

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. L'insieme \mathbb{R}^n : rappresentazione geometrica, sistemi di coordinate, struttura algebrica (cenni). Topologia euclidea: norma, distanza, intorno, insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi, convessi, semplicemente connessi, punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione. Funzioni reali definite in \mathbb{R}^n : dominio, immagine, grafico, insiemi di livello. Successioni in \mathbb{R}^n . Limite di una funzione in un punto o all'infinito. Funzioni continue. Teoremi di Weierstraß, dei valori intermedi. Estremi locali, globali. Funzioni uniformemente continue. Funzioni vettoriali: limiti e continuità. Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

INDICE

1. L'insieme \mathbb{R}^n	1
2. Algebra degli spazi euclidei	3
3. Topologia degli spazi euclidei	8
4. Funzioni reali definite in \mathbb{R}^n	11
5. Successioni in \mathbb{R}^n	14
6. Limiti di funzioni in \mathbb{R}^n	16
7. Continuità in \mathbb{R}^n	22
8. Funzioni vettoriali	29
Riferimenti bibliografici	31

Versione del 26 dicembre 2020

1. L'INSIEME \mathbb{R}^n

L'universo è tutto centro e tutto circonferenza.

GIORDANO BRUNO

Denotiamo con \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali, definito in [2], e con $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale positivo. L'insieme

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

è detto *spazio euclideo* di dimensione n . Gli insiemi \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 sono anche detti *retta*, *piano*, *spazio euclideo*. Gli elementi di \mathbb{R}^n sono denotati con scritture come $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e detti *punti* (o *vettori*). Sullo spazio n -dimensionale si stabilisce un *sistema di coordinate cartesiane* fissando un'origine O e n rette orientate, ortogonali a due a due, dette assi. Dato un punto P dello spazio, esso può essere 'raggiunto' da O mediante n spostamenti paralleli agli assi, di lunghezze (relative) $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Così P viene identificato con l'elemento $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, le cui componenti sono dette coordinate di P . Similmente il vettore \overrightarrow{OP} (segmento orientato) è anch'esso identificato con \mathbf{x} .

Una rappresentazione alternativa dei punti dello spazio n -dimensionale si ottiene mediante le *coordinate polari*: per ogni punto P dello spazio, $P \neq O$, si definiscono un modulo $\rho > 0$ e $n - 1$

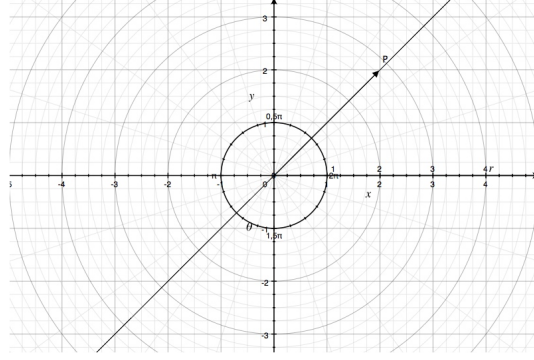


FIGURA 1. Il punto P ha coordinate cartesiane $(2, 2)$ e coordinate polari $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

numeri $\theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in [0, \pi]$, $\theta_{n-1} \in [0, 2\pi[$ t.c.

$$(1.1) \quad \begin{cases} x_1 = \rho \cos(\theta_1) \\ x_2 = \rho \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ x_3 = \rho \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \dots \\ x_n = \rho \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{n-1}) \end{cases}$$

Osservazione 1.1. Nel caso $n = 2$ le coordinate cartesiane e polari sono denotate con (x, y) , (ρ, θ) , rispettivamente, e la trasformazione (1.1) diventa

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

(fig. 1). Nel caso $n = 3$ le coordinate cartesiane e polari sono denotate con (x, y, z) , (ρ, θ, φ) , rispettivamente, e la trasformazione (1.1) diventa

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

(fig. 2). Sempre nel caso $n = 3$ si introducono anche le *coordinate cilindriche* (ρ, θ, ζ) t.c.

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = \zeta \end{cases}$$

(fig. 3). Ovviamente, sono possibili altre rappresentazioni (per esempio spostando il centro di un sistema di coordinate polari o ruotando gli assi di un sistema di coordinate cartesiane).

La principale differenza fra il caso uni-dimensionale e quello multi-dimensionale è che nel secondo viene meno la nozione (fondamentale nel primo) di *ordine*: infatti, date due coppie $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ diverse, non è immediato stabilire se una delle due sia 'più piccola' dell'altra. Anzi, si dimostra che non è possibile definire su \mathbb{R}^2 un ordinamento (ved. [2]) consistente con le operazioni algebriche.

Questo ci obbliga a definire su \mathbb{R}^2 (come su \mathbb{R}^n , $n \geq 3$) una struttura geometrica indipendente dall'ordinamento. Tale struttura si basa su nozioni algebriche e topologiche, che introduciamo brevemente rimandando ai corsi di Geometria per una trattazione più estesa (ved. [8], [9], [1]).

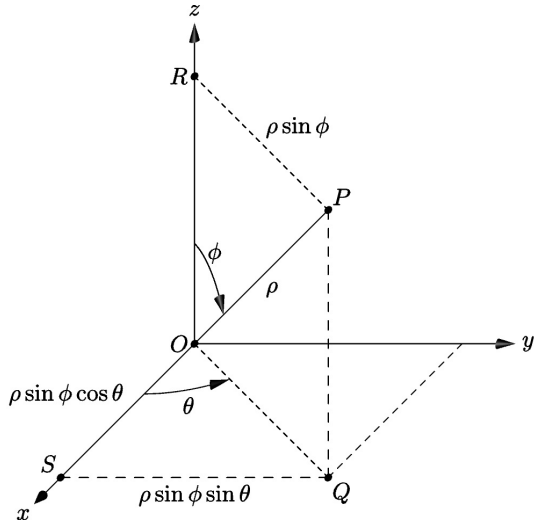


FIGURA 2.

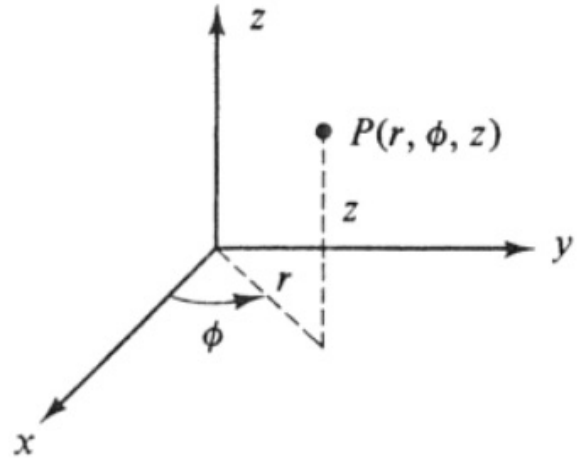


FIGURA 3.

2. ALGEBRA DEGLI SPAZI EUCLIDEI

Sull'insieme \mathbb{R}^n definiamo due operazioni, dette *somma* e *prodotto* (per uno scalare), ponendo per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Le operazioni definite sopra godono delle seguenti proprietà (conseguenza immediata delle proprietà delle operazioni di \mathbb{R}):

Lemma 2.1. Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha

- (i) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
- (ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
- (iii) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$, dove $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$;
- (iv) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, dove $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$;
- (v) $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$;
- (vi) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;
- (vii) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;
- (viii) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Le proprietà (i)-(viii) fanno di \mathbb{R}^n uno spazio vettoriale. Una base di tale spazio è formata dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1),$$

così che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esiste unica la decomposizione

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Introduciamo un'altra operazione su \mathbb{R}^n . Il *prodotto scalare* associa a una coppia di vettori (\mathbf{x}, \mathbf{y}) il numero reale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Proprietà del prodotto scalare:

Lemma 2.2. Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

- (i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
- (ii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$;
- (iii) $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$;
- (iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$.

In \mathbb{R}^2 , significato geometrico del prodotto scalare è il seguente: se \mathbf{x} , \mathbf{y} sono rappresentati da due segmenti orientati \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} e $\theta \in [0, 2\pi[$ è l'ampiezza dell'angolo formato da essi¹, si ha

$$(2.1) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |OP||OQ| \cos(\theta)$$

(dove $|AB|$ rappresenta la lunghezza del segmento congiungente due punti A e B). Legata alla nozione di prodotto scalare è quella di *norma* (o *modulo*) di un vettore, definita da

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

(ved. (iv)). Un vettore di norma 1 è detto *versore* (per esempio, \mathbf{e}_i è un versore, $i = 1, \dots, n$). Proprietà della norma:

Lemma 2.3. Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

- (i) $|\mathbf{x}| \geq 0$;
- (ii) $|\mathbf{x}| = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- (iii) $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$;
- (iv) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (prima disuguaglianza triangolare);
- (v) $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||$ (seconda disuguaglianza triangolare);
- (vi) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).

Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ si dicono *paralleli* se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, *ortogonali* (o *normali*) se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ (ved. (2.1)).

Una *varietà affine* di dimensione k in \mathbb{R}^n ($k \in \{1, \dots, n-1\}$) è un sottoinsieme definito da $n-k$ equazioni lineari, in particolare le varietà affini di dimensione 1 sono dette *rette*, quelle di dimensione 2 sono dette *piani*. Un *iperpiano* è una varietà affine di dimensione $n-1$, definita da una singola equazione del tipo

$$(2.2) \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b.$$

Un iperpiano è anche caratterizzato da una condizione geometrica: detto \mathbf{x}_0 un punto dell'iperpiano \mathcal{P} di equazione (2.2), per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ se e solo se

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0,$$

dove $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$ viene detto *vettore normale* a \mathcal{P} .

In particolare, per $n = 3$, le varietà affini sono solo rette e piani (questi ultimi sono gli iperpiani di \mathbb{R}^3). Una retta \mathcal{R} in \mathbb{R}^3 si può descrivere mediante l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(dove $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è un punto di \mathcal{R} e il vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ne individua la direzione), oppure mediante l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

¹Non importa in che senso misuriamo gli angoli, in quanto $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$.

(come intersezione di due piani). Un piano \mathcal{P} si può descrivere mediante l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y = y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z = z_0 + tv_3 + sw_3 \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

(dove $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è un punto di \mathcal{P} e i vettori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ne individuano la giacitura), oppure mediante l'equazione cartesiana

$$ax + by + cz = d$$

(dove $\mathbf{n} = (a, b, c)$ è normale a \mathcal{P}). Una funzione biunivoca da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n è detta *trasformazione*. Un'applicazione lineare di \mathbb{R}^n è una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}) + \mu\varphi(\mathbf{y}).$$

Ogni applicazione lineare è individuata da una *matrice* $A \in \mathbb{R}_n^n$ (ved. [1]) t.c. per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ (prodotto righe per colonne).}$$

Si ha pertanto (ved. [1]):

Lemma 2.4. *Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare individuata dalla matrice $A \in \mathbb{R}_n^n$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) φ è biunivoca;
- (ii) $\det(A) \neq 0$.

Ovviamente, una *trasformazione lineare* è un'applicazione lineare biunivoca.

Esempio 2.5. Sia $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dunque, per il Lemma 2.4, l'applicazione φ individuata da A è una trasformazione lineare.

Concentriamoci sul caso $n = 3$. I vettori della base canonica vengono in questo caso indicati con

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Si definisce un'ulteriore operazione detta *prodotto vettoriale*, che associa a due vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$) un terzo vettore, definito dal determinante simbolico²

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{k}.$$

Proprietà del prodotto vettoriale:

Lemma 2.6. *Per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha*

- (i) $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1$;
- (ii) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \times \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3$;
- (iii) $(\lambda\mathbf{x}_1) \times \mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$;

²'Simbolico' perché gli elementi della prima riga sono vettori.

(iv) $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Osserviamo che $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Il significato geometrico del prodotto vettoriale è il seguente: se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, non paralleli, sono rappresentati da due segmenti orientati $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$, allora $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ è un vettore ortogonale al piano passante per O, P_1 e P_2 e di modulo pari all'area del parallelogramma di lati OP_1, OP_2 , cioè

$$|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| = |\mathbf{x}_1||\mathbf{x}_2||\sin(\theta)|,$$

dove $\theta \in [0, 2\pi[$ è l'angolo formato da $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$.

Introduciamo due classi di funzioni definite in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) a valori in \mathbb{R} che saranno usate largamente in seguito (ved. [5]). Una *forma lineare* è una funzione $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (a_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}).$$

Posto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, si ha per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}.$$

Una *forma quadratica* è una funzione $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ da

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

Possiamo sempre supporre $a_{ij} = a_{ji}$ (altrimenti li sostituiamo entrambi con $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, lasciando q inalterata). Definita una matrice simmetrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_n^n$, si ha per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{x}).$$

Diremo che q è

- (a) *definita positiva* se $q(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$;
- (b) *definita negativa* se $q(\mathbf{x}) < 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$;
- (c) *semi-definita positiva* se $q(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (d) *semi-definita negativa* se $q(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (e) *indefinita* se esistono $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(\mathbf{x}_1) < 0 < q(\mathbf{x}_2)$.

Chiaramente, se q è definita positiva (negativa) è anche semi-definita positiva (negativa), mentre se q è semi-definita (positiva o negativa) può esistere $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ t.c. $q(\mathbf{x}_0) = 0$.

Esempio 2.7. Il prodotto scalare in \mathbb{R}^n è una forma quadratica indotta dalla matrice

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

ed è definita positiva per il Lemma 2.2 (iv).

Un metodo per riconoscere le forme quadratiche (semi-)definite è basato sul calcolo di alcuni determinanti. Consideriamo la forma q indotta dalla matrice $A = [a_{ij}]$. Chiameremo *sotto-matrice simmetrica* di A di ordine $k \in \{1, \dots, n\}$ ogni matrice $B \in \mathbb{R}_k^k$ formata da elementi di A , t.c. a_{ij} compare in B se e solo se vi compare a_{ji} , e *sotto-matrice principale* ogni sotto-matrice simmetrica del tipo

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Il seguente risultato fornisce delle caratterizzazioni dei casi (a) – (e) (per le dimostrazioni ved. [9]):

Teorema 2.8. Sia $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica indotta dalla matrice $A \in \mathbb{R}_n^n$. Allora:

- (i) q è definita positiva se e solo se $\det(A_k) > 0$ per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$;
- (ii) q è definita negativa se e solo se $(-1)^k \det(A_k) > 0$ per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$;
- (iii) q è semi-definita positiva se e solo se $\det(B) \geq 0$ per ogni sotto-matrice simmetrica B di A ;
- (iv) q è semi-definita negativa se e solo se $(-1)^k \det(B) \geq 0$ per ogni sotto-matrice simmetrica B di A di ordine $k \in \{1, \dots, n\}$;
- (v) q è indefinita se e solo se nessuna delle precedenti condizioni è verificata.

Data l'importanza del caso $n = 2$, particolarizziamo il Teorema 2.8 a tale caso:

Corollario 2.9. Sia $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica indotta dalla matrice $A \in \mathbb{R}_2^2$. Allora:

- (i) q è definita positiva se e solo se $a_{11} > 0$ e $\det(A) > 0$;
- (ii) q è definita negativa se e solo se $a_{11} < 0$ e $\det(A) > 0$;
- (iii) q è semi-definita positiva se e solo se $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$, e $\det(A) \geq 0$;
- (iv) q è semi-definita negativa se e solo se $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$, e $\det(A) \geq 0$;
- (v) q è indefinita se e solo se nessuna delle precedenti condizioni è verificata.

Esempio 2.10. Sia $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica indotta dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(A) = -1$, per il Corollario 2.9 (v) la forma quadratica q è indefinita. Infatti, si ha

$$q(1, 0) = 1, \quad q(0, 1) = -1.$$

Osservazione 2.11. Un metodo alternativo per determinare il carattere di una forma quadratica è basato sul segno degli *autovalori*: se $A \in \mathbb{R}_n^n$ è una matrice simmetrica, essa ammette n autovalori reali $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Allora la forma quadratica q indotta da A è

- (a) definita positiva se $\lambda_1 > 0$ (in questo caso si ha $q(\mathbf{x}) \geq \lambda_1 |\mathbf{x}|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$);
- (b) definita negativa se $\lambda_n < 0$ (in questo caso si ha $q(\mathbf{x}) \leq \lambda_n |\mathbf{x}|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$);
- (c) semi-definita positiva se $\lambda_1 \geq 0$;
- (d) semi-definita negativa se $\lambda_n \leq 0$;
- (e) indefinita se $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.

(ved. [9]).

Esercizio 2.12. Dimostrare il Lemma 2.1.

Esercizio 2.13. Dimostrare il Lemma 2.2.

Esercizio 2.14. Dimostrare il Lemma 2.3.

Esercizio 2.15. Dimostrare che per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Esercizio 2.16. Dimostrare il Lemma 2.6.

Esercizio 2.17. Dimostrare che

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Esercizio 2.18. Stabilire se le forme quadratiche indotte dalle seguenti matrici sono definite, semi-definite o indefinite:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. TOPOLOGIA DEGLI SPAZI EUCLIDEI

In questa sezione doteremo l'insieme \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) di una *topologia* consistente con quella introdotta in \mathbb{R} (ved. [2]) ma indipendente dall'ordinamento. Definiamo una *metrica* (o *distanza*) ponendo per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Alla nozione di metrica è collegata quella di *diametro* di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\text{diam}(A) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Proprietà della metrica:

Lemma 3.1. *Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Si ha*

- (i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$;
- (ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- (iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- (iv) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ si definisce l'*intorno sferico* (o *palla*) di centro \mathbf{x} e raggio r ponendo

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}.$$

Gli intorni sferici forniscono la base della topologia di \mathbb{R}^n . A partire da questa nozione si possono costruire i seguenti definizioni e risultati (le dimostrazioni sono analoghe a quelle viste in [2]).

Definizione 3.2. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Il punto \mathbf{x} è detto*

- (i) *interno ad A se esiste $r > 0$ t.c. $B_r(\mathbf{x}) \subseteq A$;*
- (ii) *esterno ad A se esiste $r > 0$ t.c. $B_r(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$;*
- (iii) *di frontiera per A se per ogni $r > 0$ esistono $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in B_r(\mathbf{x})$ t.c. $\mathbf{y} \in A$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus A$;*
- (iv) *di accumulazione per A se per ogni $r > 0$ esiste $\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$ t.c. $\mathbf{y} \in A$;*
- (v) *isolato per A se esiste $r > 0$ t.c. $A \cap B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$.*

L'insieme dei punti interni ad A è detto *interno* di A e denotato $\text{int}(A)$, l'insieme dei punti di frontiera è detto *frontiera* di A e denotato ∂A , la *chiusura* di A è l'insieme $\text{cl}(A) = A \cup \partial A$, e l'insieme dei punti di accumulazione di A è detto *derivato* di A e denotato $D(A)$. Osserviamo inoltre che

$$\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A), \quad \text{cl}(A) = A \cup D(A).$$

Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ definiamo la palla chiusa e la sfera di centro \mathbf{x} e raggio r , rispettivamente, come

$$\overline{B}_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\},$$

$$\partial B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r\}.$$

Esempio 3.3. Sia

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < |\mathbf{x}| \leq 1\}.$$

Chiaramente si ha

$$\text{int}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < |\mathbf{x}| < 1\}, \quad \partial A = \partial B_1(\mathbf{0}) \cup \{\mathbf{0}\}, \quad \text{cl}(A) = \overline{B}_1(\mathbf{0}).$$

Definizione 3.4. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto

- (i) aperto se $A = \text{int}(A)$;
- (ii) chiuso se $A = \text{cl}(A)$.

Gli insiemi \emptyset, \mathbb{R}^n sono *gli unici* insiemi sia aperti che chiusi. Alcune proprietà degli insiemi aperti:

Lemma 3.5. Si ha:

- (i) A è aperto se e solo se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso;
- (ii) se \mathcal{A} è una famiglia di insiemi aperti, allora $\cup \mathcal{A}$ è aperto;
- (iii) se A_1, \dots, A_k ($k \in \mathbb{N}_0$) sono aperti, allora $\bigcap_{i=1}^k A_i$ è aperto.

Proprietà degli insiemi chiusi:

Lemma 3.6. Si ha:

- (i) A è chiuso se e solo se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto;
- (ii) se \mathcal{A} è una famiglia di insiemi chiusi, allora $\cap \mathcal{A}$ è chiuso;
- (iii) se A_1, \dots, A_k ($k \in \mathbb{N}_0$) sono chiusi, allora $\bigcup_{i=1}^k A_i$ è chiuso.

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è detto *limitato* se esiste $R > 0$ t.c. $A \subseteq B_R(\mathbf{0})$. Inoltre, A si dice *compatto* se è chiuso e limitato. Vale in proposito un importante risultato:

Teorema 3.7. (Bolzano-Weierstraß) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e infinito. Allora esiste $\mathbf{x} \in D(A) \cap A$.

Introduciamo ora alcune nozioni che hanno senso solo in dimensione $n \geq 2$.

Definizione 3.8. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *connesso* se non esistono $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti t.c.

$$A \subseteq B_1 \cup B_2, \quad A \cap B_1 \neq \emptyset, \quad A \cap B_2 \neq \emptyset, \quad A \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Una nozione legata a quella appena introdotta è quella di insieme *connesso per archi*, ovvero un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con la seguente proprietà: per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ esiste una funzione continua $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{y}, \quad \mathbf{r}(t) \in A \text{ per ogni } t \in [0, 1]$$

(per la definizione di funzione continua a valori in \mathbb{R}^n ved. Sezione 8). Si dimostra che ogni insieme connesso per archi è connesso. Tuttavia, l'implicazione non si inverte in generale: tutto quello che possiamo dire è che ogni insieme *aperto* e connesso è connesso per archi.

Esempio 3.9. Sia

$$A = \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}.$$

Si dimostra che A è connesso ma non connesso per archi (ovviamente A non è aperto).

Definizione 3.10. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *convesso* se per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $t \in [0, 1]$ si ha

$$(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in A.$$

Ovviamente, ogni insieme convesso è connesso (per archi). L'implicazione non si inverte:

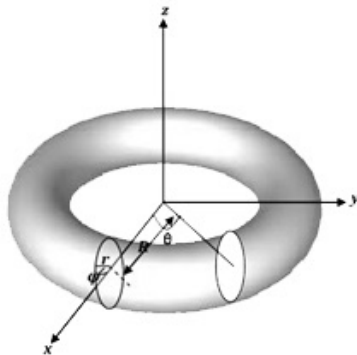


FIGURA 4.

Esempio 3.11. L'anello

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

è un insieme connesso ma non convesso.

Osservazione 3.12. In \mathbb{R} le Definizioni 3.8, 3.10 sono equivalenti e soddisfatte solo dagli *intervalli*.

Infine introduciamo una nozione topologica che sarà largamente utilizzata in seguito (ved. [7]):

Definizione 3.13. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *semplicemente connesso* se verifica le seguenti condizioni:

- (i) A è connesso;
- (ii) per ogni curva continua chiusa γ , di parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow A$, esistono una funzione continua $\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ e $\mathbf{x}_0 \in A$ t.c. $\varphi(t, 0) = \mathbf{r}(t)$, $\varphi(t, 1) = \mathbf{x}_0$, $\varphi(t, \mu) \in A$ per ogni $(t, \mu) \in [a, b] \times [0, 1]$.

Intuitivamente, la condizione (ii) si può esprimere dicendo che ogni circuito contenuto in A si può deformare con continuità a un singolo punto rimanendo in A (per l'interpretazione rigorosa di questa condizione ved. [6]). In particolare, nel caso $n = 2$ un insieme semplicemente connesso è un insieme connesso privo di 'buchi'. Mettiamo in evidenza i seguenti casi particolari:

- (a) sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso, allora A è semplicemente connesso;
- (b) sia A un insieme *stellato*, ovvero esista $\mathbf{x}_0 \in A$ t.c. per ogni $\mathbf{y} \in A$ e ogni $\mu \in [0, 1]$ si ha $(1 - \mu)\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{y} \in A$, allora A è semplicemente connesso.

Esempio 3.14. In \mathbb{R}^2 l'insieme

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

è connesso ma non semplicemente connesso. In \mathbb{R}^3 l'insieme

$$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

è semplicemente connesso (si noti come la definizione dipenda dalla dimensione dello spazio), mentre il dominio toroidale

$$A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4 \cos(\theta)x - 4 \sin(\theta)y + 3 \leq 0, \theta \in [0, 2\pi[\}$$

non è semplicemente connesso (fig. 4).

Infine accenniamo al delicato concetto di *topologia relativa*. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme e $B \subseteq A$: B è detto aperto (chiuso) in A se esiste $C \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto (chiuso) t.c. $B = A \cap C$. Per esempio, posto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \in A : y > x\},$$

l'insieme B è aperto in A (mentre non è aperto in \mathbb{R}^n).

Esercizio 3.15. Dimostrare il Lemma 3.1.

Esercizio 3.16. Dimostrare il Lemma 3.5.

Esercizio 3.17. Dimostrare il Lemma 3.6.

Esercizio 3.18. Dire se i seguenti insiemi in \mathbb{R}^2 sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi o convessi:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}, \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \in \mathbb{Z}\}.$$

Esercizio 3.19. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che ∂A è chiuso e che $\partial(\mathbb{R}^n \setminus A) = \partial A$.

Esercizio 3.20. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che $\text{int}(A)$ è il più grande insieme aperto contenuto in A e $\text{cl}(A)$ è il più piccolo insieme chiuso contenente A .

4. FUNZIONI REALI DEFINITE IN \mathbb{R}^n

Lo studio delle funzioni di più variabili reali è considerevolmente più complesso di quello delle funzioni di una variabile sviluppato in [3], poiché viene meno l'ordinamento e con esso la nozione intuitiva di funzione monotona, inoltre in generale non si riesce a disegnare il grafico di una funzione: si rende necessario separare, seguendo l'insegnamento di Eulero, il concetto di *funzione* dalla sua rappresentazione geometrica e condurre il ragionamento a un grado più elevato di astrazione.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (*funzione reale di più variabili reali*). Come sempre, A è detto *dominio* di f e l'*immagine* di f è l'insieme

$$f(A) = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\},$$

mentre il *grafico* è

$$\text{gr}(f) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in A, x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Se $n = 1$ l'insieme $\text{gr}(f)$ è una curva in \mathbb{R}^2 (ved. [6]), se $n = 2$ è una superficie in \mathbb{R}^3 (ved. [6]), se $n \geq 3$ invece $\text{gr}(f)$ non si può rappresentare graficamente. Si ricorre allora agli *insiemi di livello*, definiti per ogni $l \in \mathbb{R}$ da

$$f^{-1}(l) = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = l\}$$

(per un'esposizione dettagliata di questi concetti geometrici ved. [8]). Per ogni $B \subseteq \mathbb{R}$ ricordiamo che

$$f^{-1}(B) = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \in B\}.$$

In particolare, per ogni $c \in \mathbb{R}$ poniamo

$$f^c = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) < c\}, \quad f_c = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) > c\},$$

$$\bar{f}^c = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \leq c\}, \quad \bar{f}_c = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \geq c\}.$$

Quando non è necessario specificare il dominio, denoteremo le funzioni anche con scritture come $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$.

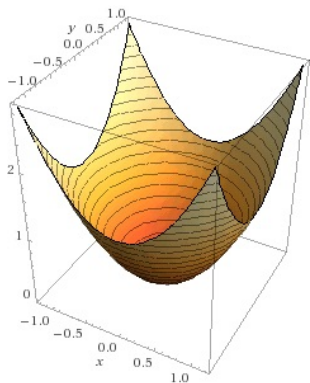


FIGURA 5.

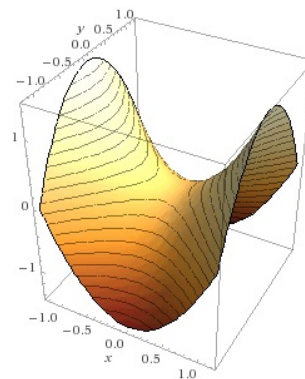


FIGURA 6.

Esempio 4.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Il grafico di f è un paraboloide ellittico, e per ogni $l > 0$ la linea di livello $f^{-1}(l)$ è la circonferenza giacente sul piano $z = 0$, di centro $(0, 0, 0)$ e raggio \sqrt{l} (proiezioni delle linee tracciate nella fig. 5). Se invece poniamo

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

otteniamo un paraboloide iperbolico e le linee di livello sono iperboli (fig. 6). Invece le superfici di livello della funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$$

sono ellissoidi.

Talvolta il dominio di una funzione f non è assegnato: in questo caso, sceglieremo come dominio l'*insieme di definizione*, ovvero il più grande sottoinsieme di \mathbb{R}^n in cui la funzione risulta definita.

Esempio 4.2. La funzione individuata dalla legge

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y)$$

ha come insieme di definizione

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}.$$

Un numero $l \in \mathbb{R}$ è detto *maggiorante* di f se è un maggiorante dell'insieme $f(A)$, ovvero se $f(\mathbf{x}) \leq l$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Se f ammette un maggiorante è detta *superiormente limitata*. In tal caso l'*estremo superiore* di f è definito come il minimo dei suoi maggioranti³, o equivalentemente come l'unico numero $l \in \mathbb{R}$ t.c.

(a) $f(\mathbf{x}) \leq l$ per ogni $\mathbf{x} \in A$;

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\mathbf{x} \in A$ t.c. $f(\mathbf{x}) > l - \varepsilon$.

L'estremo superiore di f si denota $\sup_A f$. Se esiste $\mathbf{x}_0 \in A$ t.c. $f(\mathbf{x}_0) = \sup_A f$, diremo che f ammette *massimo globale* (o *assoluto*) e \mathbf{x}_0 è un punto di massimo globale, e scriveremo

$$\max_A f = f(\mathbf{x}_0).$$

Se f non è superiormente limitata scriveremo

$$\sup_A f = +\infty.$$

³Tale minimo esiste per la proprietà di separazione di \mathbb{R} (assioma di Dedekind).

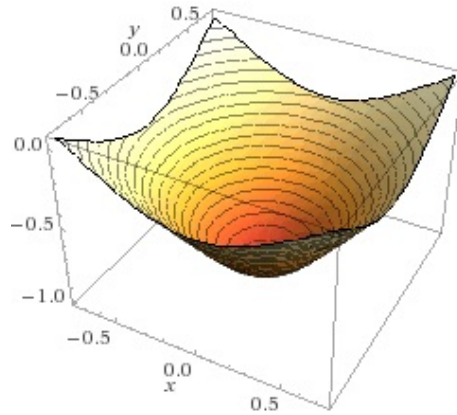


FIGURA 7.

Se invece esiste $r > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_r(\mathbf{x}_0)$, diremo che \mathbf{x}_0 è un punto di *massimo locale* (o *relativo*). Ovviamente, ogni punto di massimo globale è anche di massimo locale. Le definizioni di minorante, estremo inferiore e minimo globale e locale sono analoghe. Se f ammette sia maggioranti che minoranti, è detta *limitata*.

Esempio 4.3. Sia $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^4 + y^4.$$

La funzione f ha un minimo globale in $(0, 0)$ e massimi globali nei vertici $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \mp 1)$.

Esempio 4.4. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

è limitata. Infatti, posto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, possiamo studiare f tramite la funzione ausiliaria $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(\rho) = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}.$$

Con gli strumenti introdotti in [3], [4] si vede che

$$\min_{\rho \in [0, +\infty[} g(\rho) = g(0) = -1, \quad \sup_{\rho \in [0, +\infty[} g(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g(\rho) = 1,$$

da cui

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = -1, \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f = 1$$

$((0, 0)$ è l'unico punto di minimo globale, mentre f non ammette massimo globale, fig. 7).

La funzione f descritta nell'Esempio 4.4 presenta una *simmetria radiale* (o *centrale*), ovvero essa assume lo stesso valore in punti aventi lo stesso modulo (nel senso delle coordinate polari, ved. Sezione 1). Altri tipi di simmetria possono presentarsi:

Esempio 4.5. La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2}$$

presenta una *simmetria cilindrica* (o *assiale*). Infatti, dati due punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ t.c. $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$, si ha $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$.

Un'ulteriore definizione geometrica:

Definizione 4.6. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f è detta

(i) convessa se per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $\tau \in [0, 1]$ si ha

$$f((1 - \tau)\mathbf{x} + \tau\mathbf{y}) \leq (1 - \tau)f(\mathbf{x}) + \tau f(\mathbf{y});$$

(ii) concava se $-f$ è convessa.

Definito l'epigrafico di f come l'insieme

$$\text{epi}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in A \times \mathbb{R} : x_{n+1} \geq f(x_1, \dots, x_n)\},$$

la condizione (i) è equivalente alla convessità di $\text{epi}(f)$ in \mathbb{R}^{n+1} . La prima funzione descritta nell'Esempio 4.1 è convessa, mentre la seconda non lo è.

Esercizio 4.7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = xy$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determinare le sue linee di livello.

Esercizio 4.8. Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni:

$$\frac{\sqrt{x^2 - y}}{\ln(x + y)}, \arcsin(y + 2x), \ln(9 - x^2 - y^2 - z^2).$$

Esercizio 4.9. Determinare gli estremi globali della funzione dell'Esempio 4.5.

5. SUCCESIONI IN \mathbb{R}^n

Premettiamo allo studio dei limiti di funzioni di più variabili reali una breve descrizione delle successioni a termini vettoriali.

Una *successione a termini* in \mathbb{R}^n è una funzione definita in \mathbb{N} (o in \mathbb{N}_0) a valori in \mathbb{R}^n . Per ogni $k \in \mathbb{N}$ denotiamo $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ il valore corrispondente della funzione, detto *termine* della successione. La successione stessa è denotata (\mathbf{a}_k) . La nozione di *limite*, definita in [3] per le successioni a termini reali, viene estesa alle successioni a termini in \mathbb{R}^n insieme ad alcune proprietà.

Definizione 5.1. Una successione (\mathbf{a}_k) è detta *convergente a* $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $k \geq \nu$ si ha $|\mathbf{a}_k - \mathbf{l}| < \varepsilon$, e in tal caso si scrive

$$\lim_k \mathbf{a}_k = \mathbf{l}.$$

Una notazione equivalente è $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$. Il seguente risultato permette di ricondurre ogni problema sulle successioni in \mathbb{R}^n a uno sulle successioni in \mathbb{R} :

Lemma 5.2. Siano (\mathbf{a}_k) una successione in \mathbb{R}^n e $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $\lim_k \mathbf{a}_k = \mathbf{l}$;
- (ii) $\lim_k a_{k,i} = l_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ ⁴.

Dimostrazione. Dimostriamo che (i) implica (ii). Fissati $\varepsilon > 0$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $k \geq \nu$

$$|a_{k,i} - l_i| \leq |\mathbf{a}_k - \mathbf{l}| < \varepsilon,$$

da cui $a_{k,i} \rightarrow l_i$.

Dimostriamo che (ii) implica (i). Per ogni $\varepsilon > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ esiste $\nu_i \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $k \geq \nu_i$ si ha $|a_{k,i} - l_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Posto $\nu = \max\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, per ogni $k \geq \nu$ si ha

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{l}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{k,i} - l_i)^2} < \varepsilon,$$

⁴Qui $a_{k,i}$ denota la i -ma componente di \mathbf{a}_k .

da cui $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$. □

Mediante il Lemma 5.2 possiamo dedurre i seguenti risultati da quelli corrispondenti per le successioni a termini reali (ved. [3]):

Teorema 5.3. (Unicità del limite) *Siano (\mathbf{a}_k) una successione in \mathbb{R}^n e $\mathbf{l}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$, $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{m}$. Allora $\mathbf{l} = \mathbf{m}$.*

Come nel caso delle successioni reali, diremo che (\mathbf{a}_k) è *limitata* se esiste $R > 0$ t.c. $|\mathbf{a}_k| < R$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ogni successione convergente è limitata, mentre l'implicazione inversa è falsa. Tuttavia ogni successione limitata ammette una sotto-successione convergente:

Teorema 5.4. (Bolzano-Weierstraß) *Sia (\mathbf{a}_k) una successione limitata. Allora esistono una successione crescente (k_h) in \mathbb{N} e $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ t.c.*

$$\lim_h \mathbf{a}_{k_h} = \mathbf{l}.$$

In effetti questa proprietà è equivalente alla compattezza:

Corollario 5.5. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) A è compatto;
- (ii) per ogni successione (\mathbf{a}_k) in A esistono una successione crescente (k_h) in \mathbb{N} e $\mathbf{l} \in A$ t.c. $\mathbf{a}_{k_h} \rightarrow \mathbf{l}$ per $h \rightarrow \infty$.

Una conseguenza del Teorema 5.4 è il seguente criterio di convergenza:

Teorema 5.6. (Cauchy) *Sia (\mathbf{a}_k) una successione in \mathbb{R}^n . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) (\mathbf{a}_k) è convergente;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_h| < \varepsilon$ per ogni $k, h \in \mathbb{N}$, $k, h \geq \nu$.

Una caratterizzazione degli insiemi chiusi mediante successioni:

Lemma 5.7. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) A è chiuso;
- (ii) per ogni successione (\mathbf{a}_k) a termini in A t.c. $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$, si ha $\mathbf{l} \in A$.

Operazioni sui limiti:

Lemma 5.8. *Si ha:*

- (i) se $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$, $\mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{m}$ allora $\mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{l} + \mathbf{m}$;
- (ii) se $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$, $\lambda_k \rightarrow \lambda$ allora $\lambda_k \mathbf{a}_k \rightarrow \lambda \mathbf{l}$;
- (iii) se $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$, $\mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{m}$ allora $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}$;
- (iv) se $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l}$, $\mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{m}$ allora $\mathbf{a}_k \times \mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{l} \times \mathbf{m}$ (in \mathbb{R}^3).

Osservazione 5.9. In \mathbb{R}^n non ha senso definire le successioni monotone. Similmente, non si definiscono le successioni positivamente o negativamente divergenti, mentre diremo che (\mathbf{a}_k) *diverge* se $|\mathbf{a}_k| \rightarrow +\infty$. Per esempio, la successione di termine generale $\mathbf{a}_k = (k, -k)$ diverge in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 5.10. Dimostrare il Teorema 5.3.

Esercizio 5.11. Dimostrare il Teorema 5.4.

Esercizio 5.12. Dimostrare il Lemma 5.8.

Esercizio 5.13. Calcolare i limiti delle seguenti successioni in \mathbb{R}^2 :

$$(\arctan(k), -\arctan(k)), \left(\frac{k+1}{k}, \frac{k-1}{k} \right), (e^k, e^{-k}), \left(\frac{\cos(k)}{k}, \frac{\sin(k)}{k} \right).$$

6. LIMITI DI FUNZIONI IN \mathbb{R}^n

Introduciamo adesso la nozione di *limite* per funzioni reali di più variabili reali: questa presenta, rispetto al caso unidimensionale studiato in [3], un maggior grado di complessità in quanto un punto di \mathbb{R}^n può essere approssimato lungo infinite direzioni (e non solo 'da destra' e 'da sinistra').

Definizione 6.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;
- (ii) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty$ se per ogni $K > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) > K$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;
- (iii) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = -\infty$ se per ogni $K > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) < -K$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;
- (iv) non esiste $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ se nessuna delle precedenti condizioni è verificata.

Nel caso (i) diremo che f è *convergente* in \mathbf{x}_0 , nei casi (ii), (iii) che è *divergente*, nel caso (iv) che è *irregolare*. Una notazione alternativa è $f(\mathbf{x}) \rightarrow l$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Verifichiamo che la Definizione 6.1 è ben posta:

Teorema 6.2. (Unicità del limite) Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l, m \in [-\infty, +\infty]$ t.c.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l, \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = m.$$

Allora $l = m$.

Dimostrazione. Supponiamo $l, m \in \mathbb{R}$ e procediamo per assurdo, assumendo $l < m$ (gli altri casi si trattano analogamente). Posto $\varepsilon = \frac{m-l}{2}$, esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in A$, $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_1$ e $|f(\mathbf{x}) - m| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in A$, $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_2$. Sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Per ogni $\mathbf{x} \in A$, $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ si ha

$$f(\mathbf{x}) < m + \varepsilon = l - \varepsilon < f(\mathbf{x}),$$

una contraddizione. □

I seguenti esempi illustrano i vari casi della Definizione 6.1:

Esempio 6.3. Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, è sufficiente porre $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$. Per ogni $(x, y) \in B_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ si ha $0 < x^2 + y^2 < 2\varepsilon$, da cui

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} < \varepsilon,$$

così che (i) è verificata (fig. 8).

Esempio 6.4. Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(x^2 + y^2) = -\infty.$$

Fissato $K > 0$, è sufficiente porre $\delta = e^{-\frac{K}{2}}$. Per ogni $(x, y) \in B_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ si ha $0 < x^2 + y^2 < e^{-K}$, da cui

$$\ln(x^2 + y^2) < -K,$$

così che (iii) è verificata (fig. 9).

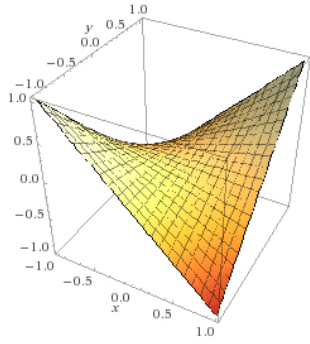


FIGURA 8.

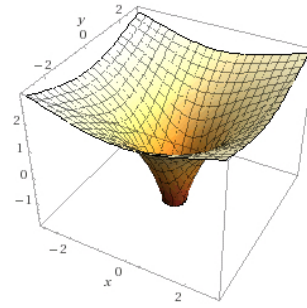


FIGURA 9.

Esempio 6.5. Verifichiamo che non esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}.$$

La funzione $f(x, y) = \frac{x}{y}$ è definita nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\},$$

e $(0, 0) \in D(A)$. Fissato $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, possiamo studiare la restrizione di f alla retta di equazione $y = mx$, equivalente a una funzione di una variabile reale:

$$f(x, mx) = \frac{1}{m}.$$

Dunque il limite in esame non esiste. Infatti, per ogni $\delta > 0$ basta scegliere $x \in]0, \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}[$ in modo che $(x, mx) \in A$, $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ e $f(x, mx) = \frac{1}{m}$. Al variare di $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si vede che f assume in un intorno di $(0, 0)$ tutti i valori reali. Dunque si ricade nel caso (iv).

I limiti in \mathbb{R}^n si possono caratterizzare mediante le successioni:

Teorema 6.6. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l \in [-\infty, +\infty]$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$;
- (ii) $\lim_k f(\mathbf{a}_k) = l$ per ogni successione (\mathbf{a}_k) a termini in $A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ t.c. $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Dimostrazione. Per cominciare osserviamo che da $\mathbf{x}_0 \in D(A)$ segue l'esistenza di almeno una successione come quelle descritte in (ii). Possiamo supporre $l \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo che (i) implica (ii). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in A$, $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$. D'altra parte, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < |\mathbf{a}_k - \mathbf{x}_0| < \delta$ per ogni $k \geq \nu$, da cui $|f(\mathbf{a}_k) - l| < \varepsilon$ per ogni $k \geq \nu$.

Dimostriamo che (ii) implica (i), procedendo per assurdo. Se $f(\mathbf{x})$ non converge a l per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo trovare $\mathbf{a}_k \in A$ t.c. $0 < |\mathbf{a}_k - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{k}$ e $|f(\mathbf{a}_k) - l| \geq \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ indipendente da k . Dunque $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ e $f(\mathbf{a}_k)$ non converge a l , contro (ii). \square

Come si vede dagli Esempi 6.3 - 6.5, non è immediato determinare un limite facendo uso della sola Definizione 6.1. Introduciamo dunque alcuni risultati, utili a questo scopo (A denota sempre un sottoinsieme di \mathbb{R}^n):

Teorema 6.7. (Cauchy) Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) f è convergente in \mathbf{x}_0 ;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione che (i) implica (ii) è banale.

Dimostriamo che (ii) implica (i). Sia (\mathbf{a}_k) una successione a termini in $A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ t.c. $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ come in (ii). Esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < |\mathbf{a}_k - \mathbf{x}_0| < \delta$ per ogni $k \geq \nu$, dunque si ha

$$|f(\mathbf{a}_k) - f(\mathbf{a}_h)| < \varepsilon$$

per ogni $h, k \geq \nu$. Per il Criterio di Cauchy sulle successioni numeriche (ved. [3]) si ha $f(\mathbf{a}_k) \rightarrow l$ per qualche $l \in \mathbb{R}$. Dimostriamo ora che l è indipendente dalla scelta di (\mathbf{a}_k) : siano (\mathbf{a}_k) , (\mathbf{b}_k) successioni in $A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ convergenti a \mathbf{x}_0 . Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ come in (ii), allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ per ogni $k \geq \nu$, da cui

$$|f(\mathbf{a}_k) - f(\mathbf{b}_k)| < \varepsilon.$$

Questo implica che $(f(\mathbf{a}_k))$, $(f(\mathbf{b}_k))$ hanno lo stesso limite $l \in \mathbb{R}$. Per il Lemma 6.6 ne segue $f(\mathbf{x}) \rightarrow l$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. \square

Le dimostrazioni dei seguenti risultati sono facilmente ricavate da quelle dei corrispondenti risultati sui limiti in \mathbb{R} o sui limiti di successioni (ved. [3]):

Teorema 6.8. (Conservazione del segno) *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l, m \in [-\infty, +\infty]$ t.c.*

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = m$;
- (ii) $l < m$.

Allora esiste $\delta > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Teorema 6.9. (Confronto) *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l, m \in [-\infty, +\infty]$ t.c.*

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = m$;
- (ii) esiste $\delta > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Allora $l \leq m$.

Corollario 6.10. (Carabinieri) *Siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l \in [-\infty, +\infty]$ t.c.*

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = l$;
- (ii) esiste $\delta > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = l.$$

Operazioni sui limiti:

Lemma 6.11. *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l, m \in \mathbb{R}$ t.c.*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l, \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = m.$$

Allora si ha:

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = l + m$;
- (ii) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = lm$;
- (iii) se $m \neq 0$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{l}{m}$;
- (iv) se $l > 0$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})^{g(\mathbf{x})} = l^m$;
- (v) se $l, m > 0$, $l \neq 1$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \log_{f(\mathbf{x})}(g(\mathbf{x})) = \log_l(m)$.

Limite di funzioni composte:

Lemma 6.12. *Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $l \in [-\infty, +\infty]$ t.c.*

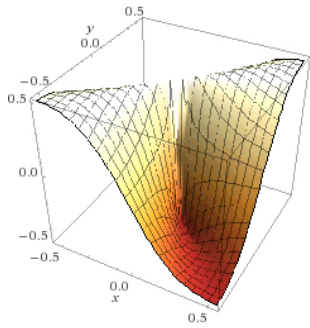


FIGURA 10.

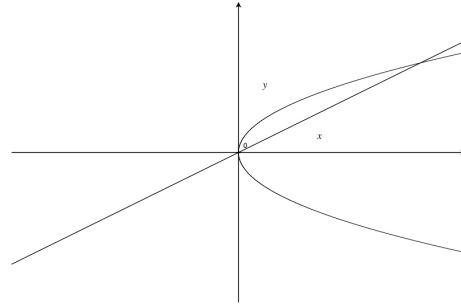


FIGURA 11.

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = y_0$;
- (ii) esiste $\delta > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) \neq y_0$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;
- (iii) $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$.

Allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (g \circ f)(\mathbf{x}) = l.$$

Una condizione necessaria per l'esistenza del limite di una funzione f in un punto \mathbf{x}_0 è che la restrizione di f a qualunque retta passante per \mathbf{x}_0 abbia lo stesso limite in \mathbf{x}_0 :

Lemma 6.13. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l \in [-\infty, +\infty]$ t.c.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l,$$

e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{v}) = l.$$

Dimostrazione. Fissata una successione (μ_k) di numeri reali t.c. $\mu_k \rightarrow 0$, poniamo $\mathbf{a}_k = \mathbf{x}_0 + \mu_k \mathbf{v}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, così che $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$. Per il Teorema 6.6 si ha $f(\mathbf{a}_k) \rightarrow l$. \square

La condizione espressa dal Lemma 6.13 permette di ricondurre lo studio di un limite in \mathbb{R}^n a quello di un limite in \mathbb{R} :

Esempio 6.14. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Essa non ammette limite in $(0, 0)$: infatti, considerando le sue restrizioni alle rette di equazione $y = mx$ ($m \in \mathbb{R}$), si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m}{1 + m^2},$$

e questo valore varia al variare di m (fig. 10).

Essa non è però sufficiente, in quanto \mathbf{x}_0 può essere approssimato anche lungo curve diverse dalle rette:

Esempio 6.15. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x + y^2}.$$

Restringendo f alla retta di equazione $y = mx$ ($m \in \mathbb{R}$) si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + m^2 x} = 1.$$

Tuttavia, se restringiamo f alla parabola di equazione $x = y^2$, otteniamo

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y^2)}{2y^2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto f non ammette limite in $(0, 0)$ (fig. 11).

Un altro espediente geometrico per ricondurre lo studio di un limite in \mathbb{R}^n a quello di un limite in \mathbb{R} consiste nell'uso delle funzioni a *simmetria radiale*:

Lemma 6.16. Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- (i) $f(\mathbf{x}) = g(|\mathbf{x}|)$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = l$ ($l \in [-\infty, +\infty]$).

Allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = l.$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 6.12. □

Esempio 6.17. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (e^{x^2+y^2} - 1) \cos(x + 1).$$

Poiché $|\cos(x + 1)| \leq 1$, si ha per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x, y)| \leq e^{x^2+y^2} - 1.$$

Per il Lemma 6.16 si vede che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (e^{x^2+y^2} - 1) = 0,$$

da cui per il Corollario 6.10 segue

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Più in generale, talvolta è conveniente passare alle coordinate polari (ved. Sezione 1), usando le formule di trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta). \end{cases}$$

Esempio 6.18. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Passando alle coordinate polari abbiamo

$$f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \frac{\rho \cos(\theta)^2 \sin(\theta)}{\rho^2 \cos(\theta)^4 + \sin(\theta)^2},$$

che tende a 0 per $\rho \rightarrow 0^+$, qualunque sia $\theta \in [0, 2\pi[$. Tuttavia, restringendo f alla parabola di equazione $y = x^2$, si ha

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

In conclusione, non esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

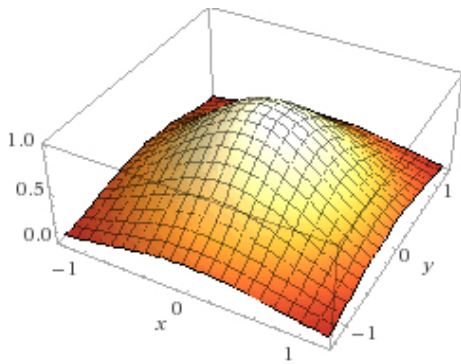


FIGURA 12.

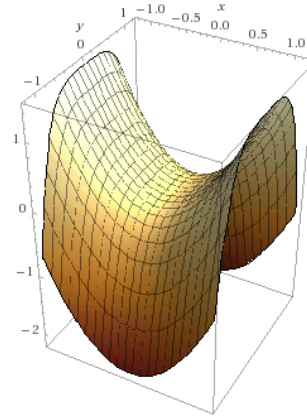


FIGURA 13.

Si estende al caso multi-dimensionale anche il concetto di *limite all'infinito*:

Definizione 6.19. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme illimitato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

- (i) $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus B_R(\mathbf{0})$;
- (ii) $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$ se per ogni $K > 0$ esiste $R > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) > K$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus B_R(\mathbf{0})$;
- (iii) $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = -\infty$ se per ogni $K > 0$ esiste $R > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) < -K$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus B_R(\mathbf{0})$.

Osserviamo che nella Definizione 6.19 il limite è *uniforme* rispetto alla direzione. Chiaramente valgono versioni dei Teoremi 6.2 - 6.12 per i limiti all'infinito (con ovvi adattamenti).

Esempio 6.20. La *funzione di Gauss* in dimensione 2, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, è definita da

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

(fig. 12). Si vede facilmente che

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0.$$

Esempio 6.21. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 - y^4$$

(fig. 13). Operiamo mediante restrizioni a opportune rette:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, 0) = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(0, y) = -\infty,$$

dunque non esiste

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y).$$

Osservazione 6.22. Come nel caso uni-dimensionale, si introducono i *simboli di Landau* per la classificazione di infiniti e infinitesimi. Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$ t.c.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0,$$

allora si denota

- $f(\mathbf{x}) = o(g(\mathbf{x}))$ se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = 0$;

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{O}(g(\mathbf{x}))$ se esistono $M, \delta > 0$ t.c. $\left| \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right| \leq M$ per ogni $\mathbf{x} \in A$, $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$.

Analoghe notazioni si adottano per le funzioni divergenti in un punto o per i limiti all'infinito.

Infine introduciamo la nozione di *limite massimo* di una funzione in un punto:

Definizione 6.23. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$:

- (i) se esiste $\delta > 0$ t.c. f è superiormente limitata in $A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, si pone

$$\limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \inf_{\delta > 0} \sup_{\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}} f(\mathbf{x});$$

- (ii) se f è superiormente illimitata in $A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ per ogni $\delta > 0$, si pone

$$\limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty.$$

Il limite massimo si caratterizza come segue:

Lemma 6.24. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $l \in \mathbb{R}$. Allora

$$\limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$$

se e solo se

- (i) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) < l + \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;
- (ii) per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ esiste $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ t.c. $f(\mathbf{x}) > l - \varepsilon$.

Definizione e caratterizzazione del *limite minimo* sono analoghe.

Esercizio 6.25. Dimostrare i Teoremi e Lemmi 6.8 - 6.12.

Esercizio 6.26. Dimostrare il Lemma 6.24.

Esercizio 6.27. Stabilire se esistono, ed eventualmente calcolare, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} & \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{x_1}{|\mathbf{x}|}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}, \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{x^2}{|y|}}}{\sqrt{|y|}}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{\tan(x^2 + y^2)}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2-y^2} - 1}{\arctan(x^2 + y^2)}, \quad \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

7. CONTINUITÀ IN \mathbb{R}^n

Introduciamo la nozione di *continuità* per le funzioni reali di più variabili reali:

Definizione 7.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A \cap D(A)$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f è detta *continua* in \mathbf{x}_0 se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

La funzione è detta *continua* in A se f è continua in ogni punto di $A \cap D(A)$.

Equivalentemente, f è continua in \mathbf{x}_0 se

$$(7.1) \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ t.c. } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon \text{ per ogni } \mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0).$$

L'insieme delle funzioni continue in A si denota $C^0(A)$ ed è uno spazio vettoriale con le operazioni definite punto per punto (esso ha dimensione infinita).

Esempio 7.2. La funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|\mathbf{x}|}} & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

è continua in $\mathbf{0}$.

La continuità si può caratterizzare mediante le successioni:

Lemma 7.3. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A \cap D(A)$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) f è continua in \mathbf{x}_0 ;
- (ii) $\lim_k f(\mathbf{a}_k) = f(\mathbf{x}_0)$ per ogni successione (\mathbf{a}_k) a termini in A t.c. $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Dimostrazione. Segue dalla Definizione 7.1 e dal Teorema 6.6. □

Un'altra caratterizzazione è basata sulla topologia:

Lemma 7.4. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) f è continua;
- (ii) per ogni $B \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f^{-1}(B)$ è aperto in A ;
- (iii) per ogni $B \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, $f^{-1}(B)$ è chiuso in A .

Dimostrazione. Dimostriamo che (i) implica (ii). Sia $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(B)$, allora $f(\mathbf{x}_0) \in B$ e poiché B è aperto esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $]f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon, f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon[\subset B$. Poiché f è continua in \mathbf{x}_0 esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$ si ha $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$, da cui $f(\mathbf{x}) \in B$. Pertanto $A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq f^{-1}(B)$. Per la definizione di topologia relativa $f^{-1}(B)$ è aperto in A .

Dimostriamo che (ii) implica (iii). Se B è chiuso, $\mathbb{R} \setminus B$ è aperto, dunque $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B)$ è aperto in A e $f^{-1}(B)$ è chiuso in A .

Dimostriamo che (iii) implica (i), procedendo per assurdo. Sia $\mathbf{x}_0 \in A$ t.c. f non è continua in \mathbf{x}_0 . Per il Lemma 7.3 possiamo trovare una successione (\mathbf{a}_k) in A e $\varepsilon > 0$ t.c. $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$, ma $f(\mathbf{a}_k) > f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (o altri casi analoghi). L'insieme $B = f^{-1}([f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon, +\infty[)$ è chiuso, quindi per il Lemma 5.7 si ha $\mathbf{x}_0 \in B$, una contraddizione. □

In particolare, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, gli insiemi f^c , f_c sono aperti e gli insiemi $\overline{f^c}$, $\overline{f_c}$, $f^{-1}(c)$ sono chiusi per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione 7.5. Le immagini di insiemi aperti (chiusi) mediante funzioni continue *non* sono aperte (chiusi). Per esempio, se $f(x, y) = x^2$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

si vede che A è aperto mentre $f(A) = [0, 1[$ non lo è.

Le funzioni elementari (polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e iperboliche e le loro inverse) sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. Inoltre, a partire da funzioni continue si costruiscono altre funzioni continue:

Lemma 7.6. Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $\mathbf{x}_0 \in A \cap D(A)$. Allora:

- (i) $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ è continua in \mathbf{x}_0 ;
- (ii) $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ è continua in \mathbf{x}_0 ;
- (iii) se $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, $\mathbf{x} \mapsto \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ è continua in \mathbf{x}_0 ;
- (iv) se $f(\mathbf{x}_0) > 0$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})^{g(\mathbf{x})}$ è continua in \mathbf{x}_0 ;
- (v) se $f(\mathbf{x}_0), g(\mathbf{x}_0) > 0$ e $f(\mathbf{x}_0) \neq 1$, $\mathbf{x} \mapsto \log_{f(\mathbf{x})}(g(\mathbf{x}))$ è continua in \mathbf{x}_0 ;
- (vi) $\mathbf{x} \mapsto \min\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}$ è continua in \mathbf{x}_0 ;

(vii) $\mathbf{x} \mapsto \max\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}$ è continua in \mathbf{x}_0 ;

Dimostrazione. Dal Lemma 6.11 seguono (i) - (v).

Dimostriamo (vi). Per (7.1), per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in B_{\delta_1}(\mathbf{x}_0)$ e $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in B_{\delta_2}(\mathbf{x}_0)$. Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, abbiamo per ogni $\mathbf{x} \in B_{\delta}(\mathbf{x}_0)$

$$\min\{f(\mathbf{x}_0), g(\mathbf{x}_0)\} - \varepsilon < \min\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} < \min\{f(\mathbf{x}_0), g(\mathbf{x}_0)\} + \varepsilon.$$

La dimostrazione di (vii) è analoga. □

Da (vi), (vii), in particolare, segue che se f è continua anche $|f|, f^+, f^-$ sono continue.

Lemma 7.7. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

(i) f è continua in $\mathbf{x}_0 \in A \cap D(A)$

(ii) g è continua in $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$.

Allora $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in \mathbf{x}_0 .

Dimostrazione. Segue dal Lemma 6.12. □

Esempio 7.8. La funzione

$$f(x, y) = \frac{e^{x-y}}{\ln(x^2 + y^2)}$$

è continua nel suo insieme di definizione (quale?).

Il seguente risultato esprime una proprietà fondamentale delle funzioni continue:

Teorema 7.9. (Weierstraß) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esistono $\bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \in A$ t.c.

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = \max_A f, \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = \min_A f.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\sup_A f = l,$$

per qualche $l \in]-\infty, +\infty]$. Allora esiste una successione (\mathbf{a}_k) in A t.c. $f(\mathbf{a}_k) \rightarrow l$. Per il Teorema 5.4, passando a una sotto-successione si ha $\mathbf{a}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ per qualche $\bar{\mathbf{x}} \in A$. Dunque, per il Lemma 6.6 abbiamo $f(\mathbf{a}_k) \rightarrow f(\bar{\mathbf{x}})$, da cui per il Teorema 6.2 $f(\bar{\mathbf{x}}) = l$ (in particolare $l \in \mathbb{R}$). Ne segue

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = \max_A f.$$

Similmente si prova l'esistenza di $\underline{\mathbf{x}}$. □

Corollario 7.10. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e illimitato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua:

(i) se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, esiste $\underline{x} \in A$ t.c. $f(\underline{x}) = \min_A f$;

(ii) se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, esiste $\bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) = \max_A f$;

Dimostrazione. Dimostriamo (i) (la dimostrazione di (ii) è analoga). Fissato $c > \inf_A f$, esiste $R > 0$ t.c. $f(x) > c$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus B_R(\mathbf{0})$. Dunque l'insieme $A' = \bar{f}^c$ è limitato. Inoltre A' è chiuso, dunque esso è compatto. Per il Teorema 7.9 esiste $\underline{x} \in A'$ t.c.

$$f(\underline{x}) = \inf_{A'} f = \inf_A f,$$

il che conclude la dimostrazione. □

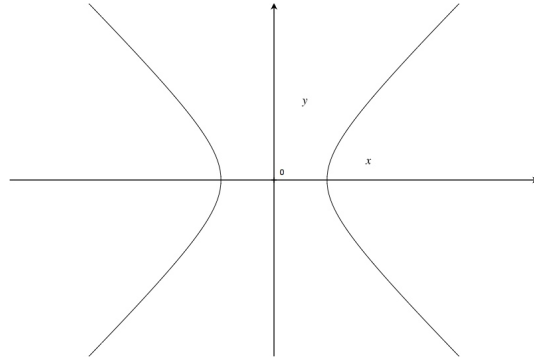


FIGURA 14.

Esempio 7.11. Sia $f(x, y) = e^x + y$ definita in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}.$$

Per il Corollario 7.10 (i), f ammette minimo.

Nel seguente risultato si usano invece domini connessi:

Teorema 7.12. (Valori intermedi) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$, $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(\mathbf{x}_1) < c < f(\mathbf{x}_2).$$

Allora esiste $\tilde{\mathbf{x}} \in A$ t.c. $f(\tilde{\mathbf{x}}) = c$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che $f(\mathbf{x}) \neq c$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Poniamo

$$B_1 = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) < c\}, \quad B_2 = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) > c\}.$$

Per il Lemma 7.4 gli insiemi B_1, B_2 sono aperti in A . Inoltre, per ipotesi $\mathbf{x}_i \in B_i$ ($i = 1, 2$) e $A = B_1 \cup B_2$, contro l'ipotesi che A sia connesso. \square

Corollario 7.13. (Esistenza degli zeri) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c.

$$\inf_A f < 0 < \sup_A f.$$

Allora esiste $\tilde{\mathbf{x}} \in A$ t.c. $f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$.

Dimostrazione. Si applica il Teorema 7.12 con $c = 0$. \square

I risultati precedenti hanno conseguenze importanti sullo *studio del segno* di una funzione:

Esempio 7.14. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

I suoi *zeri* (ovvero i punti t.c. $f(x, y) = 0$) formano un'iperbole equilatera \mathcal{E} (fig. 14), che divide \mathbb{R}^2 in due regioni E^+, E^- ($(0, 0) \in E^-$). Basta sapere che f non si annulla in E^+ e in E^- per concludere, mediante il Corollario 7.13, che

$$f^0 = E^-, \quad f_0 = E^+.$$

Osservazione 7.15. La proprietà dei valori intermedi si può dedurre dalla corrispondente proprietà per le funzioni di una variabile reale (ved. [3]) nel caso in cui A sia *connesso per archi* (ved. Sezione 3). Infatti, dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(\mathbf{x}) < c < f(\mathbf{y}),$$

esiste una curva γ di parametrizzazione continua $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow A$ t.c. $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{y}$. Posto $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ per ogni $t \in [0, 1]$, si ha che $g \in C^0([0, 1])$ e $g(0) < c < g(1)$. Allora esiste $\tilde{t} \in]0, 1[$ t.c. $g(\tilde{t}) = c$. Posto $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{r}(\tilde{t})$, la dimostrazione è conclusa. Questo argomento vale, in particolare, se A è aperto e connesso.

Una forma più forte di continuità:

Definizione 7.16. La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *uniformemente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$.

Ovviamente, una funzione uniformemente continua è anche continua. L'implicazione inversa è falsa:

Esempio 7.17. Siano $A = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $f(\mathbf{x}) = \ln(|\mathbf{x}|)$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. La funzione f è continua, ma non uniformemente continua: infatti, fissato $\varepsilon = \ln(\frac{3}{2}) > 0$, per ogni $\delta > 0$ basta scegliere $\mathbf{x} \in \partial B_{\delta/2}(\mathbf{0})$ e $\mathbf{y} \in \partial B_{\delta/3}(\mathbf{0})$ per avere

$$|\ln(|\mathbf{x}|) - \ln(|\mathbf{y}|)| = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

L'implicazione si inverte sotto opportune ipotesi sul dominio:

Teorema 7.18. (Cantor-Heine) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è *uniformemente continua*.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: sia $\varepsilon > 0$ t.c. per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ esistono $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in A$ t.c. $|\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k| < \frac{1}{k}$ e $|f(\mathbf{a}_k) - f(\mathbf{b}_k)| \geq \varepsilon$. Per il Teorema 5.4, passando a una sotto-successione si ha $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x}_0 \in A$), da cui $f(\mathbf{a}_k) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$. Ne segue anche $\mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ e $f(\mathbf{b}_k) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$. Dunque, per il Teorema 6.9 si ha

$$|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)| \geq \varepsilon,$$

assurdo. □

Introduciamo adesso alcune speciali classi di funzioni continue:

Definizione 7.19. La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è detta

- (i) *lipschitziana* se esiste $L > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$;
- (ii) *α -hölderiana* ($\alpha \in]0, 1[$) se esiste $L > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$.

Le funzioni lipschitziane sono uniformemente continue anche su domini non compatti:

Lemma 7.20. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana. Allora f è *uniformemente continua*.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ si ha

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon,$$

dunque f è uniformemente continua. □

Richiamiamo la Definizione 4.6 osservando una singolare proprietà:

Lemma 7.21. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora f è *continua*.

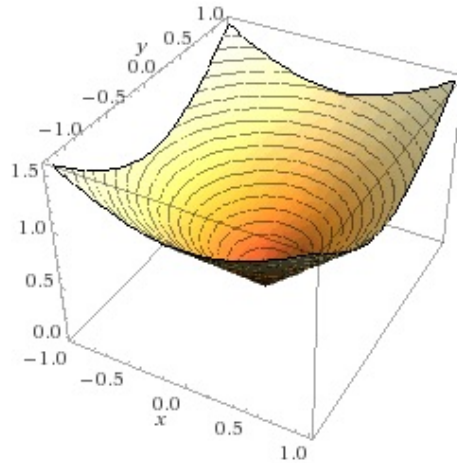


FIGURA 15.

Dimostrazione. Richiamiamo la classica *diseguaglianza di Jensen*: sia $Q \subset \mathbb{R}^n$ un iper-cubo di vertici $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{2^n} \in \mathbb{R}^n$, allora per ogni $\mathbf{x} \in Q$ esistono $\tau_1, \dots, \tau_{2^n} \in [0, 1]$ t.c.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{2^n} \tau_i \mathbf{z}_i, \quad \sum_{i=1}^{2^n} \tau_i = 1,$$

e

$$(7.2) \quad f(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \tau_i f(\mathbf{z}_i).$$

Sia $\mathbf{x}_0 \in A$, e sia $r > 0$ t.c. $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset A$. Scegliendo r abbastanza piccolo, possiamo costruire un iper-cubo Q t.c. $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset Q \subset A$. Per (7.2) esiste $M > 0$ t.c. $f(\mathbf{x}) \leq M$ per ogni $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$. Fissato $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, sia

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \frac{r}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Per convessità di f si ha

$$f(\mathbf{x}) \leq \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{r} f(\mathbf{y}) + \left(1 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{r}\right) f(\mathbf{x}_0),$$

da cui

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{M - f(\mathbf{x}_0)}{r} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|.$$

Similmente si prova la disequaglianza opposta, quindi f è lipschitziana in $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$. Per il Lemma 7.20, f risulta continua in \mathbf{x}_0 . \square

Ovviamente vale l'analogo del Lemma 7.21 per le funzioni concave.

Esempio 7.22. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

allora f è convessa, in particolare continua. Il suo grafico è un *cono* in \mathbb{R}^3 con vertice $(0, 0, 0)$ (fig. 15).

Un punto $\mathbf{x}_0 \in A \cap D(A)$ in cui f non è continua è detto *punto di discontinuità*. Distinguiamo tre classi di tali punti:

- 0. \mathbf{x}_0 è una *discontinuità eliminabile* se esiste $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) ma $f(\mathbf{x}_0) \neq l$;

1. \mathbf{x}_0 è un *punto d'infinito* se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty$ (o $-\infty$);
2. \mathbf{x}_0 è un *punto di discontinuità essenziale* se non esiste $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$.

Esempio 7.23. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ha in $(0, 0)$ una discontinuità eliminabile.

Esempio 7.24. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ha in $(0, 0)$ un punto d'infinito.

Esempio 7.25. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

ha in $(0, 0)$ un punto singolare.

Esercizio 7.26. La funzione

$$f(x, y) = e^{-\frac{x+y}{x^2+y^2}}$$

è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Determinare, se esiste, un'estensione continua di f a \mathbb{R}^2 .

Esercizio 7.27. Stabilire se la funzione $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ ammette massimo o minimo in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 7.28. Stabilire se le seguenti funzioni ammettono massimo o minimo nei rispettivi insiemi di definizione:

$$\ln(x - y), \sin(x^2) + \cos(y^2), \arcsin(x + y), \sqrt{x^2 + y^2 - 4xy}.$$

Esercizio 7.29. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $A = f_0$. Dimostrare che

$$\partial A \subseteq f^{-1}(0), \text{cl}(A) \subseteq \bar{f}_0.$$

Esercizio 7.30. Studiare il segno delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi di definizione:

$$\frac{|x - y|}{x + y}, \ln(y - x), \sin\left(\frac{|x|}{x + y}\right).$$

Esercizio 7.31. Determinare e classificare i punti di discontinuità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 7.32. (Difficile) Dimostrare la disuguaglianza (7.2).

8. FUNZIONI VETTORIALI

Estendiamo alcune delle nozioni fin qui introdotte al caso delle *funzioni vettoriali*: siano $n, m \in \mathbb{N}_0$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

con $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$. Le definizioni della Sezione 1 si estendono letteralmente, tranne quelle che richiedono un ordinamento dello spazio 'di arrivo'. Anche la nozione di limite in un punto si estende:

Definizione 8.1. Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$. Diremo che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Come al solito, una notazione equivalente è $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. La convergenza di una funzione a valori vettoriali è equivalente a quella di una funzione a valori reali:

$$(8.1) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}| = 0.$$

La convergenza di una funzione vettoriale si caratterizza mediante le componenti (come nel Lemma 5.2):

Lemma 8.2. Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in D(A)$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$;
- (ii) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = l_j$ per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$.

Mediante il Lemma 8.2, diversi risultati sui limiti di funzioni reali di più variabili reali si estendono al caso vettoriale: i Teoremi 6.2, 6.6, 6.7, i Lemmi 6.11, 6.12. Similmente si definisce la continuità:

Definizione 8.3. Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A \cap D(A)$: \mathbf{f} è detta *continua in \mathbf{x}_0* se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Inoltre \mathbf{f} è detta *continua in A* se lo è in ogni punto di A .

Chiaramente, per il Lemma 8.2 si ha che \mathbf{f} è continua in un punto se e solo se lo è f_j per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$. Dunque, si estendono al caso vettoriale i Lemmi 7.3, 7.4, 7.6, 7.7. I teoremi di Weierstraß e dei valori intermedi prendono una forma diversa:

Teorema 8.4. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Allora $\mathbf{f}(A)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia (\mathbf{b}_k) una successione in $\mathbf{f}(A)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\mathbf{a}_k \in A$ t.c. $\mathbf{f}(\mathbf{a}_k) = \mathbf{b}_k$. Poiché A è compatto, passando a una sotto-successione si ha $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ per qualche $\mathbf{x}_0 \in A$. Poiché \mathbf{f} è continua, $\mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Per il Corollario 5.5, $\mathbf{f}(A)$ è compatto. \square

Teorema 8.5. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Allora $\mathbf{f}(A)$ è connesso.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: siano $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti t.c.

$$\mathbf{f}(A) \subseteq B_1 \cup B_2, \mathbf{f}(A) \cap B_1 \neq \emptyset, \mathbf{f}(A) \cap B_2 \neq \emptyset, \mathbf{f}(A) \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Poniamo $C_i = \mathbf{f}^{-1}(B_i)$ ($i = 1, 2$), allora C_1, C_2 sono aperti in A e non vuoti, e si ha $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, contro l'ipotesi che A sia connesso. \square

La definizione di funzione assolutamente continua è analoga a quella vista nella Sezione 7, come quelle di funzione lipschitziana, hölderiana, il Teorema 7.18 e il Lemma 7.20. Presentiamo adesso alcuni esempi:

Esempio 8.6. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare indotta da una matrice $A \in \mathbb{R}_m^n$ non nulla. Poniamo

$$L = \sqrt{m} \max\{|a_{ij}| : i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\},$$

allora \mathbf{f} è lipschitziana con costante $L > 0$. Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ij}(x_i - y_i) \right| = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 (x_i - y_i)^2} \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

In particolare, \mathbf{f} è continua.

Esempio 8.7. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proiezione sulla sfera $\partial B_1(\mathbf{0})$, definita da

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Questa funzione è continua, ma non esiste

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

così che non è possibile estendere \mathbf{f} a una funzione continua definita in \mathbb{R}^n .

Consideriamo ora il caso delle funzioni $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Per queste funzioni ha senso studiare la *funzione inversa*, e si ha in proposito il seguente risultato:

Teorema 8.8. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e iniettiva. Allora $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(A) \rightarrow A$ è continua.*

Dimostrazione. Per il Teorema 8.4, l'insieme $B = \mathbf{f}(A)$ è compatto. Dimostriamo che \mathbf{f}^{-1} è continua: sia $C \subseteq A$ chiuso in A , allora C è compatto. Poiché \mathbf{f} è continua, $\mathbf{f}(C)$ è compatto, in particolare chiuso in B . Quindi le retro-immagini di insiemi chiusi mediante \mathbf{f}^{-1} sono chiuse, il che implica la continuità di \mathbf{f}^{-1} . \square

In generale, una funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow B$ continua biunivoca con inversa continua è detta *omeomorfismo*. Due insiemi A, B t.c. esiste un omeomorfismo fra essi sono detti *omeomorfi* e condividono le più importanti proprietà topologiche: A è aperto (chiuso, compatto, connesso...) se e solo se B è aperto (chiuso, compatto, connesso...). Notiamo che l'omeomorfismo non preserva la convessità né la proprietà di essere semplicemente connesso.

Esempio 8.9. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'*isometria*, ovvero per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sia

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Allora, \mathbf{f} è iniettiva e continua. Se \mathbf{f} è anche suriettiva, allora è un omeomorfismo. Un esempio di isometria è la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\mathbf{f}(x, y) = (y, x).$$

Esempio 8.10. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x - y).$$

Questa funzione è un omeomorfismo, la cui inversa si ricava esplicitamente:

$$\mathbf{f}^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2} \right).$$

Esempio 8.11. Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}.$$

La trasformazione in coordinate polari è un omeomorfismo fra A e il rettangolo

$$B = \left\{ (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[: 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

La stessa trasformazione è un omeomorfismo fra $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ (osserviamo che il primo insieme non è semplicemente connesso, mentre il secondo lo è).

Osservazione 8.12. Richiamiamo da [1] la definizione dell'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} . Si ha $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, e anche le topologie definite sui due insiemi coincidono: pertanto, dal punto di vista dei limiti e della continuità, lo studio delle funzioni $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è identico a quello delle funzioni vettoriali $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (mentre il calcolo differenziale è del tutto diverso).

Esercizio 8.13. Dimostrare i risultati menzionati sopra per le funzioni vettoriali.

Esercizio 8.14. Sia $\theta \in [0, \pi[$. La rotazione di ampiezza θ in \mathbb{R}^2 è la trasformazione lineare indotta dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Dimostrare che essa è un'isometria.

Lo studio di alcuni casi particolari di funzioni vettoriali sarà approfondito in altri capitoli: quello delle funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e delle funzioni $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in [6], quello delle funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) in [7].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. IANNIZZOTTO, Pan di Via per i corsi di Analisi Matematica.
- [2] A. IANNIZZOTTO, Insiemi numerici.
- [3] A. IANNIZZOTTO, Limiti e continuità.
- [4] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale.
- [5] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale in più variabili.
- [6] A. IANNIZZOTTO, Curve e superfici.
- [7] A. IANNIZZOTTO, Campi vettoriali.
- [8] C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica 2, Zanichelli (2016).
- [9] E. SCHLESINGER, Algebra lineare e geometria, Zanichelli (2011).

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
 VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
 E-mail address: antonio.iannizzotto@unica.it