

# CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI REALI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Derivate direzionali, parziali, differenziale. Rette e piani tangenti al grafico di una funzione. Proprietà delle funzioni differenziabili: teorema del differenziale totale, di Lagrange, formula del gradiente. Derivate e differenziali di ordine superiore: forma hessiana, teorema di Schwarz, formula di Taylor. Ottimizzazione libera: teorema di Fermat, classificazione dei punti critici. Ottimizzazione vincolata: moltiplicatori di Lagrange, studio della frontiera. Funzioni vettoriali: matrice jacobiana, teoremi di Dini, di inversione locale. Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

## INDICE

1. Derivate e differenziali del primo ordine	1
2. Derivate e differenziali di ordine superiore	10
3. Ottimizzazione	17
4. Funzioni vettoriali	26
Riferimenti bibliografici	30

Versione del 26 dicembre 2020

## 1. DERIVATE E DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

*Through hollow lands and hilly lands...*

W.B. YEATS

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in A$ . Il grafico  $\text{gr}(f)$  è una superficie passante per il punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  dove  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , una sorta di 'paesaggio' in generale assai difficile da rappresentare: per questo motivo si rende necessario approssimare *localmente*  $\text{gr}(f)$  mediante un piano passante per  $P_0$ , la cui equazione dipende dal comportamento di  $f$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$ . Questa approssimazione non è sempre possibile, come vedremo (ved. [6], [7] per un approccio alternativo).

Cominciamo col fissare una direzione, ovvero un versore  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  ( $|\mathbf{v}| = 1$ ) da applicare in  $(x_0, y_0)$ : poiché  $A$  è aperto, esiste  $r > 0$  t.c.  $B_r(x_0, y_0) \subset A$ , in particolare  $(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \in A$  per ogni  $t \in ]-r, r[$ . Definiamo quindi la funzione  $\varphi : ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

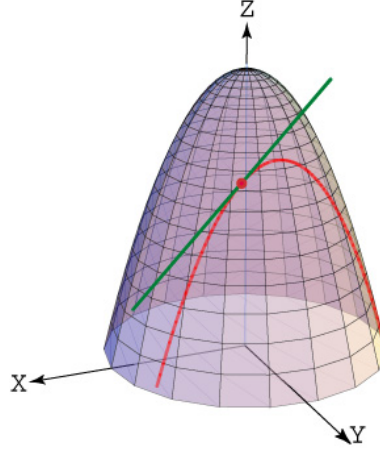
$$\varphi(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2).$$

Il grafico di  $\varphi$  è una *sezione* di  $\text{gr}(f)$ , ovvero la sua intersezione con il piano di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Supponiamo che  $\varphi$  sia derivabile in 0, ovvero che esista

$$(1.1) \quad D\varphi(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

FIGURA 1. Retta tangente a  $\text{gr}(f)$  lungo una direzione.

(ved. [1]). Allora  $\text{gr}(\varphi)$  ha in  $P_0$  la retta tangente  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$  di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tD\varphi(0) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se esiste la derivata (1.1) si dice che  $f$  è *derivabile in*  $(x_0, y_0)$  *lungo la direzione*  $\mathbf{v}$  e il numero reale  $D\varphi(0)$  è detto *derivata direzionale* e denotato  $D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0)$ . In particolare, le derivate lungo le direzioni  $\mathbf{i} = (1, 0)$  e  $\mathbf{j} = (0, 1)$  sono dette *derivate parziali* e denotate  $D_x f(x_0, y_0)$ ,  $D_y f(x_0, y_0)$ : se esse esistono si dice che  $f$  è *derivabile (parzialmente)* in  $(x_0, y_0)$ .

Ovviamente, la tangente  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$  dipende dalla scelta di  $\mathbf{v}$ , anzi essa può esistere per alcune direzioni e non per altre (fig. 1). Inoltre, ammesso che esistano rette tangenti in ogni direzione, esse possono non essere complanari. Dunque il primo problema del calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili reali consiste nel trovare condizioni sufficienti affinché, dato un punto  $P_0 \in \text{gr}(f)$ ,

- (a)  $\text{gr}(f)$  ammetta retta tangente in  $P_0$  lungo ogni direzione;
- (b) tali rette tangenti formino un piano, detto *piano tangente* a  $\text{gr}(f)$  in  $P_0$ .

I seguenti esempi mostrano alcuni casi in cui (a) o (b) sono, o non sono, verificate:

**Esempio 1.1.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Fissata una direzione  $\mathbf{v}$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t^2} - 1}{t} = 0.$$

Dunque la retta  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ , tangente a  $\text{gr}(f)$  in  $P_0 = (0, 0, 1)$ , ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = tv_1 \\ y = tv_2 \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Al variare di  $\mathbf{v}$ , la retta  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$  ruota intorno a  $P_0$  descrivendo il piano di equazione

$$z = 1.$$

In questo caso (a) e (b) sono verificate (fig. 2).

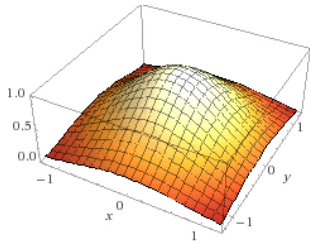


FIGURA 2.

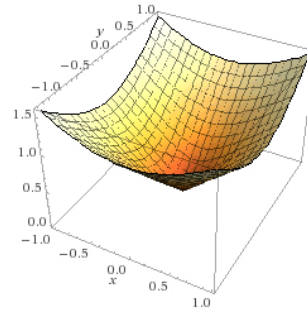


FIGURA 3.

**Esempio 1.2.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Fissata una direzione  $\mathbf{v}$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{|t|}{t} = \pm 1,$$

cioè il limite (1.1) non esiste e  $f$  non è derivabile in  $(0, 0)$  lungo alcuna direzione. In questo caso (a) e (b) non sono verificate (fig. 3).

**Esempio 1.3.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}.$$

Fissata una direzione  $\mathbf{v}$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \sqrt[3]{v_1^2 v_2}.$$

Dunque la retta  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ , tangente a  $\text{gr}(f)$  in  $P_0 = (0, 0, 0)$ , ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = tv_1 \\ y = tv_2 \\ z = t \sqrt[3]{v_1^2 v_2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Al variare di  $\mathbf{v}$ , la retta  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$  ruota intorno a  $P_0$  descrivendo una superficie curva, in particolare le rette tangenti lungo le direzioni  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  sono orizzontali ma quella lungo la direzione  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  no. In questo caso (a) è verificata ma (b) no (fig. 4).

Inoltre, a differenza da quanto visto in [1], per le funzioni di più variabili la derivabilità non implica la continuità:

**Esempio 1.4.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nel punto  $(0, 0)$  la funzione  $f$  non è continua. Tuttavia, per ogni direzione  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  con  $v_2 \neq 0$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{v_1^2}{v_2},$$

dunque  $f$  è derivabile in  $(0, 0)$  lungo  $\mathbf{v}$  (fig. 5).

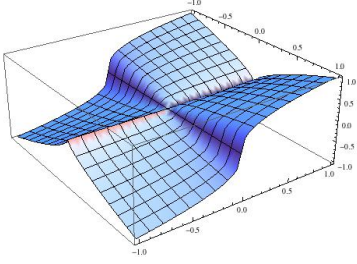


FIGURA 4.

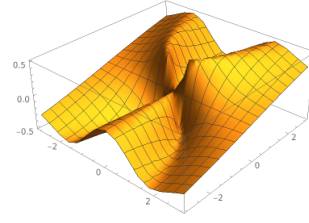


FIGURA 5.

Come si vede dagli esempi precedenti, la situazione è complicata. Svolgeremo adesso la teoria per una funzione di  $n$  variabili  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è un insieme aperto e  $\mathbf{x}_0 \in A$  è un punto di coordinate  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

**Definizione 1.5.** La funzione  $f$  è detta derivabile in  $\mathbf{x}_0$  lungo una direzione  $\mathbf{v}$  se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

In tal caso il limite precedente è detto derivata di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  lungo  $\mathbf{v}$  e denotato  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ . In particolare,  $f$  è detta derivabile (parzialmente) in  $\mathbf{x}_0$  se esistono le derivate lungo le direzioni  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , che sono dette derivate parziali e denotate  $D_i f(\mathbf{x}_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Infine,  $f$  è detta derivabile in  $A$  se è derivabile in ogni punto di  $A$ , e in questo caso le derivate parziali sono funzioni  $D_i f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Notazioni alternative per le derivate parziali sono  $f_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Se  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$  si definisce il vettore

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = (D_1 f(\mathbf{x}_0), \dots, D_n f(\mathbf{x}_0)),$$

detto *gradiente* di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ <sup>1</sup> (si indica anche con  $Df$ ,  $\text{grad } f$ ). Un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  t.c.  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  è detto *punto critico* di  $f$ . Per calcolare la derivata parziale di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  rispetto a una variabile  $x_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) bisogna derivare nel punto  $x_i^0$  la funzione

$$t \mapsto f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

(cioè riguardando le altre variabili come parametri).

**Esempio 1.6.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y, z) = x \ln(1 + y^2 + z^2).$$

Allora si ha per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \ln(1 + y^2 + z^2), \frac{2xy}{1 + y^2 + z^2}, \frac{2xz}{1 + y^2 + z^2} \right).$$

Regole di calcolo:

**Lemma 1.7.** Siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Allora, per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$

- (i)  $D_i(f + g)(\mathbf{x}_0) = D_i f(\mathbf{x}_0) + D_i g(\mathbf{x}_0)$ ;
- (ii)  $D_i(fg)(\mathbf{x}_0) = D_i f(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)D_i g(\mathbf{x}_0)$ ;
- (iii) se  $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ,  $D_i\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}_0) = \frac{D_i f(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)D_i g(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)^2}$ .

*Dimostrazione.* Segue dalle analoghe proprietà per le funzioni di una variabile (ved. [1]). □

<sup>1</sup>Il simbolo  $\nabla$  si legge 'nabla', nome derivato dalla forma di uno strumento musicale ebraico.

**Esempio 1.8.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  il polinomio

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y - xy^3 + y^2.$$

Si ha allora

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 6xy - y^3, 3x^2 - 3xy^2 + 2y).$$

La seguente nozione esprime una forma di 'derivabilità totale' (cioè indipendente dalla direzione):

**Definizione 1.9.** La funzione  $f$  è detta differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  se esiste una forma lineare  $df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0.$$

In questo caso, la forma  $df(\mathbf{x}_0)$  è detta differenziale (totale primo) di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .

Dunque il differenziale di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ , se esiste, è un polinomio omogeneo di grado 1, che approssima in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  la funzione  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ . Una forma alternativa della Definizione 1.9, che sfrutta i simboli di Landau, è la seguente:

$$(1.2) \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{o}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|).$$

Da [2] sappiamo che una forma lineare si può rappresentare mediante il prodotto scalare per un vettore fissato: il seguente risultato stabilisce che tale vettore, per la forma  $df(\mathbf{x}_0)$ , è  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ .

**Lemma 1.10.** Sia  $f$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ . Allora  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$  e per ogni  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  t.c. per ogni  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}.$$

Fissato  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) - ta_i}{t} = 0,$$

da cui  $a_i = D_i f(\mathbf{x}_0)$ . Dunque  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ . □

Il Lemma 1.10 si estende a qualunque direzione:

**Teorema 1.11.** (Formula del gradiente) Sia  $f$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ . Allora, per ogni direzione  $\mathbf{v}$ ,  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$  lungo  $\mathbf{v}$  e si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

*Dimostrazione.* Si dimostra come il Lemma 1.10. □

Mediante il Teorema 1.11, dalle derivate parziali possiamo dedurre tutte le altre derivate direzionali (purché  $f$  sia differenziabile) senza fare uso di (1.1).

La formula (1.2) descrive il *significato geometrico della differenziabilità*. Sia  $f$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , e sia  $P_0 = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0)) \in \text{gr}(f)^2$ . Denotiamo  $\mathcal{P}$  l'iperpiano in  $\mathbb{R}^{n+1}$  di equazione cartesiana

$$(1.3) \quad x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Allora, per il Lemma 1.10  $\mathcal{P}$  è tangente in  $P_0$  a  $\text{gr}(f)$ , nel senso che esso è l'unico iperpiano contenente tutte le rette tangenti a  $\text{gr}(f)$  in  $P_0$  (fig. 6). Infatti, data una direzione  $\mathbf{v}$ , per il Teorema 1.11 la retta  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$  ha equazione parametrica

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \\ x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + t\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

<sup>2</sup>Adottiamo per i punti di  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  la notazione  $(\mathbf{x}, x_{n+1})$

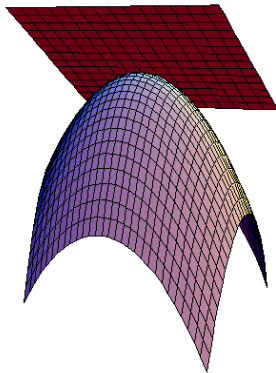


FIGURA 6.

Sostituendo le coordinate descritte dal sistema precedente in (1.3), si vede che  $\mathcal{T}_v \subset \mathcal{P}$ . Dall'equazione cartesiana (1.3) si ricava il vettore normale all'iperpiano  $\mathcal{P}$ , ovvero  $\mathbf{n} = (\nabla f(\mathbf{x}_0), -1)$ , che viene anche detto *vettore normale* a  $\text{gr}(f)$  in  $P_0$  (ved. [2]). Dunque, la differenziabilità fornisce una condizione sufficiente affinché siano verificate le condizioni **(a)** e **(b)** (essa è anche una condizione necessaria per **(b)**).

Inoltre la differenziabilità risolve il problema evidenziato dall'Esempio 1.4:

**Lemma 1.12.** *Sia  $f$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ . Allora  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .*

*Dimostrazione.* Per (1.2) si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0,$$

dunque  $f(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$  per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ . □

Altre proprietà delle funzioni differenziabili:

**Lemma 1.13.** *Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo t.c.  $y_0 = f(\mathbf{x}_0) \in I$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  verificanti*

- (i)  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ ;
- (ii)  $g$  è derivabile in  $y_0$ .

Allora  $g \circ f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e

$$\nabla(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = Dg(y_0)\nabla f(\mathbf{x}_0).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi = g \circ f$ . Per ogni  $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  poniamo  $h = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ , così che

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0) - Dg(y_0)\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \\ &= \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - Dg(y_0) \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \\ &= \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - Dg(y_0) \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \\ &= \left( \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} - Dg(y_0) \right) \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + Dg(y_0) \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ . Dunque  $\varphi$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  con

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}_0) = Dg(y_0)\nabla f(\mathbf{x}_0)$$

per il Lemma 1.10. □

Una formulazione equivalente del Lemma 1.13 (basata sulla definizione di differenziale per funzioni di una variabile, ved. [1]) è la seguente:

$$(1.4) \quad d(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = dg(y_0) \circ df(\mathbf{x}_0).$$

Altre proprietà delle funzioni differenziabili si dimostrano facendo uso di un risultato 'duale' del Lemma 1.13 (ved. Sezione 4):

**Teorema 1.14.** (Lagrange) *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$ . Allora esiste  $\tau \in ]0, 1[$  t.c.*

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f((1 - \tau)\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).$$

*Dimostrazione.* Poiché  $A$  è convesso, il segmento congiungente  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_1$  è contenuto in  $A$ . Rappresentiamo tale segmento come

$$S = \{(1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1 : t \in [0, 1]\}.$$

La restrizione di  $f$  a  $S$  è la composizione  $f \circ \mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è definita per ogni  $t \in [0, 1]$  da

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1.$$

Per il Lemma 4.2,  $f \circ \mathbf{r}$  è derivabile con

$$D(f \circ \mathbf{r})(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).$$

Il Teorema di Lagrange (per funzioni di una variabile, ved. [1]) garantisce l'esistenza di  $\tau \in ]0, 1[$  t.c.

$$f \circ \mathbf{r}(1) - f \circ \mathbf{r}(0) = D(f \circ \mathbf{r})(\tau),$$

il che equivale alla tesi. □

**Teorema 1.15.** (Fermat) *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile,  $\mathbf{x}_0 \in A$  un punto di estremo locale per  $f$ . Allora  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $f$  abbia in  $\mathbf{x}_0$  un minimo locale (il caso del massimo si tratta analogamente). Poiché  $A$  è aperto, esiste  $r > 0$  t.c.  $B_r(\mathbf{x}_0) \subset A$  e  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ . Fissato  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la restrizione di  $f$  al segmento

$$\{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i : t \in ]-r, r[ \}$$

è derivabile per il Lemma 4.2 con derivata pari a  $D_i f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i)$ . Inoltre, essa ha un minimo in 0. Pertanto, per il Teorema di Fermat (per funzioni di una variabile, ved. [1]) si ha  $D_i f(\mathbf{x}_0) = 0$ . Facendo variare  $i$ , otteniamo la tesi. □

**Osservazione 1.16.** Il Teorema 1.15 in effetti vale anche per funzioni *derivabili*, ma nel caso di funzioni differenziabili la dimostrazione è più semplice.

**Osservazione 1.17.** Nel caso  $n = 2$ , gli insiemi di livello di  $f$  sono detti *curve di livello* (ved. [4]) di equazione cartesiana

$$\gamma_c = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Si dimostra che, se  $f$  è differenziabile, per ogni  $(x, y) \in \gamma_c$  il vettore  $\nabla f(x, y)$  applicato in  $(x, y)$  è ivi normale a  $\gamma_c$ . Intuitivamente, esso rappresenta la direzione orientata di massima crescita per  $f$ , mentre  $-\nabla f(x, y)$  rappresenta la direzione orientata di massima decrescita per  $f$ . La direzione di  $\gamma_c$  (ortogonale alle precedenti) è stazionaria per  $f$  (fig. 7).

Non è facile valutare la differenziabilità di una funzione in un punto usando la Definizione 1.9. Il seguente risultato esprime una condizione sufficiente per la differenziabilità:

**Teorema 1.18.** (Differenziale totale) *Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A$  soddisfacenti le seguenti condizioni:*

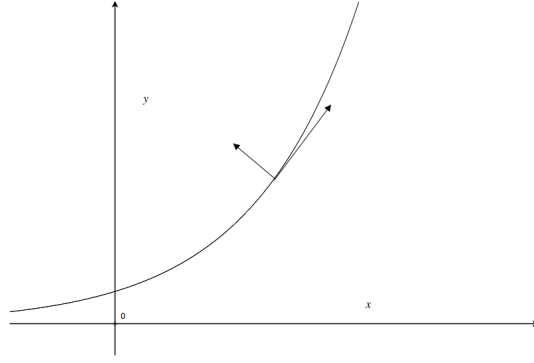


FIGURA 7. Curva di livello di  $f(x, y) = y - e^x$  con direzioni normale e tangenziale.

- (i) esiste  $r > 0$  t.c.  $B_r(\mathbf{x}_0) \subset A$  e  $f$  è derivabile in  $B_r(\mathbf{x}_0)$ ;
- (ii)  $D_i f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ .

*Dimostrazione.* Fissato  $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , denotiamo

$$\mathbf{y}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \mathbf{y}_1 = (x_1, x_2^0, \dots, x_n^0), \dots, \mathbf{y}_n = (x_1, \dots, x_n).$$

Per (i) e il Teorema di Lagrange (per funzioni di una variabile, ved. [1]), per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  esiste  $\tau_i \in [0, 1]$  t.c.

$$f(\mathbf{y}_i) - f(\mathbf{y}_{i-1}) = D_i f((1 - \tau_i)\mathbf{y}_{i-1} + \tau_i \mathbf{y}_i)(x_i - x_i^0).$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=1}^n (f(\mathbf{y}_i) - f(\mathbf{y}_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n D_i f((1 - \tau_i)\mathbf{y}_{i-1} + \tau_i \mathbf{y}_i)(x_i - x_i^0) \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (ved. [2]) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} &= \frac{\left| \sum_{i=1}^n (D_i f((1 - \tau_i)\mathbf{y}_{i-1} + \tau_i \mathbf{y}_i) - D_i f(\mathbf{x}_0))(x_i - x_i^0) \right|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n (D_i f((1 - \tau_i)\mathbf{y}_{i-1} + \tau_i \mathbf{y}_i) - D_i f(\mathbf{x}_0)) \right|. \end{aligned}$$

Quando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , per (ii) si ha  $D_i f((1 - \tau_i)\mathbf{y}_{i-1} + \tau_i \mathbf{y}_i) \rightarrow D_i f(\mathbf{x}_0)$ , da cui

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0,$$

dunque  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ . □

I precedenti risultati si possono riassumere nello schema

$$(1.5) \quad f \in C^1(A) \implies f \text{ differenziabile in } A \implies \begin{cases} f \in C^0(A) \\ f \text{ derivabile in } A \end{cases}$$

(le cui frecce non si invertono).

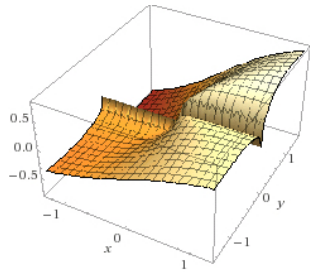


FIGURA 8.

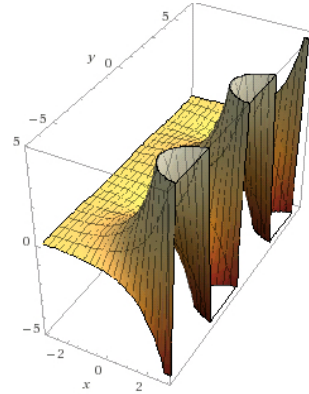


FIGURA 9.

**Esempio 1.19.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = x \sqrt[3]{y}.$$

Si vede facilmente che  $f$  nel punto  $(0, 0)$  è continua e derivabile con  $\nabla f(0, 0) = 0$ . Inoltre essa verifica (1.2) in quanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Tuttavia,  $f$  non è derivabile nei punti  $(x, 0)$ ,  $x \neq 0$ , quindi non è verificata l'ipotesi (i) del Teorema 1.18 (fig. 8).

**Esempio 1.20.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = e^x \sin(y).$$

Questa funzione è derivabile con

$$\nabla f(x, y) = (e^x \sin(y), e^x \cos(y)),$$

dunque  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Per il Teorema 1.18,  $f$  è differenziabile, dunque  $\text{gr}(f)$  ammette piano tangente in ogni suo punto. In particolare, nel punto  $(0, 0, 0)$  il piano tangente ha equazione  $z = y$  (fig. 9).

**Esempio 1.21.** Il *potenziale elettrostatico* generato da una carica  $Q$  posta in  $(0, 0, 0)$  è una funzione  $f : (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y, z) = \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Questa funzione è differenziabile e il suo gradiente è

$$\nabla f(x, y, z) = \left( -\frac{Qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{Qy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{Qz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Fisicamente il campo elettrico indotto dalla carica  $Q$  è  $-\nabla f(x, y, z)$  (notiamo che esso è sempre diretto lungo una semiretta uscente dall'origine, con verso centrifugo se  $Q > 0$  e centripeto se  $Q < 0$ ). Si tratta di un campo conservativo (ved. [5]).

**Esempio 1.22.** La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è derivabile con

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dunque  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , in particolare  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$ . Qual è il piano tangente a  $\text{gr}(f)$  in  $(0, 0, 0)$ ?

**Esercizio 1.23.** Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto  $(1, 1, 2)$  al paraboloido di equazione  $z = x^2 + y^2$ .

**Esercizio 1.24.** In quali punti la superficie di equazione  $z = e^{x^2 - y^2}$  ha piano tangente orizzontale?

**Esercizio 1.25.** Stabilire se la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile in  $(0, 0)$ . In tal caso, determinare il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, 0, 0)$ .

**Esercizio 1.26.** Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = e^{\cos(x+y) + \tan(y)}$$

è differenziabile in  $(0, 0)$ . In tal caso, determinare il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, 0, e)$ .

**Esercizio 1.27.** Determinare il piano tangente al grafico di

$$f(x, y) = \cos(x + y)e^{x-y}$$

nel punto  $(0, 0, 1)$ .

## 2. DERIVATE E DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto (manterremo questa ipotesi per tutta la presente sezione),  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $A$ . Allora sono definite le funzioni  $D_1f, \dots, D_nf : A \rightarrow \mathbb{R}$ : se queste sono a loro volta derivabili in  $\mathbf{x} \in A$ , diremo che  $f$  è *derivabile due volte* in  $\mathbf{x}$  e denoteremo le derivate parziali seconde

$$D_{ij}^2f(\mathbf{x}) = D_j[D_i f](\mathbf{x}) \quad \left( = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) \right)$$

per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  (notare l'ordine delle variabili di derivazione). Le derivate seconde sono raccolte nella *matrice hessiana*

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_{11}^2f(\mathbf{x}) & D_{12}^2f(\mathbf{x}) & \dots & D_{1n}^2f(\mathbf{x}) \\ D_{21}^2f(\mathbf{x}) & D_{22}^2f(\mathbf{x}) & \dots & D_{2n}^2f(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1}^2f(\mathbf{x}) & D_{n2}^2f(\mathbf{x}) & \dots & D_{nn}^2f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

(matrice quadrata in  $\mathbb{R}_n^n$ ). Se  $D_i f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , diremo che  $f$  è *differenziabile due volte* in  $\mathbf{x}$  e chiameremo *differenziale secondo* la forma quadratica  $d^2f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$d^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n D_{ij}^2f(\mathbf{x})h_i h_j,$$

che si può rappresentare mediante la matrice hessiana:

$$(2.1) \quad d^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot (H_f(\mathbf{x})\mathbf{h}),$$

e per questo viene anche chiamata *forma quadratica hessiana*. Infine, se  $D_i f \in C^1(A)$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , diremo che  $f \in C^2(A)$ . Ovviamente, le implicazioni dello schema (1.5) sono valide anche per l'ordine di derivazione 2. Se le derivate seconde sono continue, la matrice  $H_f$  è simmetrica:

**Teorema 2.1.** (Schwarz) *Sia  $f \in C^2(A)$ . Allora per ogni  $\mathbf{x} \in A$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  si ha*

$$D_{ij}^2 f(\mathbf{x}) = D_{ji}^2 f(\mathbf{x}).$$

*Dimostrazione.* Esiste  $r > 0$  t.c.  $B_r(\mathbf{x}) \subset A$ . Sia  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t\mathbf{e}_i + s\mathbf{e}_j \in B_r(\mathbf{x})$ , con  $t, s \in ]0, +\infty[$ . Quindi definiamo una funzione  $\varphi : ([0, t] \times [0, s]) \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo per ogni  $(\tau, \sigma) \in [0, t] \times [0, s]$

$$\varphi(\tau, \sigma) = f(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e}_i + \sigma\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{e}_j) + f(\mathbf{x}).$$

Chiaramente  $\varphi \in C^2([0, t] \times [0, s])$  e  $\varphi(t, 0) = \varphi(0, s) = 0$ . Dunque, per il Teorema 1.14 esistono  $\tau_1 \in [0, t]$ ,  $\sigma_1 \in [0, s]$  t.c.

$$D_\sigma \varphi(t, \sigma_1) s = \varphi(t, s) = D_\tau \varphi(\tau_1, s) t.$$

Calcolando le derivate di  $\varphi$  mediante il Lemma 4.2 otteniamo

$$(D_j f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i + \sigma_1\mathbf{e}_j) - D_j f(\mathbf{x} + \sigma_1\mathbf{e}_j)) s = (D_i f(\mathbf{x} + \tau_1\mathbf{e}_i + s\mathbf{e}_j) - D_i f(\mathbf{x} + \tau_1\mathbf{e}_i)) t.$$

Applicando nuovamente il Teorema 1.14 deduciamo l'esistenza di  $\tau_2 \in [0, \tau_1]$ ,  $\sigma_2 \in [0, \sigma_1]$  t.c.

$$D_{ji}^2 f(\mathbf{x} + \tau_2\mathbf{e}_i + \sigma_1\mathbf{e}_j) ts = D_{ij}^2 f(\mathbf{x} + \tau_1\mathbf{e}_i + \sigma_2\mathbf{e}_j) st.$$

Quando  $t, s \rightarrow 0$ , per continuità delle derivate seconde si ha la conclusione. □

**Esempio 2.2.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y).$$

Si ha

$$\nabla f(x, y) = (2x \cos(x^2 + y), \cos(x^2 + y)),$$

da cui (per calcolo diretto o applicando il Teorema 2.1)

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 \cos(x^2 + y) - 4x^2 \sin(x^2 + y) & -2x \sin(x^2 + y) \\ -2x \sin(x^2 + y) & -\sin(x^2 + y) \end{bmatrix}.$$

**Esempio 2.3.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Questa funzione è derivabile due volte in  $(0, 0)$  ma con derivate seconde discontinue. Il Teorema 2.1 non si applica, infatti  $D_{xy}^2 f(0, 0) = -1$ ,  $D_{yx}^2 f(0, 0) = 1$ .

Il differenziale secondo è usato per approssimare una funzione mediante un polinomio di grado 2, fornendo così una versione più accurata della formula (1.2):

**Teorema 2.4.** (Formula di Taylor, ordine 2) *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile due volte in  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Allora si ha*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} = 0.$$

*Dimostrazione.* Troviamo  $r > 0$  t.c.  $B_r(\mathbf{x}_0) \subset A$ . Quindi definiamo la funzione  $\varphi : B_r(\mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$\varphi(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) - \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}).$$

La funzione  $\varphi$  è derivabile due volte nel suo dominio, inoltre  $\varphi(\mathbf{0}) = 0$  e si ha per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} D_i\varphi(\mathbf{h}) &= D_i f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - D_i f(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2D_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0) h_j \\ &= D_i f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - D_i f(\mathbf{x}_0) - d(D_i f)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

(abbiamo usato il Teorema 2.1). Applicando (1.2) alla funzione  $D_i f$ , si vede che

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\nabla\varphi(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Per il Teorema 1.14, per ogni  $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$  esiste  $\tau \in [0, 1]$  t.c.

$$\varphi(\mathbf{h}) = \nabla\varphi(\tau\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}.$$

Dunque si ha

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\varphi(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|^2} = 0,$$

che equivale alla conclusione.  $\square$

Una formulazione alternativa del Teorema 2.4 è la seguente, che si può considerare un raffinamento di (1.2):

$$(2.2) \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{o}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2).$$

Mediante il Teorema 2.4 e i risultati sulle forme quadratiche (ved. [2], [8]) possiamo stabilire un 'inverso parziale' del Teorema 1.15, che fornisce una *classificazione dei punti critici*:

**Teorema 2.5.** *Siano  $f \in C^2(A)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A$  t.c.  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Allora:*

- (i) *se  $d^2 f(\mathbf{x}_0)$  è definito positivo,  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo locale proprio;*
- (ii) *se  $d^2 f(\mathbf{x}_0)$  è definito negativo,  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo locale proprio;*
- (iii) *se  $d^2 f(\mathbf{x}_0)$  è indefinito,  $\mathbf{x}_0$  non è un punto di estremo locale.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo (i). Per il Teorema 2.4, ricordando che  $df(\mathbf{x}_0) = 0$ , si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - 1/2 d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} = 0.$$

Poiché la forma quadratica  $d^2 f(\mathbf{x}_0)$  è definita positiva, esiste  $\lambda > 0$  t.c. per ogni  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \geq \lambda |\mathbf{h}|^2,$$

da cui, per  $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  abbastanza vicino a  $\mathbf{x}_0$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > \frac{\lambda}{4} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 > 0,$$

così che  $\mathbf{x}_0$  risulta un punto di minimo locale proprio per  $f$ .  $\square$

Data l'importanza del caso  $n = 2$ , particolarizziamo il Teorema 2.5 a tale caso:

**Corollario 2.6.** *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $f \in C^2(A)$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  t.c.  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Allora:*

- (i) *se  $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ ,  $D_{xx}^2 f(x_0, y_0) > 0$ ,  $x_0$  è un punto di minimo locale proprio;*
- (ii) *se  $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ ,  $D_{xx}^2 f(x_0, y_0) < 0$ ,  $x_0$  è un punto di massimo locale proprio;*
- (iii) *se  $\det H_f(x_0, y_0) < 0$ ,  $x_0$  non è un punto di estremo locale.*

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 2.5 e dalla caratterizzazione delle forme quadratiche in  $\mathbb{R}^2$  (ved. [2]).  $\square$

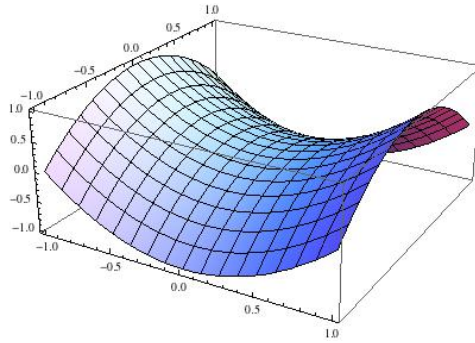


FIGURA 10. Punto di sella.

I punti critici descritti nel caso (iii) sono detti *punti di sella*. Il motivo è chiarito dal seguente esempio:

**Esempio 2.7.** Sia

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

L'unico punto critico di  $f$  è  $(0, 0)$ . La sua matrice hessiana è per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

dunque la forma quadratica  $d^2f(0, 0)$  è indefinita. Il punto  $(0, 0)$  è di minimo per  $f(\cdot, 0)$  e di massimo per  $f(0, \cdot)$  (fig. 10).

Il Teorema 2.5 lascia scoperto il caso in cui la forma quadratica  $d^2f(\mathbf{x}_0)$  è solo semi-definita (positiva o negativa), in particolare quello in cui  $\det H_f(\mathbf{x}_0) = 0$ . In tale caso  $\mathbf{x}_0$  può essere un punto critico di qualunque tipo.

**Esempio 2.8.** Sia  $f(x, y) = x^4 + y^4$ . Allora  $(0, 0)$  è un punto critico per  $f$  con matrice hessiana

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ed è un punto di minimo (globale). Ma per  $-f$  lo stesso punto è di massimo globale. Infine, per la funzione  $g(x, y) = x^4 - y^4$  il punto  $(0, 0)$  è di sella.

**Esempio 2.9.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2.$$

I punti critici di  $f$  sono individuati dal sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y = 0, \end{cases}$$

la cui unica soluzione è  $(0, 0)$ . La matrice hessiana è

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

con determinante  $-5$ , dunque  $(0, 0)$  è un punto di sella (fig. 11).

**Esempio 2.10.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

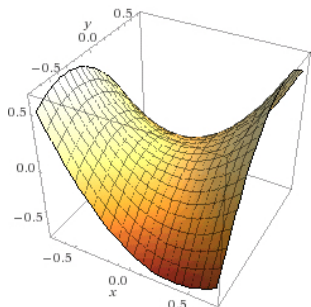


FIGURA 11.

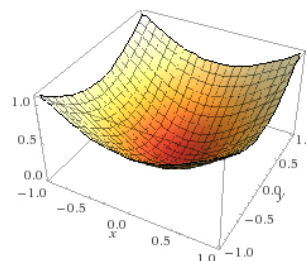


FIGURA 12.

I punti critici di  $f$  sono individuati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2+y^2} = 0 \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} = 0, \end{cases}$$

la cui unica soluzione è  $(0, 0)$ . La matrice hessiana è

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

con determinante 4, mentre  $D_{xx}^2 f(0, 0) = 2$ . Dunque  $(0, 0)$  è un punto di minimo locale (in effetti globale, fig. 12).

**Esempio 2.11.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \sin(x)^2 + \cos(y).$$

I punti critici di  $f$  sono individuati dal sistema

$$\begin{cases} 2 \sin(x) \cos(x) = 0 \\ -\sin(y) = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i punti

$$P_{h,k} = \left( \frac{h\pi}{2}, k\pi \right) \quad (h, k \in \mathbb{Z}).$$

La matrice hessiana nel punto  $P_{h,k}$  è

$$H_f\left(\frac{h\pi}{2}, k\pi\right) = \begin{bmatrix} (-1)^{h/2} 2 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{bmatrix},$$

che ha determinante  $(-1)^{h+k+1} 2$ . Dunque distinguiamo i casi seguenti:

- se  $h$  è pari e  $k$  è dispari,  $P_{h,k}$  è un punto di minimo locale;
- se  $h$  è dispari e  $k$  è pari,  $P_{h,k}$  è un punto di massimo locale;
- se  $h, k$  sono entrambi pari (o entrambi dispari),  $P_{h,k}$  è un punto di sella (fig. 13).

Non sempre il metodo suggerito dal Teorema 2.5 è di facile applicazione:

**Esempio 2.12.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)}.$$

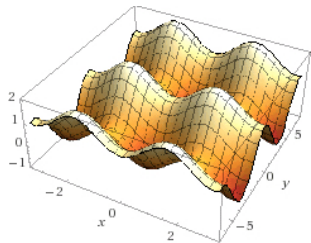


FIGURA 13.

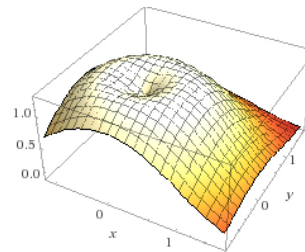


FIGURA 14.

Questa funzione è di classe  $C^2$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e i suoi punti critici corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^{\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x \right) = 0 \\ e^{\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y \right) = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i punti della circonferenza

$$\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Il calcolo della matrice hessiana, in questo caso, è proibitivo, quindi seguiamo un altro metodo. La funzione  $f$  è a simmetria radiale, ha valori positivi, e si ha

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0,$$

dunque per il Teorema di Weierstraß (ved. [2]) essa ammette massimo globale. Per il Teorema 1.15, gli unici candidati al ruolo di punto di massimo globale sono  $(0, 0)$  (in cui  $f$  non è derivabile) e i punti di  $\gamma$  (critici). Si ha  $f(0, 0) = 1$  e  $f(x, y) = e^{\frac{1}{4}} > 1$  per ogni  $(x, y) \in \gamma$ , dunque i punti di  $\gamma$  sono tutti punti di massimo globale (fig. 14).

Il carattere di  $d^2f$ , se si conserva in un insieme, è collegato alla *convessità* della funzione  $f$ :

**Lemma 2.13.** *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso,  $f \in C^2(A)$ . Allora:*

- (i) *se  $d^2f(\mathbf{x})$  è definito positivo per ogni  $\mathbf{x} \in A$ ,  $f$  è convessa;*
- (ii) *se  $d^2f(\mathbf{x})$  è definito negativo per ogni  $\mathbf{x} \in A$ ,  $f$  è concava.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo (i). Sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ , e sia  $\varphi \in C^2(A)$  definita da

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Si vede facilmente che  $\varphi(\mathbf{x}_0) = 0$ ,  $\nabla\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  e  $d^2\varphi(\mathbf{x}_0) = d^2f(\mathbf{x}_0)$ , quindi per il Teorema 2.5  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo locale per  $\varphi$ . Abbiamo dunque, per ogni  $\mathbf{x} \in A$  prossimo a  $\mathbf{x}_0$ ,  $\varphi(\mathbf{x}) \geq 0$  cioè

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

(geometricamente,  $\text{gr}(f)$  si colloca sopra il suo iperpiano tangente in  $P_0 = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ ). Pertanto,  $f$  è convessa in un intorno di  $\mathbf{x}_0$ . Poiché  $\mathbf{x}_0$  è arbitrario,  $f$  risulta convessa in  $A$ .  $\square$

**Esempio 2.14.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

La matrice hessiana di  $f$  è

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dunque,  $d^2 f(x, y)$  è una forma quadratica definita positiva per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se ne deduce che  $f$  è convessa in  $\mathbb{R}^2$ .

Allo stesso modo visto sopra si definiscono le derivate parziali e i differenziali di qualunque ordine  $k \in \mathbb{N}$ . Per  $k \geq 3$  essi non hanno un'importanza paragonabile a quelle delle derivate e differenziali di ordine 1 o 2, né un immediato significato geometrico: pertanto rinunciamo a descrivere dettagliatamente questi concetti, limitandoci a riportare (senza dimostrazione) l'estensione a un ordine arbitrario del Teorema 2.4:

**Teorema 2.15.** (Formula di Taylor, ordine  $k$ ) Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile  $k$  volte in  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Allora si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \dots - \frac{1}{k!} d^k f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^k} = 0.$$

Il Teorema 2.15 fornisce un'approssimazione locale di  $f$  mediante un polinomio di grado  $k$ , detto *polinomio di Taylor* (se  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  esso è detto *polinomio di Maclaurin*). Formulazione alternativa:

$$(2.3) \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^k \frac{d^i f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{i!} + \mathbf{o}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^k).$$

**Esempio 2.16.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}.$$

Calcoliamo il polinomio di Maclaurin di  $f$  di ordine 3. Si ha

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + \mathbf{o}((x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}).$$

In particolare,  $(0, 0)$  è un punto di massimo globale per  $f$ .

**Esercizio 2.17.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + x^2 y^2}.$$

In quali punti di  $\mathbb{R}^2$   $f$  è derivabile? Calcolare in tali punti le sue derivate prime e seconde.

**Esercizio 2.18.** (Difficile) Quante sono le derivate parziali di  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di ordine  $k \in \mathbb{N}_0$ ? E se  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , quante occorre calcolarne?

**Esercizio 2.19.** Determinare i punti critici delle seguenti funzioni, studiandone la natura:

$$xy, \quad x^2 - y^4, \quad \sin(x^2 + y^2) - \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{xy}{e^{x^2 + y^2}}, \quad \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}.$$

**Esercizio 2.20.** Stabilire se  $(0, 0)$  è un punto critico per la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \sin(x^2),$$

e in tal caso studiarne la natura.

**Esercizio 2.21.** Determinare i punti critici di  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = e^{(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2},$$

studiandone la natura.

**Esercizio 2.22.** (Difficile) La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

non è concava in  $\mathbb{R}^2$ . Tuttavia esiste  $R > 0$  t.c. la restrizione di  $f$  a  $B_R(0, 0)$  è concava: qual è il massimo valore possibile di  $R$ ?

## 3. OTTIMIZZAZIONE

In matematica, per *ottimizzazione* s'intende il problema di determinare gli estremi globali di una funzione a valori reali. Sia dunque  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, che supporremo sempre continua. Il procedimento generale per risolvere questo problema si articola nei seguenti passi:

- (a) studiare i punti di  $\text{int}(A)$ , determinando i punti in cui  $f$  non è derivabile e i punti critici ( $\nabla f = \mathbf{0}$ );
- (b) studiare i punti di  $\partial A \cap A$ , seguendo uno dei due metodi esposti di seguito (metodo delle parametrizzazioni, metodo dei moltiplicatori di Lagrange);
- (c) calcolare i limiti di  $f$  all'infinito (se  $A$  è illimitato) o nei punti di  $\partial A \setminus A$  (se ve ne sono);
- (d) confrontare i risultati dei passi precedenti per determinare gli estremi globali di  $f$ .

Il passo (a) è noto come *ottimizzazione libera* ed è basato sui Teoremi 1.15 e 2.5: il primo restringe la ricerca dei punti di estremo locale a una delle due famiglie menzionate di punti di  $A$ , il secondo permette (se  $f$  ammette derivate seconde) di stabilire la natura dei punti critici. Se  $A$  è aperto, dopo aver completato il passo (a) si passa direttamente a (c).

**Esempio 3.1.** Determiniamo gli estremi globali di

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$$

nel suo insieme di definizione

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Poiché  $f \in C^2(A)$ , cominciamo calcolando il gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left( -\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, -\frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right).$$

Dunque l'unico punto critico è  $(0, 0)$ . La matrice hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2y^2 - 2x^2 - 2}{(1 - x^2 - y^2)^2} & -\frac{4xy}{(1 - x^2 - y^2)^2} \\ -\frac{4xy}{(1 - x^2 - y^2)^2} & \frac{2x^2 - 2y^2 - 2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \end{bmatrix}$$

in  $(0, 0)$  ha il primo termine negativo e il determinante positivo, quindi  $(0, 0)$  è un punto di massimo locale. D'altra parte,  $f$  ha una simmetria radiale e

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \ln(1 - \rho^2) = -\infty$$

(qui stiamo anticipando il passo (c)), dunque possiamo concludere che

$$\inf_A f = -\infty, \quad \max_A f = f(0, 0) = 0.$$

Il passo (b) fa parte della cosiddetta *ottimizzazione vincolata*, il cui obiettivo è determinare gli estremi globali di  $f$  nell'insieme

$$S = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = 0\},$$

dove  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni, dette rispettivamente *obiettivo* e *vincolo*. Questo problema si può affrontare seguendo due metodi.

Esponiamo dapprima il *metodo delle parametrizzazioni*: esso consiste nel descrivere l'insieme  $S$  mediante una conveniente funzione  $\varphi : B \rightarrow A$  (detta parametrizzazione) per poi applicare i metodi dell'ottimizzazione libera alla funzione composta  $f \circ \varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ .

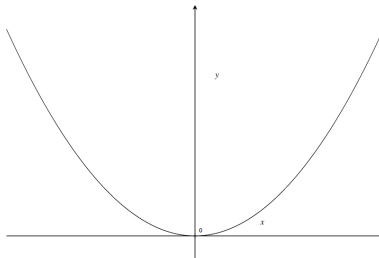


FIGURA 15.

**Esempio 3.2.** Determinare gli estremi globali della funzione definita da

$$f(x, y) = e^{x-y}$$

sotto il vincolo

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0\}$$

(fig. 15). Descriviamo il vincolo mediante la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Così siamo ricondotti alla ricerca degli estremi della funzione  $t \rightarrow e^{t-t^2}$  in  $\mathbb{R}$ . Questo problema si risolve come in [1], trovando infine

$$\inf_S f = 0, \quad \max_S f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}}.$$

In alternativa si può applicare il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*: se  $f, g \in C^1(A)$ , si definisce una funzione  $\mathcal{L} : (A \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo per ogni  $(\mathbf{x}, \lambda) \in A \times \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}),$$

e si determinano i punti critici di  $\mathcal{L}$ , fra i quali vanno cercati i punti di estremo vincolato. Vale infatti il seguente risultato (per cui dobbiamo fare ricorso a un teorema della Sezione 4):

**Teorema 3.3.** (Moltiplicatori di Lagrange) *Siano  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  t.c.*

- (i)  $g(\mathbf{x}_0) = 0$ ;
- (ii)  $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ ;
- (iii)  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$  (o  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ ) per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(\mathbf{x}) = 0$ .

Allora esiste  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  t.c.

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_0 \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $D_n g(\mathbf{x}_0) \neq 0$  (gli altri casi si trattano analogamente). Adottiamo per i punti di  $\mathbb{R}^n$  la notazione  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$  ( $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ). Per il Teorema 4.3 esistono un aperto  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  e una funzione  $\varphi \in C^1(B)$  t.c.  $\varphi(\mathbf{x}'_0) = x_n^0$ ,  $g(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) = 0$  per ogni  $\mathbf{x}' \in B$ , e inoltre per ogni  $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$D_i \varphi(\mathbf{x}') = -\frac{D_i g(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))}{D_n g(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))}.$$

Poniamo per ogni  $\mathbf{x}' \in B$

$$\psi(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')).$$

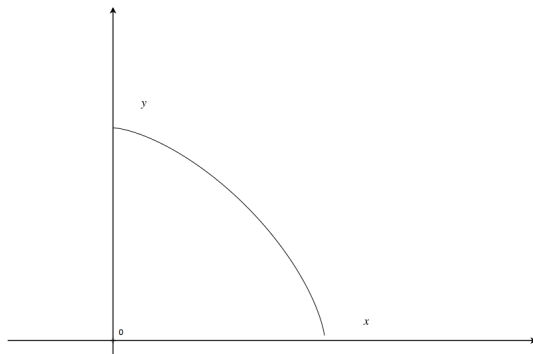


FIGURA 16.

Si ha allora, per il Lemma 1.13,  $\psi \in C^1(B)$  e per ogni  $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} D_i \psi(\mathbf{x}') &= D_i f(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) + D_n f(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) D_i \varphi(\mathbf{x}') \\ &= D_i f(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) - \frac{D_n f(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) D_i g(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))}{D_n g(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))}. \end{aligned}$$

Il punto  $\mathbf{x}'_0 \in B$  è di estremo locale per  $\psi$ , dunque per il Teorema 1.15 abbiamo  $\nabla \psi(\mathbf{x}'_0) = \mathbf{0}$ , ovvero per ogni  $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$D_i f(\mathbf{x}_0) - \frac{D_n f(\mathbf{x}_0)}{D_n g(\mathbf{x}_0)} D_i g(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Posto  $\lambda_0 = D_n f(\mathbf{x}_0)(D_n g(\mathbf{x}_0))^{-1}$ , si ha infine per ogni  $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$D_i f(\mathbf{x}_0) = \lambda_0 D_i g(\mathbf{x}_0),$$

mentre la stessa relazione è ovvia per  $i = n$ . □

Nel caso  $n = 2$ , richiamando l'Osservazione 1.17, possiamo esprimere il significato geometrico del Teorema 3.3 nel modo seguente: se  $(x_0, y_0) \in S$  è un punto di estremo vincolato, allora  $\nabla f(x_0, y_0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0)$  sono entrambi ortogonali alla curva di livello  $S$  e pertanto paralleli fra loro.

**Esempio 3.4.** Determiniamo gli estremi globali di

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sotto il vincolo

$$x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 1$$

(fig. 16). Ovviamente, il vincolo contiene la condizione implicita  $x \geq 0, y \geq 0$ . Calcoliamo la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} - 1),$$

definita in  $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ . I punti critici di  $\mathcal{L}$  corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - \frac{3}{2} \lambda x^{\frac{1}{2}} = 0 \\ 2y - \frac{3}{2} \lambda y^{\frac{1}{2}} = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} - 1 = 0, \end{cases}$$

cioè i punti da studiare sono (trascurando  $\lambda$ )

$$(0, 1), (1, 0), (2^{-\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{2}{3}}).$$

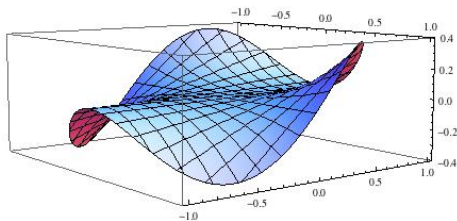


FIGURA 17.

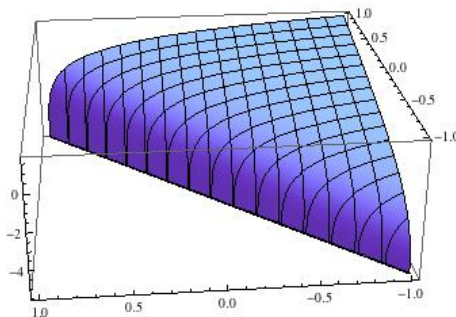


FIGURA 18.

Confrontiamo i rispettivi valori di  $f$ :

$$f(0, 1) = f(1, 0) = 1, \quad f\left(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{2}{3}}\right) = 2^{-\frac{1}{3}} < 1,$$

dunque  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  sono i punti di massimo vincolato e  $\left(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{2}{3}}\right)$  è il punto di minimo vincolato.

Nel passo **(b)**, in cui il vincolo descrive  $\partial A$ , usualmente l'insieme  $S$  è una curva o una superficie (ved. [4]) e si procede riducendo quindi la dimensione dell'insieme di definizione. Il metodo delle parametrizzazioni è più generale di quello dei moltiplicatori, in quanto non richiede che  $g$  sia derivabile. Tuttavia, quando può essere applicato, il metodo dei moltiplicatori risulta spesso più semplice.

**Esempio 3.5.** Determiniamo gli estremi globali di

$$f(x, y) = x^2 y$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(fig. 17). Cominciamo con lo studio dei punti interni. I punti critici di  $f$  sono descritti dal sistema

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0, \end{cases}$$

cioè sono i punti  $(0, y)$ ,  $y \in ]-1, 1[$ . La matrice hessiana è

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix},$$

dunque  $\det(H_f)(0, y) = 0$  per ogni  $y \in ]-1, 1[$ . Tuttavia, osservando il segno di  $f$ , deduciamo facilmente che  $(0, y)$  è un punto di minimo locale per  $y \in ]0, 1[$ , di massimo locale per  $y \in ]-1, 0[$  e di sella per  $y = 0$ . Passiamo allo studio di  $\partial A$ , usando il metodo dei moltiplicatori. Si ha la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

i cui punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy - 2\lambda x = 0 \\ x^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Risolvendolo, troviamo i seguenti punti:

$$\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

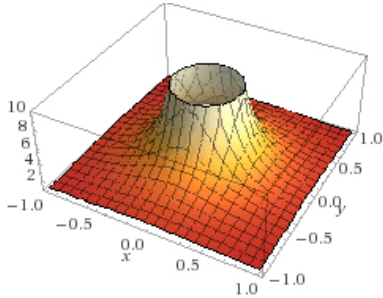


FIGURA 19.

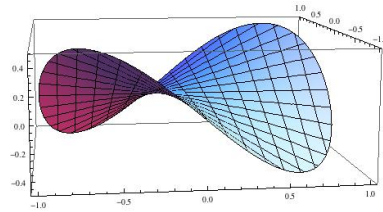


FIGURA 20.

Si ha dunque

$$\min_A f = f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \max_A f = f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Il passo (c) si rende necessario se  $A$  è illimitato o presenta dei 'buchi': se gli estremi globali di  $f$  corrispondono ai limiti calcolati in questo modo, essi non sono massimi né minimi (in particolare, essi possono essere  $\pm\infty$ ).

**Esempio 3.6.** Determiniamo gli estremi globali di

$$f(x, y) = \ln(x - y) + x$$

nel suo insieme di definizione

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

(fig. 18). L'insieme  $A$  è aperto e illimitato. Calcoliamo per ogni  $(x, y) \in A$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x - y + 1}{x - y}, -\frac{1}{x - y}\right),$$

e osserviamo che  $f$  non ha punti critici. D'altra parte, fissato per semplicità  $y = 0$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = +\infty,$$

dunque possiamo concludere

$$\inf_A f = -\infty, \quad \sup_A f = +\infty.$$

**Esempio 3.7.** Determiniamo gli estremi globali di

$$f(x, y) = \frac{1}{\arctan(x^2 + y^2)}$$

nel suo insieme di definizione  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , aperto illimitato (fig. 19). Si ha per ogni  $(x, y) \in A$

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{2x}{(1 + (x^2 + y^2)^2) \arctan(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2y}{(1 + (x^2 + y^2)^2) \arctan(x^2 + y^2)^2}\right),$$

quindi  $f$  non ha punti critici. D'altra parte, poiché

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\arctan(\rho^2)} = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\arctan(\rho^2)} = \frac{2}{\pi},$$

si ha

$$\inf_A f = \frac{2}{\pi}, \quad \sup_A f = +\infty.$$

Nel passo conclusivo **(d)** si confrontano i valori ottenuti nei passi **(a)** - **(c)**: il più piccolo è l'estremo inferiore (eventualmente minimo) di  $f$  in  $A$ , il più grande è l'estremo superiore (eventualmente massimo) di  $f$  in  $A$ . In questa fase, è bene ricordare che, per il Teorema di Weierstraß, se  $A$  è compatto,  $f$  ammette massimo e minimo globali (ved. [2]).

**Esempio 3.8.** Determiniamo gli estremi globali di

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(fig. 20). Il gradiente di  $f$  è

$$\nabla f(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)),$$

quindi l'unico punto critico di  $f$  in  $A$  è  $(0, 0)$  (ricordiamo che  $\frac{\pi}{2} > 1$ ). La matrice hessiana è

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -y^2 \sin(xy) & \cos(xy) - xy \sin(xy) \\ \cos(xy) - xy \sin(xy) & -x^2 \sin(xy) \end{bmatrix},$$

che in  $(0, 0)$  ha determinante  $-1$ , dunque  $(0, 0)$  è un punto di sella. Studiamo adesso  $\partial A$ , seguendo il metodo dei moltiplicatori. La funzione lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \sin(xy) - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

dunque i punti di estremo globale sono fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y \cos(xy) - 2\lambda x = 0 \\ x \cos(xy) - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

La (non semplice) risoluzione del sistema precedente fornisce i punti

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Confrontando i valori otteniamo

$$\min_A f = f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \max_A f = f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

**Esempio 3.9.** Determiniamo gli estremi globali di

$$f(x, y) = x^4 + 2y^2$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq e^x\}$$

(fig. 21). L'insieme  $A$  è compatto, quindi  $f$  ammette massimo e minimo globali. Calcoliamo il gradiente

$$\nabla f(x, y) = (4x^3, 4y),$$

quindi l'unico punto critico in  $\text{int}(A)$  è  $(0, 0)$ . Dallo studio della matrice hessiana (o da semplici considerazioni di segno) deduciamo che si tratta di un punto di minimo locale con  $f(0, 0) = 0$ , che è in effetti sede di minimo globale per  $f$ :

$$\min_A f = f(0, 0) = 0.$$

Resta da trovare il massimo globale. Passiamo allo studio di  $\partial A$ , che va divisa in 4 parti con parametrizzazioni diverse:

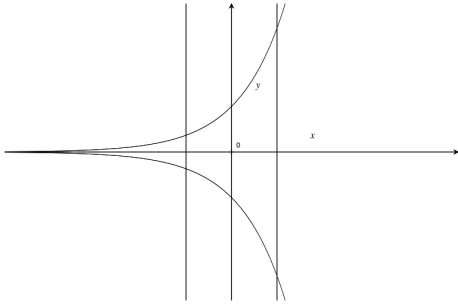


FIGURA 21.

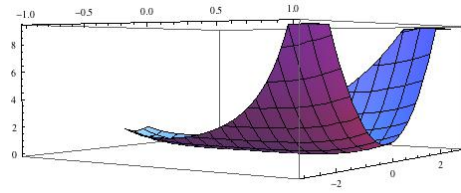


FIGURA 22.

- sul segmento  $\gamma_1$  di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases} \quad \left( t \in \left[ -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right] \right),$$

la funzione diventa  $t \mapsto 1 + 2t^2$ , massima per  $t = \pm \frac{1}{e}$ ;

- sull'arco  $\gamma_2$  di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases} \quad (t \in [-1, 1]),$$

la funzione diventa  $t \mapsto t^4 + 2e^{2t}$ , convessa e quindi massima per  $t = 1$ ;

- sul segmento  $\gamma_3$  di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad (t \in [-e, e]),$$

la funzione diventa  $t \mapsto 1 + 2t^2$ , massima per  $t = \pm e$ ;

- sull'arco  $\gamma_4$  di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = -e^t \end{cases} \quad (t \in [-1, 1]),$$

la funzione diventa  $t \mapsto t^4 + 2e^{2t}$ , convessa e quindi massima per  $t = 1$ .

Dunque, il massimo globale si trova confrontando i valori individuati (fig. 22):

$$\max_A f = f(1, \pm e) = 1 + 2e^2.$$

Talvolta il metodo esposto sopra non è sufficiente, allora occorre integrarlo con alcune considerazioni geometriche:

**Esempio 3.10.** Determiniamo gli estremi globali della funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nel suo insieme di definizione  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (fig. 23). Abbiamo  $f \in C^2(A)$ , dunque calcoliamo

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

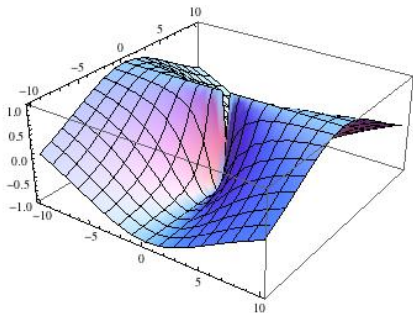


FIGURA 23.

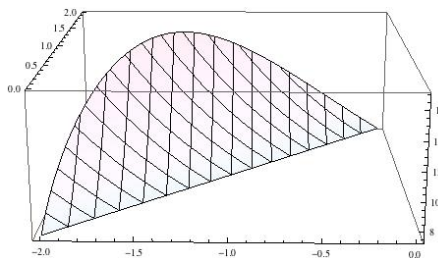


FIGURA 24.

I punti critici sono quindi quelli degli assi, caratterizzati dalla condizione  $xy = 0$ . Calcoliamo la matrice hessiana:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{4y^4 - 12x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3} & \frac{8x^3y - 8xy^3}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{8x^3y - 8xy^3}{(x^2 + y^2)^3} & \frac{12x^2y^2 - 4x^4}{(x^2 + y^2)^3} \end{bmatrix}.$$

Si vede facilmente che, per ogni  $(x, y) \in A$  con  $xy = 0$ , si ha  $\det H_f(x, y) = 0$ , dunque ricadiamo nel caso indeterminato. Osserviamo allora che  $f(x, 0) = 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mentre  $f(0, y) = -1$  per ogni  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , mentre per ogni  $(x, y) \in A$  si ha

$$-1 \leq f(x, y) \leq 1,$$

dunque

$$\min_A f = -1, \quad \max_A f = 1.$$

**Esempio 3.11.** Determiniamo gli estremi di

$$f(x, y) = e^{y-x}$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$$

(fig. 24). Il gradiente di  $f$  è

$$\nabla f(x, y) = (-e^{y-x}, e^{y-x}),$$

dunque  $f$  non ha punti critici in  $A$ . La frontiera di  $A$  si divide in due parti:

- sul segmento  $\gamma_1$  di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \end{cases} \quad (t \in [-2, 0]),$$

la funzione diventa la costante  $e^2$ ;

- sull'arco  $\gamma_2$  di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \end{cases} \quad \left(t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right),$$

la funzione diventa  $t \mapsto e^{2 \sin(t) - 2 \cos(t)}$ , massima per  $t = \frac{3}{4}\pi$  e minima agli estremi.

Dunque, confrontando i valori otteniamo

$$\min_A f = e^2 \text{ (ottenuto in tutti i punti di } \gamma_1), \max_A f = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = e^{2\sqrt{2}}.$$

Ma è più rapido osservare che, posto  $s = y - x$ , la funzione da studiare è  $s \mapsto e^s$ , crescente: pertanto, basta trovare i punti di  $A$  che rendono minimo e massimo, rispettivamente, il parametro  $s$ .

**Osservazione 3.12.** Se la funzione  $f$  e l'insieme  $A$  presentano delle simmetrie, è naturale aspettarsi che gli insiemi dei punti critici e dei punti di estremo globale riflettano tali simmetrie: per esempio, se  $f$  ha una simmetria radiale, cioè  $f(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x}|)$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$ , dove  $\varphi : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , il suo insieme critico sarà

$$\{\mathbf{x} \in A : D\varphi(|\mathbf{x}|) = 0\},$$

con la possibile aggiunta di  $\mathbf{0}$  (punto in cui  $|\cdot|$  non è derivabile).

**Osservazione 3.13.** Alla luce del Teorema 2.2, vediamo che se  $f \in C^2(A)$  e  $\varphi$  rappresenta il polinomio di Taylor di  $f$  di ordine 2 centrato in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$ , allora  $f$  e  $\varphi$  hanno in  $\mathbf{x}_0$  non solo lo stesso valore ma anche gli stessi differenziali di ordini 1, 2. Dunque, se  $\mathbf{x}_0$  è un punto critico per  $f$ , lo è anche per  $\varphi$  e con la stessa natura (Teorema 2.5). In effetti, intorno a  $\mathbf{x}_0$  le due funzioni hanno comportamento analogo. Si veda l'Esempio 3.8, che descrive bene la relazione

$$\sin(xy) \sim xy$$

intorno a  $(0, 0)$  (osserviamo che allontanandosi dall'origine l'approssimazione si perde, infatti  $\sin(xy)$  è una funzione limitata e  $xy$  no).

**Esercizio 3.14.** Determinare gli estremi globali delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi di definizione:

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

**Esercizio 3.15.** Determinare gli estremi globali di  $f$  nell'insieme  $A$ :

$$f(x, y) = \ln(1 + x)y, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$f(x, y) = e^{x-y}, \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x} \right\},$$

$$f(x, y) = x - x^2 - y^2, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$f(x, y) = x, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 + 1)^2 \leq 4\},$$

$$f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y \leq 1\},$$

$$f(x, y) = \cos(x - y), \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{e^{x^2+y^2}}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \geq 4\},$$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

## 4. FUNZIONI VETTORIALI

Estendiamo ora alcune delle nozioni introdotte finora alle funzioni a valori vettoriali, ovvero funzioni del tipo  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Come visto in [2], la funzione  $\mathbf{f}$  corrisponde (biunivocamente) a  $m$  funzioni scalari  $f_1, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$  t.c. per ogni  $\mathbf{x} \in A$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})).$$

Dunque, è naturale porre le seguenti definizioni:

**Definizione 4.1.** *La funzione  $\mathbf{f}$  è detta*

- (i) *(parzialmente) derivabile in  $\mathbf{x} \in A$  se  $f_j$  è derivabile in  $\mathbf{x}$  per ogni  $j \in \{1, \dots, m\}$ ;*
- (ii) *differenziabile in  $\mathbf{x} \in A$  se  $f_j$  è differenziabile in  $\mathbf{x}$  per ogni  $j \in \{1, \dots, m\}$ .*

Le nozioni collegate vanno adattate al contesto vettoriale: le  $nm$  derivate parziali sono raccolte nella *matrice jacobiana*

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \dots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \dots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \dots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Le righe di  $J_{\mathbf{f}}$  sono i gradienti di  $f_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) e le sue colonne sono le derivate parziali  $D_i \mathbf{f}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Se  $n = m$ , il determinante di  $J_{\mathbf{f}}$  è detto *determinante jacobiano* di  $\mathbf{f}$ .

Il *differenziale* di  $\mathbf{f}$  in un punto  $\mathbf{x} \in A$  è un'applicazione lineare  $d\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , rappresentata dalla matrice jacobiana, così che per ogni  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \mathbf{h}$$

(prodotto righe per colonne). Diremo che  $\mathbf{f} \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$  se  $D_i \mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  (o equivalentemente se  $f_j \in C^1(A)$  per ogni  $j \in \{1, \dots, m\}$ ), e questa condizione è sufficiente affinché  $\mathbf{f}$  sia differenziabile (Teorema 1.18). In particolare, se  $n = 1$  scriveremo

$$D\mathbf{f}(x) = (Df_1(x), \dots, Df_m(x)),$$

e in questo caso la derivabilità coincide con la differenziabilità e implica la continuità di  $\mathbf{f}$  (questo caso sarà approfondito in [4]). Altri casi notevoli sono  $n = 2$ ,  $m = 3$  (ved. [4]) e  $n = m$  (ved. [5]).

Le regole del calcolo differenziale sono analoghe a quelle del caso scalare. Aggiungiamo un risultato 'duale' del Lemma 1.13:

**Lemma 4.2.** *Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : I \rightarrow A$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.*

- (i)  *$\mathbf{f}$  è derivabile in  $x_0 \in I$ ;*
- (ii)  *$g$  è differenziabile in  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(x_0)$ .*

*Allora  $g \circ \mathbf{f}$  è derivabile in  $x_0$  e*

$$D(g \circ \mathbf{f})(x_0) = \nabla g(\mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{f}(x_0).$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $\varphi = g \circ \mathbf{f}$ . Per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$  sia  $\mathbf{h} = \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)$ , quindi abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0) - \nabla g(\mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{f}(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{g(\mathbf{y}_0 + \mathbf{h}) - g(\mathbf{y}_0) - \nabla g(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \frac{|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)|}{x - x_0} + \nabla g(\mathbf{y}_0) \cdot \left( \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} - D\mathbf{f}(x_0) \right), \end{aligned}$$

e gli addendi del secondo membro tendono a 0 per  $x \rightarrow x_0$ . □

Anche in questo caso, come è facile vedere, (1.4) è verificata. Più in generale, se  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  sono differenziabili, lo è anche  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  con

$$(4.1) \quad J_{(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (ovvero vale (1.4)).

Il prossimo risultato (che non dimostriamo) è relativo al problema delle *funzioni definite implicitamente*, ovvero delle funzioni vettoriali  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ) definite mediante un sistema del tipo

$$(4.2) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$  (osserviamo che il numero delle equazioni del sistema coincide con quello delle variabili da 'esplicitare'). In generale, non è possibile risolvere il sistema (4.2) trovando una funzione concreta  $\mathbf{g}$ , tuttavia è possibile stabilire l'esistenza e l'andamento approssimativo di  $\mathbf{g}$  in un intorno di un punto assegnato. Introduciamo per  $\mathbf{f}$  le 'matrici jacobiane parziali'

$$J_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} D_{x_1} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & D_{x_2} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & D_{x_n} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ D_{x_1} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & D_{x_2} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & D_{x_n} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{x_1} f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & D_{x_2} f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & D_{x_n} f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} D_{y_1} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & D_{y_2} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & D_{y_m} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ D_{y_1} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & D_{y_2} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & D_{y_m} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{y_1} f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & D_{y_2} f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & D_{y_m} f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

(osserviamo che la prima appartiene a  $\mathbb{R}_n^m$  e la seconda a  $\mathbb{R}_m^m$ ). Vale il seguente risultato (che non dimostriamo):

**Teorema 4.3.** (Dini) *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  t.c.*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}, \quad \det J_{\mathbf{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

*Allora esistono  $B \subset \mathbb{R}^n$  aperto e un'unica funzione  $\mathbf{g} \in C^1(B, \mathbb{R}^m)$  t.c.*

- (i)  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ ;
- (ii)  $(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \in A$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{x} \in B$ ;
- (iii) per ogni  $\mathbf{x} \in B$  si ha

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = -J_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) (J_{\mathbf{f},\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})))^{-1}.$$

Per farsi un'idea del significato del Teorema 4.3, si ponga  $n = m = 1$ : l'insieme descritto dall'equazione

$$(4.3) \quad f(x, y) = 0$$

si può rappresentare come una curva  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  (ved. [4]), passante per il punto  $(x_0, y_0)$  e avente in tale punto retta tangente  $\mathcal{T}$  non parallela all'asse  $\vec{y}$  (perché  $D_y f(x_0, y_0) \neq 0$ ). Dunque l'intersezione di  $\gamma$  con un intorno (convenientemente piccolo) di  $(x_0, y_0)$  si può esprimere come il grafico di una funzione  $g \in C^1(I)$  ( $I \subset \mathbb{R}$  intervallo) t.c. (4.3) sia, localmente, equivalente a

$$y = g(x).$$

A questo punto, la funzione  $x \mapsto f(x, g(x))$  è la costante 0 e pertanto ha derivata nulla per ogni  $x \in I$ . Si ha quindi

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) Dg(x) = 0,$$

che è la versione scalare di (iii).

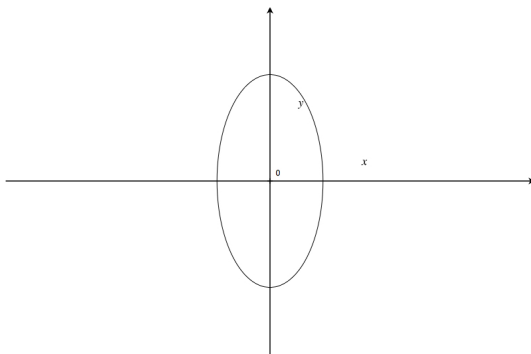


FIGURA 25.

**Esempio 4.4.** Consideriamo l'equazione

$$4x^2 + y^2 = 1$$

che descrive un'ellisse in  $\mathbb{R}^2$  (fig. 25). La curva in questione *non può essere* il grafico di una funzione  $y = g(x)$  in quanto contiene punti con la stessa ascissa e ordinate diverse. Pertanto ci restringiamo alla semi-ellisse superiore, passante per il punto  $(0, 1)$ , che è il grafico della funzione  $g : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}.$$

Applichiamo il Teorema 4.3 alla funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 1$$

nel punto  $(0, 1)$ , dove si ha  $D_x f(0, 1) = 1$ : esiste pertanto una funzione  $g$  di classe  $C^1$  in un intorno di 0 t.c.  $g(0) = 1$  e

$$Dg(x) = -\frac{D_x f(x, g(x))}{D_y f(x, g(x))}.$$

Inoltre tale funzione è *unica*, quindi coincide con la  $g$  trovata precedentemente per calcolo diretto: infatti si ha

$$Dg(x) = -\frac{4x}{\sqrt{1 - 4x^2}} = -\frac{D_x f(x, \sqrt{1 - 4x^2})}{D_y f(x, \sqrt{1 - 4x^2})}.$$

**Esempio 4.5.** Consideriamo l'equazione

$$e^{x+y} = x \cos(y^2) + 1.$$

Non è semplice risolvere direttamente questa equazione. Poniamo dunque

$$f(x, y) = e^{x+y} - x \cos(y^2) - 1$$

e osserviamo che  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  con

$$\nabla f(x, y) = (e^{x+y} - \cos(y^2), e^{x+y} + 2xy \sin(y^2)).$$

In particolare si ha  $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$ . Dunque, per il Teorema 4.3 esiste una funzione  $g \in C^1(]-\delta, \delta[)$  ( $\delta > 0$ ) t.c.  $g(0) = 0$  e per ogni  $x \in ]-\delta, \delta[$  si ha

$$e^{x+g(x)} = x \cos(g(x)^2) + 1.$$

Il teorema non fornisce un'espressione esplicita di  $g$  ma ci permette di calcolarne la derivata, per esempio

$$Dg(0) = -\frac{D_x f(0, 0)}{D_y f(0, 0)} = 0.$$

Una conseguenza importante del Teorema 4.3 è il seguente risultato, che fissa le condizioni affinché una funzione vettoriale sia invertibile:

**Teorema 4.6.** (Inversione locale) *Siano*  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in A$  t.c.

$$\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Allora esistono due insiemi aperti  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  t.c.  $\mathbf{x}_0 \in U$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in V$ , e una funzione  $\mathbf{g} \in C^1(V, U)$  t.c.

- (i)  $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$  per ogni  $\mathbf{y} \in V$ ;
- (ii)  $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  per ogni  $\mathbf{x} \in U$ .

Inoltre, per ogni  $\mathbf{x} \in U$  si ha

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1}.$$

*Dimostrazione.* Per semplicità supponiamo  $A = \mathbb{R}^n$ . Poniamo  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  e per ogni  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}.$$

Questa funzione verifica le ipotesi del Teorema 4.3, in particolare

$$J_{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Dunque esistono  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  aperti e  $\mathbf{g} \in C^1(V, U)$  t.c.  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$  per ogni  $\mathbf{y} \in V$ , e

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) = -J_{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y})}(J_{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y})})^{-1} = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1},$$

il che conclude la dimostrazione. □

Una funzione  $\mathbf{f} \in C^1(A, B)$  ( $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti), t.c.  $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$ , è detta *diffeomorfismo*. Per il Teorema 4.6, ogni diffeomorfismo è una funzione invertibile, con inversa di classe  $C^1$  (useremo diffusamente queste funzioni in [3]).

**Esempio 4.7.** Consideriamo la trasformazione  $\mathbf{f} : (]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}))$  che converte le coordinate polari di un punto in quelle cartesiane. Le componenti di questa funzione sono

$$f_1(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta), \quad f_2(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta)$$

(ved. [2]). La funzione  $\mathbf{f}$  è di classe  $C^1$  e ha in ogni punto determinante jacobiano

$$\det J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

Dunque, per il Teorema 4.6 e le considerazioni successive  $\mathbf{f}$  è un diffeomorfismo. La trasformazione inversa  $\mathbf{f}^{-1} : (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \rightarrow (]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  ha in ogni punto determinante jacobiano

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Osserviamo che, se si aggiunge l'origine,  $\mathbf{f}$  perde le sue proprietà (in particolare l'iniettività).

**Esercizio 4.8.** Considerando l'equazione dell'Esempio 4.4, stabilire se è possibile esplicitare  $y$  in funzione di  $x$  in un intorno del punto  $(\frac{1}{4}, 0)$ . E la  $x$  in funzione della  $y$ ?

**Esercizio 4.9.** La funzione  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\mathbf{f}(x, y) = \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)$$

è invertibile? In caso affermativo, qual è la sua funzione inversa?

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale.
- [2] A. IANNIZZOTTO, Funzioni di più variabili.
- [3] A. IANNIZZOTTO, Calcolo integrale in più variabili reali.
- [4] A. IANNIZZOTTO, Curve e superfici.
- [5] A. IANNIZZOTTO, Campi vettoriali.
- [6] C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica 2, Zanichelli (2016).
- [7] S. SALSA, A. SQUELLATI, Esercizi di analisi matematica 2, Zanichelli (2011).
- [8] E. SCHLESINGER, Algebra lineare e geometria, Zanichelli (2011).

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI  
VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY  
*E-mail address:* `antonio.iannizzotto@unica.it`