

CALCOLO INTEGRALE IN PIÙ VARIABILI REALI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Misura secondo Peano-Jordan in \mathbb{R}^n . Integrali doppi e tripli: funzioni integrabili secondo Riemann, formule di riduzione, domini normali, domini regolari, cambiamento di variabili. Calcolo di aree e volumi: solidi di rotazione. Integrali generalizzati. Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

INDICE

1. Misura in \mathbb{R}^n	1
2. Integrali doppi	4
3. Integrali tripli	17
4. Integrali generalizzati	27
Riferimenti bibliografici	30

Versione del 26 dicembre 2020

1. MISURA IN \mathbb{R}^n

La scultura si prefigge la ricostruzione astratta dei piani e dei volumi che determinano le forme, non il loro valore figurativo.

U. BOCCIONI

La teoria dell'integrazione secondo Riemann (non è l'unica) serve innanzitutto a determinare l'estensione di un oggetto in uno spazio euclideo. Tale estensione corrisponde nello spazio di dimensione 2 alla nozione geometrica di *area*, e nello spazio di dimensione 3 a quella di *volume*. Più in generale, mediante un integrale si calcola la quantità totale di una grandezza diffusa in una regione spaziale con *densità* variabile da punto a punto. Per i dettagli e alcune dimostrazioni, rimandiamo a [6].

Per definire rigorosamente il concetto di 'estensione', stabiliamo una *teoria della misura* (secondo Peano-Jordan) in \mathbb{R}^n , che generalizza quella per \mathbb{R}^2 introdotta in [2]. In analogia col caso bidimensionale, chiameremo *rettangoli* gli insiemi del tipo

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i],$$

dove $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ e $a_i \leq b_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. La misura di R è definita da

$$|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Un *pluri-rettangolo* è un insieme $P \subset \mathbb{R}^n$ che si può esprimere nella forma

$$P = \bigcup_{j=1}^k R_j,$$

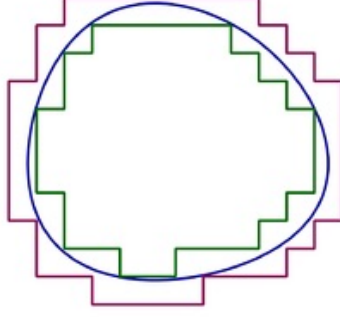


FIGURA 1.

dove $R_1, \dots, R_k \subset \mathbb{R}^n$ sono rettangoli t.c. $|R_j \cap R_h| = 0$ per ogni $j, h \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq h$. Denotiamo \mathcal{P} la famiglia dei pluri-rettangoli di \mathbb{R}^n . La misura di P è definita da

$$|P| = \sum_{j=1}^k |R_j|$$

(per ragioni formali, assumiamo anche $\emptyset \in \mathcal{P}$ con $|\emptyset| = 0$). Sia ora $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Definiamo due famiglie di pluri-rettangoli:

$$\sigma = \{P \in \mathcal{P} : P \subseteq A\}, \quad \Sigma = \{Q \in \mathcal{P} : A \subseteq Q\}$$

(fig. 1). Chiaramente si ha

$$\sup_{P \in \sigma} |P| \leq \inf_{Q \in \Sigma} |Q|.$$

Diremo che A è *misurabile* se

$$\sup_{P \in \sigma} |P| = \inf_{Q \in \Sigma} |Q| = m,$$

e in tal caso la sua misura è definita da

$$|A| = m.$$

Infine, se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è illimitato, diremo che A è misurabile se $A \cap [-k, k]^n$ è misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$, e porremo

$$|A| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |A \cap [-k, k]^n|$$

(può essere $+\infty$). La famiglia degli insiemi misurabili in \mathbb{R}^n si denota $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Nel caso $n = 2$ la misura di un insieme è anche detta *area*, nel caso $n = 3$ *volume*. La misura gode di alcune proprietà formali, analoghe a quelle viste in [2]:

Lemma 1.1. *Siano $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre:*

- (i) $|A| \geq 0$;
- (ii) $|A \cup B| \leq |A| + |B|$;
- (iii) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
- (iv) se $|A \cap B| = 0$, $|A \cup B| = |A| + |B|$;
- (v) se $A \subseteq B$, $|A| \leq |B|$;
- (vi) se $A \subseteq B$, $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

Osserviamo che non tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n sono misurabili.

Esempio 1.2. (Insieme di Dirichlet) Sia

$$A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Si vede facilmente che A non contiene alcun pluri-rettangolo di misura positiva, mentre ogni pluri-rettangolo Q contenente A contiene anche l'insieme $\text{cl}(A) = [0, 1]^2$, così che $|Q| \geq 1$. Dunque si ha in questo caso

$$\sup \sigma = 0, \quad \inf \Sigma = 1$$

e A non è misurabile.

Inoltre, esistono insiemi *compatti* non misurabili (insieme di Smith-Volterra-Cantor, dalla complessa costruzione). Insomma, la teoria della misura qui introdotta non è del tutto soddisfacente sul piano astratto, tuttavia essa è sufficiente per gli scopi della presente trattazione. Una famiglia importante di insiemi misurabili:

Lemma 1.3. *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ compatto, misurabile, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $\text{gr}(f)$ è misurabile e $|\text{gr}(f)| = 0$.*

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $f(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per il Teorema di Cantor-Heine (ved. [3]) la funzione f è uniformemente continua, quindi possiamo decomporre A come segue: esistono R_1, \dots, R_k rettangoli t.c. $|R_i \cap R_j| = 0$ per ogni $i \neq j$ e, posto

$$m_i = \min_{A \cap R_i} f, \quad M_i = \max_{A \cap R_i} f,$$

si ha $M_i - m_i < \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$. Poiché A è misurabile, inoltre, possiamo scegliere i rettangoli in modo tale che, posto

$$Q = \bigcup_{i=1}^k R_i,$$

si abbia $A \subset Q$ e $|Q \setminus A| < \varepsilon$. Poniamo allora

$$Q' = \bigcup_{i=1}^k (R_i \times [m_i, M_i]).$$

Dunque Q' è un pluri-rettangolo in \mathbb{R}^{n+1} t.c. $\text{gr}(f) \subset Q'$ e

$$|Q'| < \varepsilon |Q|.$$

Poiché ε è arbitrario, deduciamo che $\text{gr}(f)$ è misurabile e $|\text{gr}(f)| = 0$. □

Osservazione 1.4. Come visto nel Lemma 1.3, il grafico di una funzione di n variabili 'abbastanza regolare' è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} di misura nulla. Similmente vedremo che una curva in \mathbb{R}^2 e una superficie in \mathbb{R}^3 hanno, rispettivamente, area e volume nulli. Infatti la misura funziona come un *indicatore di dimensione*: un oggetto geometrico di dimensione intrinseca n si può pensare come sottoinsieme di \mathbb{R}^m per qualsiasi intero $m \geq n$, ma può avere misura diversa da 0 solo in \mathbb{R}^n . Il calcolo della lunghezza di una curva o dell'area di una superficie non rientrano nella teoria della misura, ma vengono realizzati con tecniche diverse che tengono conto della *curvatura* (ved. [5]).

Esercizio 1.5. Dimostrare il Lemma 1.1.

Esercizio 1.6. (Difficile) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme compatto e misurabile. Dimostrare che ∂A è misurabile con $|\partial A| = 0$.

2. INTEGRALI DOPPI

Introduciamo ora l'*integrale di Riemann* in \mathbb{R}^2 . Consideriamo inizialmente un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$) e una funzione limitata $f : R \rightarrow \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ decomponiamo R in n^2 rettangoli ponendo per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, \quad y_j = c + \frac{d-c}{n}j, \quad R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

così che $R_{i,j}$ è un rettangolo di misura

$$|R_{i,j}| = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}.$$

Poiché f è limitata, esistono finiti

$$m_{i,j} = \inf_{R_{i,j}} f, \quad M_{i,j} = \sup_{R_{i,j}} f.$$

Dunque definiamo le somme integrali (inferiore e superiore) ponendo

$$s_n = \sum_{i,j=1}^n m_{i,j}|R_{i,j}|, \quad S_n = \sum_{i,j=1}^n M_{i,j}|R_{i,j}|.$$

Le successioni (s_n) , (S_n) sono limitate, e ovviamente si ha $s_n \leq S_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. In più si dimostra che gli insiemi delle somme inferiori e superiori sono *separati* (ved. [1]).

Definizione 2.1. La funzione $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *integrabile* se

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} s_n = \inf_{n \in \mathbb{N}_0} S_n = l,$$

e in tal caso il suo integrale è

$$\iint_R f(x, y) dx dy = l.$$

Una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una funzione:

Teorema 2.2. (Criterio di Riemann) *Siano $R \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) f è integrabile;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}_0$ t.c. $S_n - s_n < \varepsilon$.

Dimostrazione. Dimostriamo che (i) implica (ii). Fissato $\varepsilon > 0$, l'integrabilità di f implica che esistono $n, m \in \mathbb{N}_0$ t.c. $S_n - s_m < \varepsilon$. Sia dunque $k = mn$. Si vede facilmente che ogni rettangolo della decomposizione indotta dal numero n è unione di m^2 rettangoli della decomposizione indotta da k , e similmente ogni rettangolo della decomposizione indotta da m è unione di n^2 rettangoli della decomposizione indotta da k . Pertanto si ha

$$s_m \leq s_k \leq S_k \leq S_n,$$

da cui $S_k - s_k < \varepsilon$.

Dimostriamo che (ii) implica (i). Poiché ε è arbitrario in (ii), si ha

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} s_n = \inf_{n \in \mathbb{N}_0} S_n,$$

cioè f è integrabile. □

L'integrale della Definizione 2.1 è detto *integrale doppio*. Il suo significato geometrico è espresso dal seguente risultato (e dalla fig. 2):

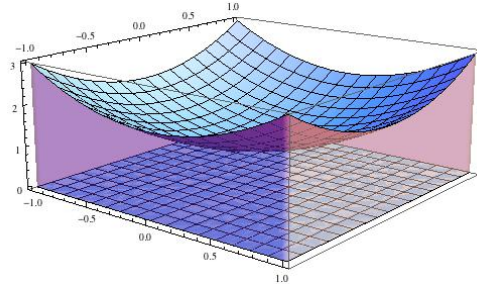


FIGURA 2.

Teorema 2.3. Sia $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile t.c. $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in R$. Allora l'insieme

$$T_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

è misurabile e

$$|T_f| = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\iint_R f(x, y) dx dy = l.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per il Teorema 2.2 esiste $n \in \mathbb{N}_0$ t.c. $l - \varepsilon < s_n \leq S_n < l + \varepsilon$. Costruiamo due pluri-rettangoli P_n, Q_n in \mathbb{R}^3 ponendo

$$P_n = \bigcup_{i,j=1}^n (R_{i,j} \times [0, m_{i,j}]), \quad Q_n = \bigcup_{i,j=1}^n (R_{i,j} \times [0, M_{i,j}])$$

(con le notazioni introdotte sopra). Ovviamente $P_n \subseteq T_f \subseteq Q_n$, $|P_n| = s_n$ e $|Q_n| = S_n$. Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario ne segue che T_f è misurabile e $|T_f| = l$. \square

Nel caso di una funzione $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ di segno variabile, il Teorema 2.3 rimane valido, a patto che si attribuisca un volume negativo alle parti di T_f che si trovano nel semispazio $z < 0$. In alcuni casi un integrale doppio si può calcolare direttamente:

Esempio 2.4. Siano $R \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo, $c \in \mathbb{R}$, e $f(x, y) = c$ una funzione costante. Allora si ha per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$ che $m_{i,j} = M_{i,j} = c$, da cui $s_n = S_n = c|R|$. Pertanto f è integrabile e

$$\iint_R f(x, y) dx dy = c|R|.$$

Esempio 2.5. Siano $R = [0, 1]^2$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x. \end{cases}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}_0$, il quadrato R è decomposto in n^2 quadrati di area $\frac{1}{n^2}$, così ripartiti:

- in $\frac{n^2-n}{2}$ quadrati si ha $m_{i,j} = M_{i,j} = 1$
- in $\frac{n^2-n}{2}$ quadrati si ha $m_{i,j} = M_{i,j} = 0$
- nei restanti n quadrati si ha $m_{i,j} = 0$ e $M_{i,j} = 1$.

Pertanto

$$s_n = \frac{n^2 - n}{2n^2}, \quad S_n = \frac{n^2 + n}{2n^2}.$$

Per $n \rightarrow \infty$ entrambe le somme integrali tendono a $\frac{1}{2}$, dunque f è integrabile e

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \frac{1}{2}.$$

Esempio 2.6. (Funzione di Dirichlet) Siano $R = [0, 1]^2$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}_0$, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha $m_{i,j} = 0$ e $M_{i,j} = 1$, da cui

$$s_n = 0, S_n = 1.$$

Pertanto f non è integrabile.

Una condizione sufficiente per l'integrabilità:

Lemma 2.7. *Siano $R \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Osserviamo che R è compatto. Per il Teorema di Weierstraß f è limitata, inoltre per il Teorema di Cantor-Heine essa è uniformemente continua (ved. [3]): fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$ con $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta$ si ha

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{|R|}.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}_0$ abbastanza grande e decomposto come sopra R nei rettangoli $R_{1,1}, \dots, R_{n,n}$, si ha $\text{diam}(R_{i,j}) < \delta$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, da cui

$$M_{i,j} - m_{i,j} < \frac{\varepsilon}{|R|}.$$

Questo implica $S_n - s_n < \varepsilon$, così che f risulta integrabile per il Teorema 2.2. \square

L'Esempio 2.5 prova che la condizione del Lemma 2.7 non è necessaria: osserviamo che in tale esempio l'insieme dei punti di discontinuità della funzione integranda (ovvero la diagonale di R) ha misura nulla. Invece, nell'Esempio 2.6 l'insieme dei punti di discontinuità è l'intero quadrato R . In generale, infatti, vale il seguente risultato che estende il Lemma 2.7 (per la dimostrazione ved. [6]):

Teorema 2.8. *Siano $R \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitata t.c. l'insieme $D \subset R$ dei punti di discontinuità di f sia misurabile con $|D| = 0$. Allora f è integrabile.*

Un modo efficace di calcolare un integrale doppio è quello di scomporlo in due integrali semplici, mediante le seguenti *formule di riduzione*:

Lemma 2.9. *Siano $R = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ continua:*

(i) *posto per ogni $x \in [a, b]$*

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

si ha

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx;$$

(ii) *posto per ogni $y \in [c, d]$*

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

si ha

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \psi(y) dy.$$

Dimostrazione. Proviamo (i) (la dimostrazione di (ii) è analoga). Per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $f(x, \cdot)$ è continua e quindi integrabile in $[c, d]$, dunque φ è ben definita e a sua volta continua. Fissiamo $n \in \mathbb{N}_0$ e definiamo $x_0 < \dots < x_n, y_0 < \dots < y_n$ come sopra. Per il Teorema della media (ved. [2]), per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ esiste $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ t.c.

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx &= \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy (x_i - x_{i-1}) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \inf_{R_{i,j}} f (y_j - y_{j-1}) (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\int_a^b \varphi(x) dx \geq \sum_{i,j=1}^n \inf_{R_{i,j}} f |R_{i,j}| = s_n,$$

e similmente

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq S_n.$$

Pertanto si ha

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

e si conclude. □

Esempio 2.10. Calcoliamo

$$\iint_{[0,2] \times [0,1]} (x^2 y - xy^2) dx dy.$$

Integriamo prima in y , ottenendo per ogni $x \in [0, 2]$

$$\varphi(x) = \int_0^1 (x^2 y - xy^2) dy = \left[\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{xy^3}{3} \right]_0^1 = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3},$$

quindi applichiamo il Lemma 2.9:

$$\iint_{[0,2] \times [0,1]} (x^2 y - xy^2) dx dy = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

In particolare, se esistono $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(x, y) = g(x)h(y)$ per ogni $(x, y) \in R$, le formule del Lemma 2.9 diventano

$$(2.1) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Esempio 2.11. Calcoliamo

$$\iint_{[0,1] \times [1,2]} e^{x-y} dx dy.$$

Possiamo decomporre $e^{x-y} = e^x e^{-y}$ e quindi applicare (2.1):

$$\iint_{[0,1] \times [1,2]} e^{x-y} dx dy = [e^x]_0^1 [-e^{-y}]_1^2 = \left(\frac{e-1}{e} \right)^2.$$

Consideriamo ora domini di integrazione più generali: siano $A \subset \mathbb{R}^2$ compatto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora esiste un rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ t.c. $A \subseteq R$. Sia dunque $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ definita per ogni $(x, y) \in R$ da

$$(2.2) \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Definizione 2.12. La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *integrabile* se $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, e in tal caso si pone

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_R \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

Osserviamo che l'integrale definito sopra è indipendente dalla scelta di R . I Teoremi 2.2, 2.3, 2.8 e il Lemma 2.7 si estendono facilmente al caso di un arbitrario dominio compatto. Inoltre valgono le seguenti proprietà, analoghe a quelle viste in [2]:

Lemma 2.13. Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ compatto, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili:

(i) per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\iint_A (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_A f(x, y) dx dy + \beta \iint_A g(x, y) dx dy;$$

(ii) se $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in A$,

$$\iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A g(x, y) dx dy;$$

(iii) se $A = B \cup C$, $B, C \subset \mathbb{R}^2$ compatti misurabili t.c. $|B \cap C| = 0$,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(x, y) dx dy + \iint_C f(x, y) dx dy;$$

(iv) se $|A| = 0$,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = 0.$$

In particolare, quindi, se $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in A$ si ha

$$\iint_A f(x, y) dx dy \geq 0,$$

e se f è positiva in un sottoinsieme di A di misura non nulla la precedente diseuguaglianza diventa stretta. Inoltre, se $|f|$ è integrabile si ha

$$\left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy.$$

Esempio 2.14. L'integrabilità di $|f|$ non assicura quella di f . Per esempio, sia $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funzione f non è integrabile, mentre $|f(x, y)| = 1$ ovviamente sì.

Teorema 2.15. (Media integrale) Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ compatto e misurabile, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile. Allora si ha

$$\inf_A f|A| \leq \iint_A f(x, y) dx dy \leq \sup_A f|A|.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 2.13 (ii), applicato alla funzione f e alle costanti $\inf_A f$, $\sup_A f$. \square

Corollario 2.16. *Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ compatto, connesso e misurabile, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $(x_0, y_0) \in A$ t.c.*

$$\iint_A f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0)|A|.$$

Dimostrazione. Segue dal Teorema 2.15 e dal Teorema dei valori intermedi (ved. [3]). □

Mediante gli integrali forniamo una caratterizzazione della misurabilità in \mathbb{R}^2 :

Lemma 2.17. *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ compatto. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) A è misurabile;
- (ii) la costante 1 è integrabile in A .

In tal caso si ha

$$|A| = \iint_A 1 dx dy.$$

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). La costante 1 è continua, quindi per il Corollario 2.16 essa è integrabile in A e vale l'eguaglianza della tesi.

Proviamo che (ii) implica (i). Poniamo

$$\iint_A 1 dx dy = m.$$

Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo t.c. $A \subseteq R$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ introduciamo la decomposizione di R mediante i rettangoli $R_{i,j}$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$). Per n abbastanza grande, si ha

$$m - \varepsilon < s_n \leq S_n < m + \varepsilon.$$

Denotiamo P l'unione dei rettangoli $R_{i,j}$ contenuti in A , e Q l'unione di quelli che hanno con A intersezione non vuota, così che P, Q sono plurirettangoli, $P \subseteq A \subseteq Q$ e

$$m - \varepsilon < |P| \leq |Q| < m + \varepsilon.$$

Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che A è misurabile e $|A| = m$. □

Ovviamente il Lemma 2.9 non si applica direttamente a un dominio di forma arbitraria. Occorre definire alcune classi speciali di domini:

Definizione 2.18. *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ compatto. L'insieme A è detto*

- (i) *dominio normale rispetto a \vec{x} se esistono $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e due funzioni continue $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $g_1(x) \leq g_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ e*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\};$$

- (ii) *dominio normale rispetto a \vec{y} se esistono $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, e due funzioni continue $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $h_1(y) \leq h_2(y)$ per ogni $y \in [c, d]$ e*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\};$$

- (iii) *dominio regolare se esistono $k \in \mathbb{N}_0$, $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^2$ domini normali t.c.*

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i, \quad |A_i \cap A_j| = 0 \text{ per ogni } i \neq j.$$

Esempio 2.19. L'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], \frac{x}{2} \leq y \leq e^x \right\}$$

è un dominio normale rispetto a \vec{x} (fig. 3).

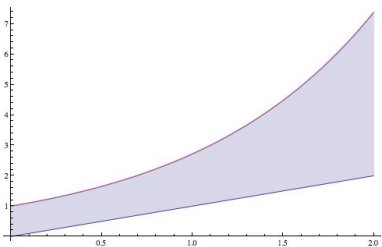


FIGURA 3.

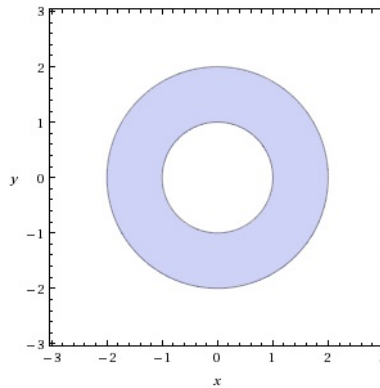


FIGURA 4.

Esempio 2.20. L'anello

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

non è normale rispetto a \vec{x} né rispetto a \vec{y} . Tuttavia, possiamo decomporlo in 4 sottoinsiemi:

$$A_1 = \{(x, y) \in A : x \leq -1\}, \quad A_2 = \{(x, y) \in A : -1 \leq x \leq 1, y \leq 0\},$$

$$A_3 = \{(x, y) \in A : x \geq 1\}, \quad A_4 = \{(x, y) \in A : -1 \leq x \leq 1, y \geq 0\},$$

che sono tutti domini normali (rispetto a \vec{x}) e tali che $|A_i \cap A_j| = 0$ per ogni $i \neq j$ (fig. 4). Pertanto, A è un dominio regolare.

Lemma 2.21. Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che A sia un dominio normale del tipo (i). Poniamo

$$c = \min_{[a,b]} g_1, \quad d = \max_{[a,b]} g_2,$$

così che A è contenuto nel rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$. Sia $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ definita come in (2.2), allora l'insieme dei punti di discontinuità di \tilde{f} è $\text{gr}(g_1) \cup \text{gr}(g_2)$, misurabile con misura nulla per il Lemma 1.3. Dal Teorema 2.8 segue che \tilde{f} è integrabile, cioè f è integrabile (Definizione 2.12). \square

In particolare, dunque, ogni dominio regolare è misurabile (Lemma 2.17). Inoltre, se A è un dominio normale, vale la seguente estensione del Lemma 2.9:

Lemma 2.22. Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora:

(i) se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, si ha

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy;$$

(ii) se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ si ha

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \psi(y) dy, \quad \psi(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (i) (la dimostrazione di (ii) è analoga). Definiamo R e \tilde{f} come nella dimostrazione del Lemma 2.21. Sappiamo che f e \tilde{f} sono integrabili nei rispettivi insiemi di

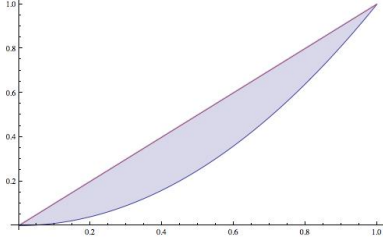


FIGURA 5.

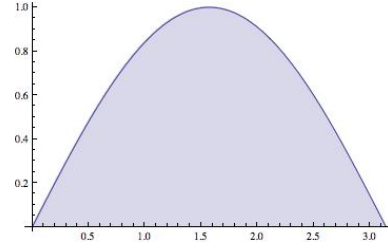


FIGURA 6.

definizione. Per la Definizione 2.12 e il Lemma 2.9 si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_a^b \varphi(x) \, dx,
 \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Esempio 2.23. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\},$$

(fig. 5) e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = 1 + xy$. Allora si ha, applicando la formula di riduzione (i),

$$\begin{aligned}
 \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (1 + xy) \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 \\
 &= \frac{5}{24}.
 \end{aligned}$$

Esempio 2.24. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq \sin(x)\},$$

(fig. 6) e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 y$. Allora si ha, applicando più volte la formula di integrazione per parti,

$$\begin{aligned}
 \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin(x)} x^2 y \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^\pi \frac{x^2 \sin(x)^2}{2} \, dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2 \sin(x) \cos(x)}{4} + \frac{x \sin(x)^2}{4} - \frac{x}{8} + \frac{\sin(x) \cos(x)}{8} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

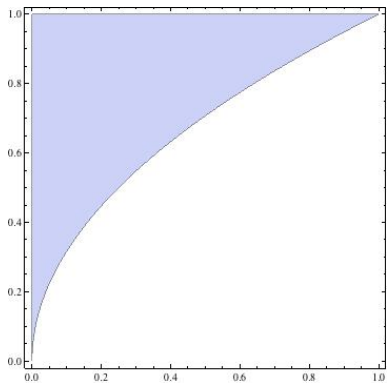


FIGURA 7.

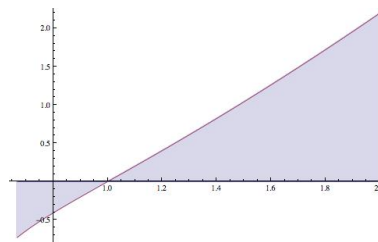


FIGURA 8.

Esempio 2.25. Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \cos(x) + y$. Il dominio A è regolare in quanto possiamo decomporlo come $A = A_1 \cup A_2$, dove

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, \quad A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x-1 \leq y \leq 1\}$$

sono domini normali rispetto a \vec{x} . Dunque si ha

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) \, dx \, dy &= \iint_{A_1} f(x,y) \, dx \, dy + \iint_{A_2} f(x,y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x (\cos(x) + y) \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{x-1}^1 (\cos(x) + y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x \cos(x) + \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_1^2 \left((2-x) \cos(x) - \frac{x^2}{2} + x \right) dx \\ &= \left[x \sin(x) + \cos(x) + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 + \left[(2-x) \sin(x) - \cos(x) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= 2 \cos(1) - \cos(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La scelta fra le formule di riduzione (i) e (ii) non è indifferente:

Esempio 2.26. Siano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\},$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \sin(y^3)$. Il dominio A è normale sia rispetto a \vec{x} che rispetto a \vec{y} (fig. 7). Tuttavia, la formula di riduzione (i) produce un integrale alquanto complicato:

$$\iint_A f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3) \, dy \right) dx = \dots$$

Applichiamo invece (ii), rappresentando il dominio come

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

e ottenendo

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sin(y^3) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \sin(y^3) y^2 dy \\ &= \left[-\frac{\cos(y^3)}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1 - \cos(1)}{3}. \end{aligned}$$

Esempio 2.27. Calcoliamo l'area dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dalle rette $y = 0$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$ e dalla curva $y = x \ln(2x - 1)$ (fig. 8). Conviene decomporre A in due domini normali:

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{3} \leq x \leq 1, x \ln(2x - 1) \leq y \leq 0 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x \ln(2x - 1) \right\},$$

quindi calcolare le due aree separatamente. Si ha

$$\begin{aligned} |A_1| &= \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\int_{x \ln(2x-1)}^0 1 dy \right) dx \\ &= - \int_{\frac{2}{3}}^1 x \ln(2x - 1) dx \\ &= - \left[\frac{x^2}{2} \ln(2x - 1) \right]_{\frac{2}{3}}^1 + \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{x^2}{2x - 1} dx \\ &= -\frac{2}{9} \ln(3) + \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{2x - 1} \right]_{\frac{2}{3}}^1 \\ &= \frac{2}{9} - \frac{7}{72} \ln(3). \end{aligned}$$

Similmente si ricava

$$|A_2| = \frac{15}{8} \ln(3) - 1,$$

da cui

$$|A| = |A_1| + |A_2| = \frac{16}{9} \ln(3) - \frac{7}{9}.$$

Quando il dominio o la funzione integranda non permettono una facile rappresentazione, il metodo di integrazione per riduzione non è molto efficace. In questo caso si ricorre a un *cambiamento di variabili*, regolato dal seguente risultato:

Teorema 2.28. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^2$ domini regolari, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e integrabile, $\mathbf{g} : B \rightarrow A$ un diffeomorfismo. Allora la funzione $(u, v) \mapsto (f \circ \mathbf{g})(u, v) |\det J_{\mathbf{g}}(u, v)|$ è integrabile in B e

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B (f \circ \mathbf{g})(u, v) |\det J_{\mathbf{g}}(u, v)| du dv.$$

Dimostrazione. Ci limitiamo a un caso speciale. Siano $B = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo ($a < b$, $c < d$) e $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ una trasformazione lineare definita da una matrice invertibile $M \in \mathbb{R}_2^2$, cioè sia per ogni $(u, v) \in B$

$$\mathbf{g}(u, v) = M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Sappiamo da [3] e [4] che $\mathbf{g} \in C^1(B, \mathbb{R}^2)$ con matrice jacobiana $J_{\mathbf{g}}(u, v) = M$ per ogni $(u, v) \in B$, quindi per il Teorema di inversione locale \mathbf{g} è un diffeomorfismo. L'insieme $A = \mathbf{g}(B)$ è un parallelogramma in \mathbb{R}^2 , di area

$$(2.3) \quad |A| = |\det M| |B|.$$

Fissiamo una decomposizione di B mediante i punti $a = u_0 < \dots < u_n = b$, $c = v_0 < \dots < v_n = d$, ponendo

$$R_{i,j} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Questa induce una decomposizione di A in parallelogrammi $P_{i,j} = \mathbf{g}(R_{i,j})$, t.c. $|P_{i,j}| = |\det M| |R_{i,j}|$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (come in (2.3)). Sia ora $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Per ogni $(u, v) \in R$ poniamo

$$\varphi(u, v) = (f \circ \mathbf{g})(u, v) |\det M|,$$

così che anche $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, quindi uniformemente continua (Teorema di Cantor-Heine, ved. [3]). Per il Corollario 2.16, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esiste $(\bar{x}_{i,j}, \bar{y}_{i,j}) \in P_{i,j}$ t.c.

$$\iint_{P_{i,j}} f(x, y) dx dy = f(\bar{x}_{i,j}, \bar{y}_{i,j}) |P_{i,j}|.$$

Poiché \mathbf{g} è suriettiva, esiste $(\bar{u}_{i,j}, \bar{v}_{i,j}) \in R_{i,j}$ t.c. $(\bar{x}_{i,j}, \bar{y}_{i,j}) = \mathbf{g}(\bar{u}_{i,j}, \bar{v}_{i,j})$, da cui

$$\iint_{P_{i,j}} f(x, y) dx dy = \varphi(\bar{u}_{i,j}, \bar{v}_{i,j}) |R_{i,j}|.$$

D'altra parte, ancora per il Corollario 2.16 esiste $(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{i,j}) \in R_{i,j}$ t.c.

$$\iint_{R_{i,j}} \varphi(u, v) du dv = \varphi(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{i,j}) |R_{i,j}|.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché φ è uniformemente continua, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u', v')| < \varepsilon$$

per ogni $(u, v), (u', v') \in B$ con $d((u, v), (u', v')) < \delta$. Scelto $n \in \mathbb{N}_0$ abbastanza grande nella decomposizione di A , si ha $\text{diam}(R_{i,j}) < \delta$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dunque, dalle relazioni precedenti abbiamo

$$\begin{aligned} & \left| \iint_A f(x, y) dx dy - \iint_B \varphi(u, v) du dv \right| \\ & \leq \sum_{i,j=1}^n |\varphi(\bar{u}_{i,j}, \bar{v}_{i,j}) - \varphi(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{i,j})| |R_{i,j}| \\ & \leq \varepsilon |B|. \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di ε permette a questo punto di dedurre

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B \varphi(u, v) du dv,$$

concludendo. □

Nel caso di un dominio generico $A \subset \mathbb{R}^2$ e di una trasformazione non lineare $\mathbf{g} : B \rightarrow A$, il procedimento descritto sopra viene così adattato:

- (1) approssimiamo B con una famiglia $(R_h)_{h=1}^m$ di rettangoli, in modo che l'insieme $B \setminus \cup_{h=1}^m R_h$ abbia misura piccola;

- (2) per ogni $h \in \{1, \dots, m\}$ denotiamo (u_h, v_h) il centro di R_h , $(x_h, y_h) = \mathbf{g}(u_h, v_h)$ e $P_h = \mathbf{g}(R_h)$, quindi applichiamo a \mathbf{g} la formula di Taylor centrata in (u_h, v_h) e arrestata al primo ordine, approssimando \mathbf{g} con la funzione lineare

$$\tilde{\mathbf{g}}_h(u, v) = \mathbf{g}(u_h, v_h) + J_{\mathbf{g}}(u_h, v_h) \begin{bmatrix} u - u_h \\ v - v_h \end{bmatrix};$$

- (3) per ogni $h \in \{1, \dots, m\}$ applichiamo il metodo esposto sopra e otteniamo

$$\iint_{P_h} f(x, y) dx dy \sim \iint_{R_h} (f \circ \tilde{\mathbf{g}}_h)(u, v) |\det J_{\mathbf{g}}(u_h, v_h)| du dv;$$

- (4) sommiamo tutti gli integrali ottenendo

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &\sim \sum_{h=1}^m \iint_{P_h} f(x, y) dx dy \\ &\sim \sum_{h=1}^m \iint_{R_h} (f \circ \tilde{\mathbf{g}}_h)(u, v) |\det J_{\mathbf{g}}(u_h, v_h)| du dv \\ &\sim \sum_{h=1}^m \iint_{R_h} (f \circ \mathbf{g})(u, v) |\det J_{\mathbf{g}}(u, v)| du dv \\ &\sim \iint_B (f \circ \mathbf{g})(u, v) |\det J_{\mathbf{g}}(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

La scelta della trasformazione \mathbf{g} deve essere ponderata caso per caso, in modo da 'semplificare' la forma del dominio. Di solito, scriveremo la trasformazione nella forma

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in B.$$

Esempio 2.29. Siano A il quadrato in \mathbb{R}^2 di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2$. Poniamo $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}, \quad (u, v) \in B.$$

Si vede facilmente che $\mathbf{g} : B \rightarrow A$ è un diffeomorfismo con determinante jacobiano

$$\det J_{\mathbf{g}}(u, v) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Per il Teorema 2.28 abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \iint_B \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left(2u^2 + \frac{2}{3}\right) du \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Esempio 2.30. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

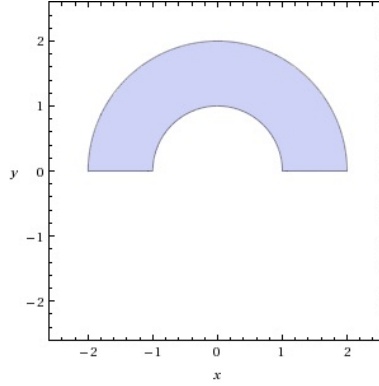


FIGURA 9.

(fig. 9) e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + y$. Poniamo $B = [1, 2] \times [0, \pi]$ e

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad (\rho, \theta) \in B$$

(si tratta della trasformazione da coordinate polari a coordinate cartesiane, già vista in [3] e in [4]). Si vede facilmente che $\mathbf{g} : B \rightarrow A$ è un diffeomorfismo con determinante jacobiano $\det J_{\mathbf{g}}(\rho, \theta) = \rho$. Per il Teorema 2.28

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \iint_B (\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{15}{4} \cos^2(\theta) + \frac{7}{3} \sin(\theta) \right) d\theta \\ &= \left[\frac{15}{8} (\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)) - \frac{7}{3} \cos(\theta) \right]_0^\pi \\ &= \frac{15}{8} \pi + \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Esempio 2.31. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, x \leq 1\}$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = y - x$. Poniamo $B = [0, 1] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ e

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad (\rho, \theta) \in B.$$

Come sopra si ricava

$$\begin{aligned} \iint_A (y - x) dx dy &= \iint_B (\rho \sin(\theta) - \rho \cos(\theta) - 1) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\sin(\theta) - \cos(\theta)}{3} - \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{3} - \frac{\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Esempio 2.32. Calcoliamo l'area del dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dall'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Per il Lemma 2.17 si ha

$$|A| = \iint_A 1 \, dx \, dy.$$

Per calcolare l'integrale poniamo $B = [0, 1] \times [0, 2\pi[$ e

$$\begin{cases} x = 2\rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad (\rho, \theta) \in B.$$

Si vede facilmente che $\mathbf{g} : B \rightarrow A$ è un diffeomorfismo e $\det J_{\mathbf{g}}(\rho, \theta) = 2\rho$. Dunque

$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \iint_B 2\rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi$$

(in generale, la regione delimitata da un'ellisse di semiassi $a, b > 0$ ha area πab). Osserviamo che in questo caso B non è compatto, quindi non stiamo applicando il Teorema 2.28 alla lettera, ma una sua estensione (ved. [6]).

Esercizio 2.33. Ricalcolare l'integrale dell'Esempio 2.25 usando la seguente rappresentazione di A :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq y + 1\}.$$

Esercizio 2.34. Dimostrare la formula (2.3).

Esercizio 2.35. Calcolare i seguenti integrali:

$$\iint_A \cos(x + y) \, dx \, dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, y - x \leq 0, x + y \leq 2\},$$

$$\iint_A \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\},$$

$$\iint_A \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\},$$

$$\iint_A xy \, dx \, dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1, y \geq |x|\}.$$

Esercizio 2.36. (Difficile) Calcolare l'integrale

$$\iint_A y \, dx \, dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

Esercizio 2.37. Calcolare l'area dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dalle rette $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e dalle curve $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $y = x^2 + 2$.

3. INTEGRALI TRIPLI

In questa sezione trattiamo gli integrali del tipo

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^3$ è un insieme compatto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione. La teoria è simile a quella svolta per il caso $n = 2$, quindi non la ripetiamo: basti sapere che se f è continua e A è di forma abbastanza regolare, allora f è integrabile. Ci concentriamo invece sull'interpretazione geometrica e sulle tecniche di calcolo.

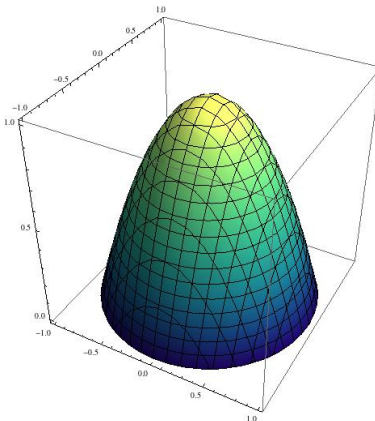


FIGURA 10.

Supponiamo $f(x, y, z) \geq 0$ per ogni $(x, y, z) \in A$. Piuttosto che come misura in \mathbb{R}^4 dell'insieme

$$T_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \in A, 0 \leq w \leq f(x, y, z)\}$$

come nel Teorema 2.3, conviene interpretare l'integrale di f in A come la massa di un corpo occupante la regione A dello spazio \mathbb{R}^3 , e avente densità variabile espressa da $f(x, y, z)$ per ogni punto $(x, y, z) \in A$. In particolare, se $f(x, y, z) = 1$ per ogni $(x, y, z) \in A$, tale massa equivale al volume di A :

$$|A| = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Esempio 3.1. Sia

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = z$. Allora l'integrale

$$\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

rappresenta il volume di A , mentre

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

rappresenta la massa totale del corpo A con una densità crescente verso l'alto (fig. 10).

Le formule di riduzione per gli integrali tripli sono di due tipi: nella formula di riduzione *per segmenti* si considerano domini di integrazione normali rispetto al piano $\vec{x}\vec{y}$.

Lemma 3.2. Siano $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare, $g_1, g_2 : A_0 \rightarrow \mathbb{R}$ continue t.c. $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ per ogni $(x, y) \in A_0$,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A_0, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora:

- (i) f è integrabile;
- (ii) posto per ogni $(x, y) \in A_0$

$$\varphi(x, y) = \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz,$$

la funzione $\varphi : A_0 \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{A_0} \varphi(x, y) dx dy.$$

Dimostrazione. Analoga a quella del Lemma 2.22 (i). □

Gli integrali dell'Esempio 3.1 si possono calcolare applicando il Lemma 3.2: poniamo

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

quindi calcoliamo

$$\begin{aligned} \iiint_A 1 dx dy dz &= \iint_{A_0} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} 1 dz \right) dx dy \\ &= \iint_{A_0} (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Similmente si ricava:

$$\iiint_A z dx dy dz = \frac{\pi}{6}.$$

Esempio 3.3. Siano

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\},$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = xy - z$. Innanzitutto rappresentiamo A in forma normale rispetto al piano $\vec{x}\vec{y}$, ponendo

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e per ogni $(x, y) \in A_0$

$$g_1(x, y) = 0, \quad g_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Per il Lemma 3.2 abbiamo

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{A_0} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (xy - z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{A_0} \left(xy\sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{2} \right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sqrt{1-\rho^2} - \frac{1-\rho^2}{2} \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \right) + \pi \int_0^1 (\rho^3 - \rho) d\rho \\ &= -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il Teorema 2.28 e la formula (2.1).

Nella formula di riduzione *per strati* si considerano invece domini di integrazione normali rispetto all'asse \vec{z} :

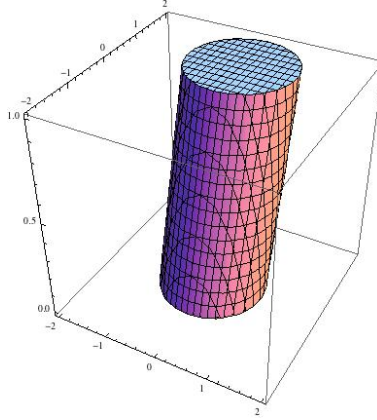


FIGURA 11.

Lemma 3.4. Siano $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $A_z \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare per ogni $z \in [c, d]$,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [c, d], (x, y) \in A_z\},$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora:

- (i) f è integrabile;
- (ii) posto per ogni $z \in [c, d]$

$$\psi(z) = \iint_{A_z} f(x, y, z) dx dy,$$

la funzione $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \psi(z) dz.$$

Dimostrazione. Analoga a quella del Lemma 2.22 (ii). □

Esempio 3.5. Siano

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + (y - z)^2 \leq 1\}$$

(fig. 11) e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = 1 - z$. Posto per ogni $z \in [0, 1]$

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - z)^2 \leq 1\},$$

per il Lemma 3.4 si ha

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\iint_{A_z} (1 - z) dx dy \right) dz = \pi \int_0^1 (1 - z) dz = \frac{\pi}{2}.$$

Ovviamente esistono versioni dei Lemmi 3.2, 3.4 per domini normali rispetto agli altri piani e assi coordinati.

Anche il metodo di integrazione per cambiamento di variabili si estende al caso $n = 3$:

Teorema 3.6. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^3$ domini regolari, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e integrabile, $\mathbf{g} : B \rightarrow A$ un diffeomorfismo. Allora la funzione $(u, v, w) \mapsto (f \circ \mathbf{g})(u, v, w) |\det J_{\mathbf{g}}(u, v, w)|$ è integrabile in B e

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B (f \circ \mathbf{g})(u, v, w) |\det J_{\mathbf{g}}(u, v, w)| du dv dw.$$

Quando il dominio di integrazione e la funzione integranda presentano una simmetria radiale, si può ricorrere alle *coordinate polari sferiche* (ved. [3]):

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases},$$

che definiscono una trasformazione $\mathbf{g} : (]0, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ con determinante jacobiano

$$\det J_{\mathbf{g}}(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin(\varphi) \cos(\theta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & \rho \cos(\varphi) \sin(\theta) & \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin(\varphi).$$

Esempio 3.7. Calcoliamo il volume della palla di raggio $R > 0$:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Passando alle coordinate sferiche abbiamo

$$\begin{aligned} |A| &= \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^R \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[-\cos(\varphi) \right]_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Invece, se si ravvisa una simmetria assiale, si può ricorrere alle *coordinate cilindriche*:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = \zeta \end{cases},$$

che definiscono una trasformazione $\mathbf{g} : (]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus \vec{z})$ con determinante jacobiano

$$\det J_{\mathbf{g}}(\rho, \theta, \zeta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Esempio 3.8. Ricalcoliamo l'integrale dell'Esempio 3.1, applicando il Lemma 3.6:

$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-\rho^2} \rho \zeta \, d\zeta \right) d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho \left[\frac{\zeta^2}{2} \right]_0^{1-\rho^2} d\rho \\ &= \pi \int_0^1 (\rho - 2\rho^3 + \rho^5) d\rho \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

In generale, la trasformazione va scelta in base alla forma del dominio:

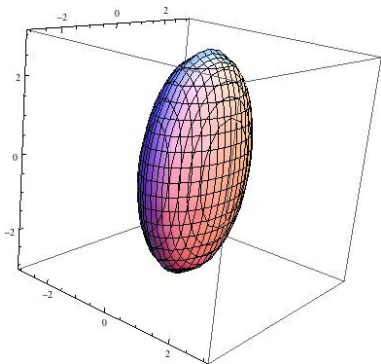


FIGURA 12.

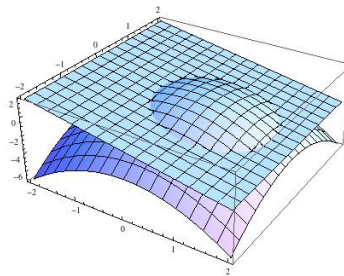


FIGURA 13.

Esempio 3.9. Calcoliamo il volume dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ delimitato dall'ellissoide

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

(fig. 12). I semiassi dell'ellissoide sono 1, 2, 3, dunque usiamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = 2\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = 3\rho \cos(\varphi) \end{cases},$$

con determinante jacobiano $6\rho^2 \sin(\varphi)$:

$$\begin{aligned} |A| &= \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^1 6\rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\ &= 12\pi \left[-\cos(\varphi) \right]_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

(in generale, se i semiassi sono $a, b, c > 0$, il volume è $\frac{4}{3}\pi abc$).

Esempio 3.10. Calcoliamo il volume dell'insieme A delimitato dal piano $x + z = 0$ e dal paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$ (fig. 13). In primo luogo troviamo una descrizione analitica di A . L'intersezione del piano e del paraboloido è un'ellisse giacente sul piano, di equazione

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 1 = 0 \\ x + z = 0, \end{cases}$$

la cui proiezione sul piano $\vec{x}\vec{y}$ è la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - x - 1 = 0,$$

di centro $(\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Dunque poniamo

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x - 1 \leq 0\}$$

e abbiamo la rappresentazione

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A_0, -x \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

Ora possiamo calcolare il volume usando le formule di riduzione e le coordinate polari (con centro opportuno):

$$\begin{aligned}
 |A| &= \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iint_{A_0} \left(\int_{-x}^{1-x^2-y^2} 1 \, dz \right) dx \, dy \\
 &= \iint_{A_0} (1 + x - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(\frac{5}{4}\rho - \rho^3 \right) d\rho \right) d\theta \\
 &= 2\pi \left[\frac{5\rho^2}{8} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \\
 &= \frac{25}{32}\pi.
 \end{aligned}$$

Esempio 3.11. Calcoliamo

$$\iiint_A x^2 \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq y\}.$$

Poniamo

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Bisogna applicare due volte le formule di riduzione:

$$\begin{aligned}
 \iiint_A x^2 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{A_0} \left(\int_0^y x^2 \, dz \right) dx \, dy \\
 &= \iint_{A_0} x^2 y \, dx \, dy \\
 &= \int_{-1}^1 x^2 \left(\int_0^{1-x^2} y \, dy \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^4 + x^6) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{8}{105}.
 \end{aligned}$$

Se un insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ rappresenta un corpo di densità $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, il suo *centro di massa* è il punto \bar{P} di coordinate

$$\bar{x} = \iiint_A \frac{x f(x, y, z)}{M} \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{y} = \iiint_A \frac{y f(x, y, z)}{M} \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{z} = \iiint_A \frac{z f(x, y, z)}{M} \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$M = \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Se $f(x, y, z) = 1$ per ogni $(x, y, z) \in A$, il punto \bar{P} è detto *baricentro* di A .

Esempio 3.12. Consideriamo il cono

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

con densità $f(x, y, z) = 1 - z$. La massa è

$$\begin{aligned} M &= \iiint_A (1 - z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho} (1 - \zeta) \rho \, d\zeta \, d\rho \, d\theta \\ &= \pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Calcoliamo inoltre

$$\begin{aligned} \iiint_A x(1 - z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho} \rho^2 \cos(\theta) (1 - \zeta) \, d\zeta \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, d\theta \int_0^1 \int_0^{1-\rho} \rho^2 (1 - \zeta) \, d\zeta \, d\rho \\ &= 0. \end{aligned}$$

Similmente

$$\iiint_A y(1 - z) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Infine

$$\begin{aligned} \iiint_A z(1 - z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho} (\zeta - \zeta^2) \rho \, d\zeta \, d\rho \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta^3}{3} \right]_0^{1-\rho} \, d\rho \\ &= \frac{\pi}{3} \int_0^1 (\rho - 3\rho^3 + 2\rho^4) \, d\rho \\ &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{3\rho^4}{4} + \frac{2\rho^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

Dunque il centro di massa è $(0, 0, \frac{1}{5})$.

Consideriamo ora il caso particolare dei *solidi di rotazione*. Con questa espressione si indica l'insieme delimitato (dalla superficie descritta) dalla rotazione di una curva γ (ved. [5]) intorno a una retta: per semplicità supponiamo che γ abbia parametrizzazione

$$(3.1) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

dove $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ è continua, e che la rotazione avvenga intorno all'asse \vec{z} . Vale in merito il seguente risultato:

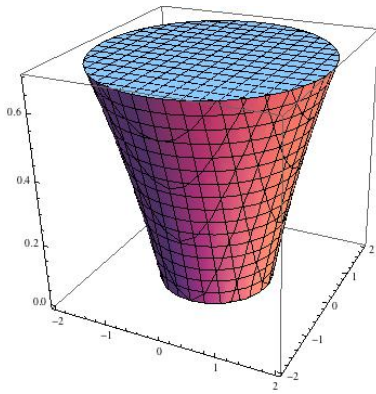


FIGURA 14.

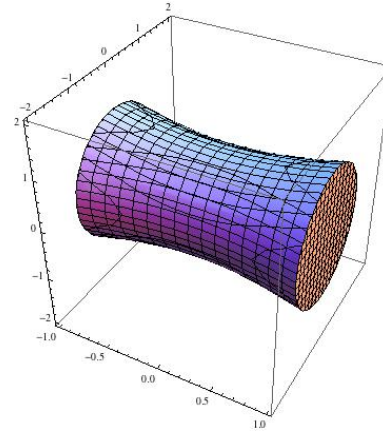


FIGURA 15.

Teorema 3.13. (Guldino) Siano γ la curva di parametrizzazione (3.1) e

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z)\}.$$

Allora

$$|A| = \pi \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Dimostrazione. Passiamo alle coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} |A| &= \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b \left(\int_0^{f(\zeta)} \rho \, d\rho \right) d\zeta \right) d\theta \\ &= \pi \int_a^b f(\zeta)^2 d\zeta, \end{aligned}$$

da cui la conclusione. □

Esempio 3.14. Calcoliamo il volume dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ delimitato dalla rotazione intorno all'asse z della curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, \ln(2)]$$

(fig. 14). Si ha per il Teorema 3.13

$$|A| = \pi \int_0^{\ln(2)} e^{2t} dt = \frac{3}{2}\pi.$$

Il metodo descritto dal Teorema 3.13 si adatta in modo elementare ad altre rotazioni:

Esempio 3.15. Calcoliamo il volume dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ delimitato dalla rotazione intorno all'asse x della curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cosh(t) \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [-1, 1]$$

(fig. 15). Ragionando come nel Teorema 3.13, si ha:

$$\begin{aligned} |A| &= \pi \int_{-1}^1 \cosh(t)^2 dt \\ &= \pi \left[\frac{t + \cosh(t) \sinh(t)}{2} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) + \pi. \end{aligned}$$

Quando è possibile utilizzare più metodi, l'attenta osservazione dei dati consente in genere di scegliere il più adatto (ved. [7]).

Esempio 3.16. Calcoliamo il volume dell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

Non conviene rappresentare A come un solido di rotazione, in quanto la parametrizzazione della curva sarebbe assai complicata. È meglio porre

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e poi calcolare il volume mediante le formule di riduzione e le coordinate polari:

$$\begin{aligned} |A| &= \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_{A_0} (2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^2) \, d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 3.17. Calcolare il volume dell'insieme A delimitato dal piano $x + 2y - z = 0$ e dal paraboloide $x^2 + y^2 + z = 3/4$.

Esercizio 3.18. Calcolare il volume dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq y^2\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq x^2\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \ln(1 + x + y)\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.19. Calcolare il volume dell'insieme A delimitato dal piano $z = 0$ e dal paraboloide $z = x^2 + y^2$, che si proietta sull'anello circolare

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 3.20. Calcolare

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme delimitato dai piani $z = 0$, $z = y + 1$ e dal cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Esercizio 3.21. Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1, con densità $e^{-(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Calcolarne la massa.

Esercizio 3.22. Calcolare il baricentro del cono dell'Esempio 3.12 con densità $f(x, y, z) = z$ (è più alto o più basso?).

Esercizio 3.23. Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1, con densità $|z - 1|$. Calcolarne la massa e il baricentro.

Esercizio 3.24. (Difficile) Calcolare il volume dell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, \pi], x^2 + (y - \sin(z))^2 \leq \pi - z\}.$$

Esercizio 3.25. (Difficile) Calcolare il volume dell'insieme delimitato dalla rotazione della curva dell'Esempio 3.15 intorno all'asse \vec{x} .

4. INTEGRALI GENERALIZZATI

In questa sezione forniamo alcuni cenni sugli integrali di funzioni illimitate, o estesi a domini illimitati, in \mathbb{R}^n . Per semplicità, ci limitiamo al caso $n = 2$ (ved. [6] per un'esposizione completa). Faremo uso della nozione di *successione di insiemi*, definita come una famiglia (A_k) t.c. per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ $A_k \subset \mathbb{R}^2$.

Definizione 4.1. (Integrale generalizzato del primo tipo) *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ illimitato, $f : A \rightarrow [0, +\infty[$, (A_k) una successione di insiemi t.c.*

- (i) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$;
- (ii) A_k è un dominio regolare per ogni $k \in \mathbb{N}_0$;
- (iii) f è integrabile in A_k per ogni $k \in \mathbb{N}_0$;
- (iv) $\lim_k \iint_{A_k} f(x, y) dx dy = l$ ($l \in \mathbb{R}$).

Allora f è detta integrabile e si pone

$$\iint_A f(x, y) dx dy = l.$$

Equivalentemente diremo che l'integrale converge¹. Se in (iv) si ha $l = +\infty$, scriveremo

$$\iint_A f(x, y) dx dy = +\infty.$$

La Definizione 4.1 si estende come segue al caso di funzioni di segno variabile: se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo per ogni $(x, y) \in A$

$$f^+(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}, \quad f^-(x, y) = \max\{-f(x, y), 0\},$$

così che $f^\pm : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni non-negative. Diremo che f è integrabile se lo sono f^\pm e in tal caso porremo

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A f^+(x, y) dx dy - \iint_A f^-(x, y) dx dy.$$

Esempio 4.2. (Funzione di Gauß in \mathbb{R}^2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Poniamo $A_k = B_k(0, 0)$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, quindi calcoliamo

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^k e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^k \\ &= \pi(1 - e^{-k^2}). \end{aligned}$$

¹In effetti la definizione di integrale generalizzato si può formulare anche per valori infiniti, ma la omettiamo per semplicità (ved. [6]).

Per $k \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

Questo notevole risultato permette di calcolare l'integrale della funzione di Gauß anche in dimensione 1 (che non si può determinare con strumenti elementari, ved. [2]). Infatti si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

(per svolgere questi calcoli, occorre però sapere che l'integrale in questione converge).

Definizione 4.3. (Integrale generalizzato del secondo tipo) *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow [0, +\infty[$ illimitata, (A_k) una successione di insiemi verificanti le condizioni (i) - (iv) della Definizione 4.1. Allora f è detta integrabile e si pone*

$$\iint_A f(x, y) dx dy = l.$$

La Definizione 4.3 si estende alle funzioni di segno variabile come la 4.1.

Esempio 4.4. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = -\ln(x^2 + y^2)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ poniamo

$$A_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{k^2} < x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

quindi calcoliamo

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} f(x, y) dx dy &= - \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{k}}^1 \ln(\rho^2) \rho d\rho \right) d\theta \\ &= -2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} (\ln(\rho^2) - 1) \right]_{\frac{1}{k}}^1 \\ &= \pi \left(1 - \frac{2 \ln(k) + 1}{k^2} \right). \end{aligned}$$

Per $k \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \pi.$$

Per sapere se un integrale generalizzato converge, senza calcolarlo, si usano delle *funzioni campione*:

Esempio 4.5. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\},$$

e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (\alpha > 0).$$

Per ogni intero $k \geq 2$ poniamo

$$A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq k^2\},$$

quindi consideriamo tre casi:

- se $\alpha > 2$ si ha

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^k \rho^{1-\alpha} d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_1^k \\ &= 2\pi \frac{k^{2-\alpha} - 1}{2-\alpha}, \end{aligned}$$

da cui per $k \rightarrow \infty$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \frac{2\pi}{\alpha - 2};$$

- se $\alpha < 2$ si ha come sopra

$$\iint_{A_k} f(x, y) dx dy = 2\pi \frac{k^{2-\alpha} - 1}{2-\alpha},$$

da cui per $k \rightarrow \infty$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = +\infty;$$

- se $\alpha = 2$ si ha

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^k \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi [\ln(\rho)]_1^k \\ &= 2\pi \ln(k), \end{aligned}$$

da cui per $k \rightarrow \infty$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = +\infty.$$

Esempio 4.6. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita come nell'Esempio 4.5. Come si vede facilmente, la situazione si capovolge:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{se } \alpha \in]0, 2[\\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

La convergenza di un integrale generalizzato può talvolta essere stabilita mediante confronto con le funzioni degli Esempi 4.5, 4.6.

Esempio 4.7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^4 + y^4 + 1}.$$

La funzione f è continua, quindi integrabile in $B_1(0, 0)$. Si ha per ogni $\alpha \in]2, 3[$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} f(x, y)(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

Sappiamo (Esempio 4.5) che la funzione $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ è integrabile in $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0, 0)$, dunque

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \in \mathbb{R}.$$

Esempio 4.8. Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin(x^2 + y^2)}.$$

Per sapere se f è integrabile, calcoliamo il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sin(x^2 + y^2)} = 1.$$

Dunque esiste $c > 0$ t.c. per ogni $(x, y) \in A$

$$f(x, y) \geq \frac{c}{x^2 + y^2},$$

e la seconda funzione ha integrale divergente in A , come visto nell'Esempio 4.6. Dunque

$$\iint_A f(x, y) dx dy = +\infty.$$

Osservazione 4.9. La teoria degli integrali generalizzati in \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) è analoga a quella in \mathbb{R}^2 . La differenza più importante da tenere a mente è che l'esponente critico per la funzione campione

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

è n , ovvero f è integrabile in $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(\mathbf{0})$ se e solo se $\alpha > n$, mentre è integrabile in $B_1(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ se e solo se $\alpha < n$.

Esercizio 4.10. Fare i calcoli dell'Esempio 4.6.

Esercizio 4.11. Stabilire se convergono i seguenti integrali generalizzati:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(xy)}{x^4 + y^4 + 1} dx dy, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{e^{x^2 + y^2}} dx dy$$

(attenzione ai cambiamenti di segno).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. IANNIZZOTTO, Insiemi numerici.
- [2] A. IANNIZZOTTO, Calcolo integrale.
- [3] A. IANNIZZOTTO, Funzioni di più variabili reali.
- [4] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale in più variabili reali.
- [5] A. IANNIZZOTTO, Curve e superfici.
- [6] C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica 2, Zanichelli (2016).
- [7] S. SALSA, A. SQUELLATI, Esercizi di analisi matematica 2, Zanichelli (2011).

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
 VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
 E-mail address: antonio.iannizzotto@unica.it