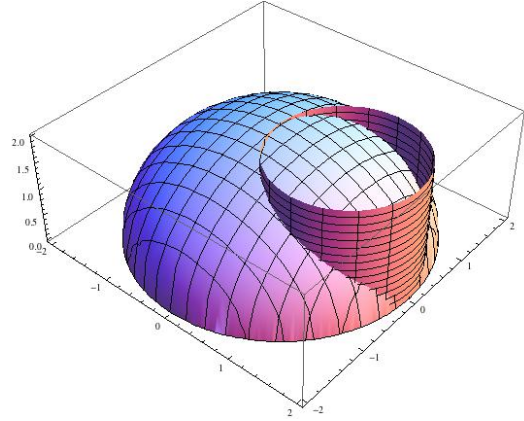


FIGURA 23.

Per (3.7) si ha

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2t} dt = \sqrt{2}\pi.$$

Esempio 3.16. Sia Σ il *toro* di equazione cartesiana

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2 \quad (0 < r < R).$$

Possiamo caratterizzare Σ come la superficie descritta dalla rotazione intorno a \vec{z} della circonferenza di centro $C = (R, 0, 0)$ e raggio r giacente sul piano $\vec{x}\vec{z}$ (fig. 22), che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = R + r \cos(t) \\ y = 0 \\ z = r \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Applicando (3.7) abbiamo

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r \cos(t)) \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt \\ &= 2\pi r [Rt + r \sin(t)]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

Esempio 3.17. La *finestra di Viviani* è una superficie Σ , definita come la parte della sfera di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

delimitata dal piano $z = 0$ e dal cilindro di equazione cartesiana

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(fig. 23). Al fine di applicare (3.6), definiamo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

e poniamo per ogni $(x, y) \in D$

$$g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

così che $\Sigma = \text{gr}(g)$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Passiamo ora alle coordinate polari, caratterizzando D come

$$D' = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, 0 \leq \rho \leq 2 \cos(\theta) \right\},$$

e proseguiamo:

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_{D'} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\sqrt{4-\rho^2} \right]_0^{2\cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4|\sin(\theta)|) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (4 + 4\sin(\theta)) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4\sin(\theta)) d\theta \\ &= [4\theta - 4\cos(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [4\theta + 4\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4(\pi - 2). \end{aligned}$$

Esempio 3.18. Calcoliamo l'area della superficie Σ di equazione cartesiana

$$xy = z$$

che si proietta sul cerchio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Applicando (3.6) alla funzione $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = xy$, si ha

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{14\pi}{3}. \end{aligned}$$

Esempio 3.19. L'*elicoide* è la superficie Σ di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = \theta \end{cases}, \quad (\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[$$

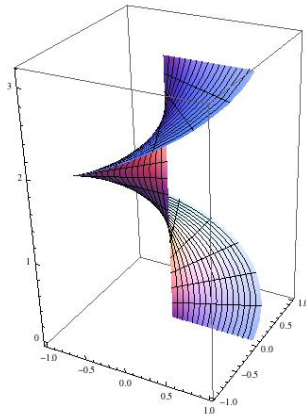


FIGURA 24.

(fig. 24). Ricaviamo l'elemento d'area:

$$\begin{aligned} D_\rho \mathbf{r}(\rho, \theta) \times D_\theta \mathbf{r}(\rho, \theta) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \sin(\theta)\mathbf{i} - \cos(\theta)\mathbf{j} + \rho\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Applicando la Definizione 3.12, abbiamo

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) + \rho^2} d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{\sinh^2(t) + 1} \cosh(t) dt \\ &= 2\pi \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \cosh^2(t) dt \\ &= 2\pi \left[\frac{t + \sinh(t) \cosh(t)}{2} \right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \\ &= \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la sostituzione $\rho = \sinh(t)$ e le proprietà delle funzioni iperboliche.

Come nel caso delle curve, anche per le superfici la Definizione 3.12 si può estendere attribuendo una 'densità' variabile ai punti. Vengono così introdotti gli *integrali superficiali del primo tipo*⁵

Definizione 3.20. Siano $\Sigma = (\mathbf{r}, S)$ una superficie regolare, $A \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto t.c. $S \subset A$, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. L'integrale di f su Σ è definito da

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |D_u \mathbf{r}(u, v) \times D_v \mathbf{r}(u, v)| du dv.$$

La Definizione 3.20 è ben posta in quanto il valore dell'integrale è invariante rispetto a parametrizzazioni equivalenti. Essa riconduce il calcolo di un integrale superficiale a quello di un integrale doppio

⁵Anche in questo caso, il 'primo tipo' corrisponde a una funzione integranda scalare e il 'secondo tipo' a una funzione integranda vettoriale (ved. [7]).

(ved. [6]). Se $f(x, y, z) = 1$ per ogni $(x, y, z) \in A$, si ottiene

$$\iint_{\Sigma} 1 \, dS = A(\Sigma).$$

Come al solito, la Definizione 3.20 si particularizza al caso dei grafici mediante la formula

$$(3.8) \quad \iint_{\Sigma} f \, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{|\nabla g(x, y)|^2 + 1} \, dx \, dy,$$

e al caso delle superfici di rotazione mediante la formula

$$(3.9) \quad \iint_{\Sigma} f \, dS = 2\pi \int_a^b f(x(t), 0, z(t)) |x(t)| \sqrt{Dx(t)^2 + Dz(t)^2} \, dt,$$

dove si è fatta l'ulteriore ipotesi che f abbia una *simmetria assiale*, ovvero che $f(x, y, z) = f(x', y', z)$ per ogni $(x, y, z), (x', y', z) \in \mathbb{R}^3$ t.c. $x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$.

Esempio 3.21. Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad g(x, y) = xy,$$

rispettivamente, e sia $\Sigma = \text{gr}(g)$. Applicando (3.8) si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f \, dS &= \iint_{[0,1]^2} \frac{x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \sqrt{1 + y^2 + x^2} \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) \, dy \\ &= \left[\frac{y + y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esempio 3.22. Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = z^2$ e Σ il cilindro descritto dalla rotazione intorno a z del segmento di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

Applicando (3.9) si ha

$$\iint_{\Sigma} f \, dS = 2\pi \int_0^1 t^2 \sqrt{1} \, dt = \frac{2\pi}{3}.$$

Esercizio 3.23. Scrivere una parametrizzazione dell'ellissoide di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,$$

quindi determinare il piano tangente a Σ nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

Esercizio 3.24. Scrivere una parametrizzazione per la superficie di equazione cartesiana

$$x^3 - 2e^y - z = 0,$$

quindi determinare il piano tangente nel punto $(0, 0, -2)$

Esercizio 3.25. Scrivere una parametrizzazione del toro dell'Esempio 3.16. Quali sono i suoi punti singolari?

Esercizio 3.26. Ricalcolare le aree degli Esempi 3.15 e 3.16 senza usare le formule per le superfici di rotazione.

Esercizio 3.27. Calcolare l'area laterale del tronco di cono di raggi 1 e 2 e di altezza 1.

Esercizio 3.28. Calcolare l'area della superficie di equazione cartesiana $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, che si proietta sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Esercizio 3.29. Calcolare l'area della superficie il cui sostegno è

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Esercizio 3.30. Calcolare l'area della superficie il cui sostegno è

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z = y^2 - x^2\}.$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. IANNIZZOTTO, Successioni e serie numeriche.
- [2] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale.
- [3] A. IANNIZZOTTO, Calcolo integrale.
- [4] A. IANNIZZOTTO, Funzioni di più variabili reali.
- [5] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale in più variabili reali.
- [6] A. IANNIZZOTTO, Calcolo integrale in più variabili reali.
- [7] A. IANNIZZOTTO, Campi vettoriali.
- [8] C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica 2, Zanichelli (2016).
- [9] S. SALSA, A. SQUELLATI, Esercizi di analisi matematica 2, Zanichelli (2011).
- [10] E. SCHLESINGER, Algebra lineare e geometria, Zanichelli (2011).

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
 VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
E-mail address: `antonio.iannizzotto@unica.it`