

SERIE NUMERICHE E DI FUNZIONI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Definizione di serie numerica convergente, divergente, irregolare. Serie a termini di segno costante: criterio del confronto, rapporto, radice. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz. Convergenza assoluta. Successioni di funzioni: convergenza puntuale, uniforme, passaggi al limite. Serie di funzioni: convergenza puntuale, uniforme, totale. Serie di potenze. Serie di Taylor. Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

INDICE

1. Serie numeriche	1
2. Serie a termini di segno costante	4
3. Serie a termini di segno variabile e convergenza assoluta	7
4. Successioni di funzioni	10
5. Serie di funzioni	16
6. La serie di Taylor	20
Riferimenti bibliografici	24

Versione del 26 dicembre 2020

1. SERIE NUMERICHE

Non c'è un solo fatto che non possa essere il primo di una serie infinita.

J.L. BORGES

La teoria delle serie numeriche ha lo scopo di estendere l'operazione di somma al caso in cui gli addendi sono infiniti. Tale estensione è resa possibile dall'operazione di limite (ved. [2]): sia (a_n) una successione di numeri reali, si definisce la successione delle *somme parziali* di termine generale

$$S_k = \sum_{n=0}^k a_n.$$

La *serie numerica* di termine generale a_n è la successione (S_k) , denotata

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^1.$$

Definizione 1.1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è detta

- (i) *convergente* se $S_k \rightarrow S$ per qualche $S \in \mathbb{R}$, e il numero S è detto *somma della serie*;
- (ii) *divergente positivamente (risp. negativamente)* se $S_k \rightarrow +\infty$ (risp. $-\infty$);
- (iii) *irregolare* se (S_k) è irregolare.

¹Secondo la natura dei termini, la serie può cominciare da $n = 1$, $n = 2$, etc.

Di alcune serie semplici si riesce a determinare non solo il carattere ma anche la somma (nel caso di convergenza).

Esempio 1.2. La *serie di Mengoli* è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$S_k = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_k \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

L'Esempio 1.2 ricade nel caso generale delle *serie telescopiche*, ovvero quelle che si possono rappresentare nella forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}),$$

dove (b_n) è una successione t.c. $b_n \rightarrow l$. Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$S_k = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \dots + (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{k+1},$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - l.$$

Esempio 1.3. La *serie geometrica* di ragione $q \in \mathbb{R}$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Il suo carattere dipende da q . I casi particolari $q = 0$ (serie convergente) e $q = 1$ (serie divergente) sono ovvi. Per $q \neq 0, 1$, cominciamo col riportare la formula

$$(1.1) \quad \sum_{n=0}^k q^n = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q},$$

che si dimostra facilmente per induzione su k . A questo punto si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

Questa serie è usata nel calcolo degli interessi, e anche per determinare la *frazione generatrice di un numero decimale periodico*. Sia

$$\alpha = a_0, a_1 \dots a_h \overline{b_1 \dots b_p}$$

con $a_0, h, p \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_p \in \{0, \dots, 9\}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\alpha_k = a_0, a_1 \dots a_h \underset{\mathbf{1}}{b_1 \dots b_p} \dots \underset{\mathbf{k}}{b_1 \dots b_p}$$

(con k ripetizioni del periodo), così che $\alpha_n \rightarrow \alpha$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\alpha_k = \frac{a_0 \dots a_h}{10^h} + \frac{b_1 \dots b_p}{10^h} \sum_{n=1}^k \frac{1}{10^{np}},$$

da cui

$$\alpha = \lim_k \alpha_k = \frac{a_0 \dots a_h}{10^h} + \frac{b_1 \dots b_p}{10^h} \frac{1}{10^p - 1} = \frac{a_0 \dots a_h b_1 \dots b_p - a_0 \dots a_h}{\underset{\mathbf{1}}{9} \dots \underset{\mathbf{p}}{90} \dots \underset{\mathbf{h}}{0}}.$$

Per esempio,

$$0,3\overline{15} = \frac{312}{990}.$$

Condizioni necessarie o sufficienti per la convergenza di una serie:

Lemma 1.4. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Allora

- (i) $\lim_n a_n = 0$;
- (ii) per ogni $h \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=h+1}^{\infty} a_n$ converge con somma R_h , e $\lim_h R_h = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Siano (S_k) la successione delle somme parziali della serie assegnata, e $S \in \mathbb{R}$ la sua somma: allora si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

da cui $a_n \rightarrow 0$. Dimostriamo ora (ii). Detta (S'_k) la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=h+1}^{\infty} a_n$, si ha

$$S'_k = S_k - S_h,$$

da cui, passando al limite su k , si ha $R_h = S - S_h$. Un altro passaggio al limite, stavolta su h , permette di concludere. \square

Una conseguenza immediata del Criterio di Cauchy per le successioni (ved. [2]):

Teorema 1.5. (Criterio di Cauchy per le serie) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $|\sum_{n=h}^k a_n| < \varepsilon$ per ogni $\nu \leq h \leq k$.

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). Per ipotesi, la successione (S_k) delle somme parziali è convergente. Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $\nu \leq h \leq k$ si ha

$$\left| \sum_{n=h}^k a_n \right| = |S_k - S_h| < \varepsilon.$$

Similmente si dimostra che (ii) implica (i). \square

Lemma 1.6. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie convergenti, di somme S, S' , e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S + \beta S'.$$

Dimostrazione. Basta studiare le successioni delle somme parziali e applicare le proprietà dei limiti di successioni (ved. [2]). \square

Esercizio 1.7. Dimostrare la formula (1.1).

Esercizio 1.8. Studiare la convergenza e, se esiste, calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$$

(suggerimento: sono telescopiche).

Esercizio 1.9. Sfruttando quanto visto nell'Esempio 1.3, dimostrare che

$$0,\overline{9} = 1.$$

2. SERIE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE

Le *serie a termini di segno costante*, ovvero le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ (o $a_n \leq 0$) per ogni $n \in \mathbb{N}$, sono sempre regolari. Infatti, per una tale serie la successione (S_k) delle somme parziali è monotona e pertanto regolare. Per semplicità studieremo solo le serie a termini positivi, che hanno due soli caratteri:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S, S > 0;$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty.$

Teorema 2.1. (Criterio del confronto) *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serie a termini positivi, $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq \nu$. Allora:*

- (i) *se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;*
- (ii) *se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.*

Dimostrazione. Siano $(S_k), (S'_k)$ le successioni delle somme parziali delle due serie, allora $S_k \leq S'_k + c$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (per un'opportuna costante $c > 0$). La tesi segue dal Teorema del confronto per le successioni (ved. [2]). \square

Una tipica applicazione del Teorema 2.1 è il metodo del *confronto asintotico*. Supponiamo di voler determinare il carattere della serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, riconducendola a una serie più semplice $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (anch'essa a termini positivi). Calcoliamo

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty].$$

Applicando il Teorema 2.1, si deduce quanto segue:

- (a) *se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge e $l < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;*
- (b) *se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ e $l > 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.*

Esempio 2.2. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

Sappiamo che

$$\lim_n \frac{\ln(1 + 1/2^n)}{1/2^n} = 1,$$

e che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, dunque per confronto asintotico anche la serie assegnata converge.

Conseguenze del Teorema 2.1:

Teorema 2.3. (Criterio del rapporto) *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora:*

- (i) *se esistono $\lambda \in]0, 1[$, $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$ per ogni $n \geq \nu$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;*
- (ii) *se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ per ogni $n \geq \nu$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.*

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Per ogni $n \geq \nu$ si ha $a_n < a_\nu \lambda^{n-\nu}$, dunque basta applicare il Teorema 2.1 alle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ (moltiplicata per un'opportuna costante), che converge per l'Esempio 1.3.

Dimostriamo (ii). La successione (a_n) non tende a 0, quindi per il Lemma 1.4 (i) la serie diverge. \square

Corollario 2.4. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi t.c.

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty].$$

Allora:

- (i) se $l < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;
- (ii) se $l > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Il Corollario 2.4 lascia indeterminato il caso $l = 1$. In tal caso si può ricorrere al seguente raffinamento:

Teorema 2.5. (Criterio di Raabe) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi, t.c.

$$\lim_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Allora:

- (i) se $l > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;
- (ii) se $l < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Esempio 2.6. La serie esponenziale è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

ed è convergente per il Corollario 2.4. In questo caso possiamo calcolarne esplicitamente la somma $S > 0$. Infatti, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ si ha per la formula del binomio di Newton (ved. [1])

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{1}{k^n} = 2 + \sum_{n=2}^k \frac{1}{n!} \frac{k}{k} \frac{k-1}{k} \dots \frac{k-n+1}{k} \leq \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!},$$

da cui, passando al limite per $k \rightarrow \infty$, per il Teorema del confronto per le successioni si ha $e \leq S$. Un ragionamento simile mostra che $e \geq S$, dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Sempre dal Teorema 2.1 si ricava un altro utile criterio di convergenza:

Teorema 2.7. (Criterio della radice) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora:

- (i) se esistono $\lambda \in]0, 1[$, $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} < \lambda$ per ogni $n \geq \nu$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;
- (ii) se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per ogni $n \geq \nu$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Dimostrazione. Simile a quella del Teorema 2.3. □

Corollario 2.8. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi t.c.

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty].$$

Allora:

- (i) se $l < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;
- (ii) se $l > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Anche in questo caso, se $l = 1$ non riusciamo a stabilire il carattere della serie.

Esempio 2.9. Studiamo il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

La prima converge per il Corollario 2.4, in quanto

$$\frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 0.$$

La seconda converge per il Corollario 2.8, in quanto

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sfugge sia al Teorema 2.3 che al Teorema 2.7, ma può essere studiata mediante il seguente risultato (che non dimostriamo), e risulta divergente.

Teorema 2.10. (Criterio di condensazione) *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi t.c. (a_n) è non-crescente. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.

Esempio 2.11. La serie armonica generalizzata con esponente $\alpha > 0$ ha il seguente carattere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Infatti, per il Teorema 2.10, essa ha lo stesso carattere della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Esempio 2.12. Consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Poiché

$$\lim_n \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1,$$

per confronto asintotico essa ha lo stesso carattere della serie armonica, cioè diverge.

Esempio 2.13. Studiamo la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right).$$

Si vede facilmente che

$$(2.1) \quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

così che la serie data è a termini positivi. Studiamo la successione delle somme parziali:

$$\begin{aligned} S_k &= (1 - \ln(2)) + \left(\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \ln(2)\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\right) - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &\leq 1 - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \text{ (per (2.1)),} \end{aligned}$$

e l'ultimo termine tende a 1 per $k \rightarrow \infty$. Dunque la serie è convergente e la sua somma è un numero $\gamma \in]0, 1]$ detto *costante di Eulero-Mascheroni* (non si sa se γ sia razionale o irrazionale).

Esercizio 2.14. Dimostrare la formula (2.1).

Esercizio 2.15. Studiare il carattere delle seguenti serie a termini positivi:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}, \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n \ln(n)}, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + \ln(n)}} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n^2}} - 1). \end{aligned}$$

Esercizio 2.16. Studiare la convergenza delle seguenti serie a termini positivi:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n - 1}{(2e)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{2}{n^2} + 1 \right), \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(n^2)}{1 + n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \sin \left(\frac{1}{2^n} \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \left(\frac{1}{4^n} \right), \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)^2 + 1}{n \ln(n)^2 + n^2 \ln(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 3n} \right) \ln(n), \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \ln(n)}{5n^4 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

3. SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE E CONVERGENZA ASSOLUTA

In mancanza di informazioni sul segno dei termini, il carattere di una serie può essere qualunque. Per ricordarne lo studio a quello di una serie a termini positivi, si introduce una nozione più forte di convergenza.

Definizione 3.1. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è detta *assolutamente convergente* se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Una serie assolutamente convergente è anche (semplicemente) convergente. Infatti, posto per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n^{\pm} = \max\{\pm a_n, 0\},$$

si ha $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. Le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\pm}$, a termini non negativi, sono convergenti per il Teorema 2.1, dunque lo è anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ per il Lemma 1.6.

Esempio 3.2. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$$

è assolutamente convergente per confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (ved. Esempio 2.11).

Tuttavia, l'implicazione non si inverte. Un caso particolare è quello delle *serie a termini di segno alterno*, per le quali la convergenza (semplice) può essere acquisita sotto ipotesi generali.

Teorema 3.3. (Criterio di Leibniz) Sia (a_n) una successione non-crescente, a termini positivi, t.c. $a_n \rightarrow 0$. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

è convergente.

Dimostrazione. Sia (S_k) la successione delle somme parziali. La sotto-successione (S_{2k}) è decrescente e inferiormente limitata, in quanto per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq S_{2k},$$

$$S_{2k} = a_1 + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2k} - a_{2k-1}) \geq a_1,$$

dunque $S_{2k} \rightarrow S \in \mathbb{R}$ (ved. [2]). Similmente si prova che (S_{2k+1}) è crescente e superiormente limitata, da cui $S_{2k+1} \rightarrow S'$. Infine osserviamo che

$$S' - S = \lim_k (S_{2k+1} - S_{2k}) = \lim_k a_{2k+1} = 0,$$

così che $S_k \rightarrow S$. □

Esempio 3.4. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge ma non assolutamente.

La somma (di un insieme finito di numeri reali) gode delle proprietà *associativa* e *commutativa*. Vediamo ora se, e sotto quali condizioni, esse si possano estendere a quelle 'somme infinite' che sono le serie.

Lemma 3.5. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie regolare, e siano (k_n) una successione crescente in \mathbb{N} , con $k_0 = 0$. Sia $b_0 = 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_0$

$$b_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} a_j.$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ha lo stesso carattere (e la stessa somma in caso di convergenza) di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Dimostrazione. Sia (S_k) la successione delle somme parziali di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Allora, la successione delle somme parziali di $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è una sotto-successione di (S_k) , che ha lo stesso limite. □

Esempio 3.6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente. Raccogliendo opportunamente i suoi termini, si ottiene l'opposto della serie di Mengoli (ved. Esempio 1.2), che converge a 1. Dunque si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1.$$

Le serie irregolari, invece, non godono della proprietà associativa:

Esempio 3.7. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, che è irregolare. Associando i suoi termini a due a due ($k_n = 2n$), si ottiene la serie a termini nulli, che è convergente a 0.

Per la proprietà commutativa occorre richiedere la convergenza assoluta (omettiamo la dimostrazione).

Lemma 3.8. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie assolutamente convergente, e siano $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione biunivoca e $b_n = a_{\sigma(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^2$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ha lo stesso carattere (e la stessa somma in caso di convergenza) di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

²Questo tipo di funzione è detto *permutazione*, e la serie così prodotta è un *riordinamento* di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

La convergenza semplice non è sufficiente, come prova il seguente (sorprendente) risultato:

Teorema 3.9. (Riemann-Dini) *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente, t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Allora, per ogni $S \in \mathbb{R}$ esiste $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biunivoca t.c.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S.$$

Per 'moltiplicare' due serie occorre introdurre una forma di *convoluzione*³.

Definizione 3.10. *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie. Il loro prodotto secondo Cauchy è la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Il prodotto di serie convergenti può non convergere.

Esempio 3.11. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

converge per il Teorema 3.3, ma il suo prodotto per se stessa ha termine generale

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{nk - k^2 + n + 1}},$$

che non tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ non converge (Lemma 1.4 (i)).

Anche in questo caso, la convergenza assoluta risolve il problema (omettiamo la dimostrazione):

Teorema 3.12. (Mertens) *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ assolutamente convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergente. Allora il loro prodotto secondo Cauchy è una serie convergente e si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Esempio 3.13. Siano $q, r \in \mathbb{R}$ t.c. $0 < |q| < |r| < 1$. Allora il prodotto secondo Cauchy delle serie geometriche di ragioni q, r risp. è convergente e ha somma $\frac{1}{(1-q)(1-r)}$.

Esempio 3.14. Riprendiamo e generalizziamo l'Esempio 5.11, dimostrando che per ogni $p \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$(3.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} = e^p.$$

Procediamo per induzione. Il caso $p = 1$ è noto. Supponiamo che (3.1) valga per $p \in \mathbb{N}_0$, e consideriamo il prodotto secondo Cauchy delle serie assolutamente convergenti $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, il cui termine generale è

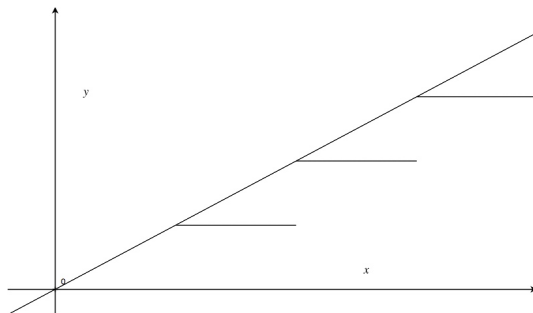
$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{p^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k = \frac{(p+1)^n}{n!}$$

per la formula del binomio di Newton (ved. [1]). Dunque, per il Teorema 3.12 e l'ipotesi induttiva si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+1)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) = e^{p+1},$$

il che conclude la dimostrazione. In effetti, (3.1) vale anche per ogni $p \in \mathbb{R}$ (ved. Sezione 6).

³La convoluzione è maggiormente legata alla teoria dell'integrazione, ved. [4].

FIGURA 1. Approssimazione di x mediante funzioni costanti a tratti.

Esercizio 3.15. Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\left(\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Esercizio 3.16. Studiare la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{\frac{1}{n}} - 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin(n)}.$$

4. SUCCESIONI DI FUNZIONI

Una *successione di funzioni* è una successione (f_n) i cui elementi sono funzioni definite tutte nello stesso intervallo I ⁴. Formalmente, si può pensare tale successione come una funzione di due variabili $F : (\mathbb{N} \times I) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $F(n, x) = f_n(x)$ per ogni $(n, x) \in \mathbb{N} \times I$.

Esempio 4.1. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ consideriamo la decomposizione dell'intervallo $[0, 1[$ in n intervalli tutti di ampiezza $\frac{1}{n}$, quindi definiamo $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f_n(x) = \frac{i-1}{n} \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}, x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$$

(fig. 1). Per ogni $x \in [0, 1[$ si ha

$$\lim_n f_n(x) = x,$$

ovvero ogni scelta di x determina una successione numerica $(f_n(x))$, che converge a x per $n \rightarrow \infty$. Infatti, per ogni $x \in I$ e $n \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n}.$$

La nozione di *convergenza* per una successione di funzioni si può definire in due modi. Come vedremo, il secondo è più significativo (anche se meno naturale).

Definizione 4.2. Siano (f_n) una successione di funzioni, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$:

- (i) (f_n) converge puntualmente a f se per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $x \in I$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$;
- (ii) (f_n) converge uniformemente a f se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$, e ogni $x \in I$.

⁴Nella presente esposizione tratteremo sempre successioni di funzioni definite in un intervallo, il caso di un insieme di definizione generico si studia con ovvi adattamenti.

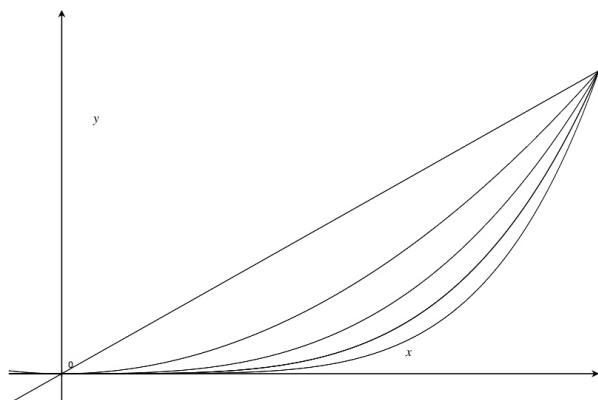


FIGURA 2. La successione di funzioni (x^n) .

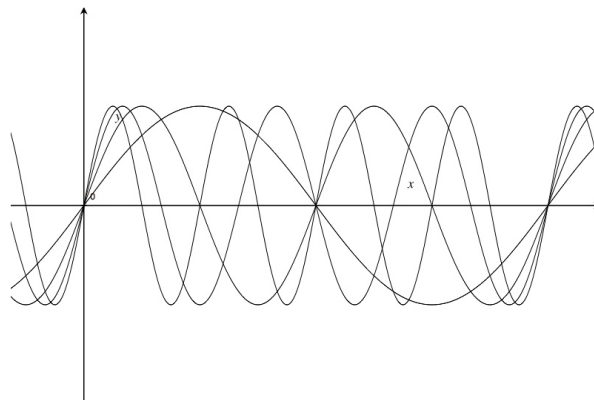


FIGURA 3. La successione di funzioni $(\sin(nx))$.

La condizione (i) è anche detta *convergenza semplice*, indicata col simbolo $f_n \rightarrow f$, ed esprime il fatto che per ogni $x \in I$ la successione numerica $(f_n(x))$ converge a $f(x)$. La condizione (ii), indicata col simbolo $f_n \rightrightarrows f$, significa invece che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ indipendentemente da $x \in I$ (formalmente, la differenza fra le due forme di convergenza è rappresentata dalla dipendenza di ν : $\nu = \nu(\varepsilon, x)$ in (i), $\nu = \nu(\varepsilon)$ in (ii)).

Ovviamente (ii) implica (i), mentre l'implicazione inversa è in generale falsa.

Esempio 4.3. Sia $f_n(x) = x^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0, 1]$. Definiamo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Si vede facilmente che (f_n) converge puntualmente a f (fig. 2). D'altra parte, questa convergenza non è uniforme. Infatti, fissato $\varepsilon \in]0, 1[$, scegliendo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ $x_n \in]\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1[$ si ha $f_n(x_n) > \varepsilon$.

Esempio 4.4. Sia $f_n(x) = \sin(nx)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (fig. 3). Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la successione $(\sin(nx))$ è irregolare, quindi la successione di funzioni (f_n) non converge puntualmente (né uniformemente).

Esempio 4.5. Sia $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Si vede facilmente che $f_n \rightarrow 0$, ma la convergenza non è uniforme.

Forniamo una caratterizzazione della convergenza uniforme:

Lemma 4.6. *Siano (f_n) una successione di funzioni definite in I , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) $f_n \rightrightarrows f$;
- (ii) $\limsup_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \geq \nu$, $x \in I$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dunque, ε è un maggiorante per la funzione $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ e si ha per ogni $n \geq \nu$

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

da cui (ii).

Similmente si prova che (ii) implica (i). □

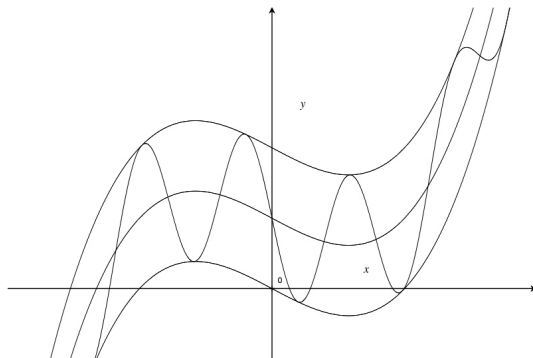


FIGURA 4. La convergenza uniforme.

Esempio 4.7. Sia (f_n) definita ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in [1, +\infty[$

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + nx}.$$

Chiaramente $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{x}$. Per verificare se la convergenza è uniforme, calcoliamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \geq 1} \left| \frac{n}{1 + nx} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{1 + n},$$

che converge a 0 per $n \rightarrow \infty$. Per il Lemma 4.6 si ha $f_n(x) \rightrightarrows \frac{1}{x}$.

L'interpretazione grafica del Lemma 4.6 è la seguente: fissato $\varepsilon > 0$, definiamo l'insieme

$$S_\varepsilon = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : |y - f(x)| < \varepsilon\}$$

(detto ε -dilatazione di $\text{gr}(f)$). Per $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, si ha $\text{gr}(f_n) \subseteq S_\varepsilon$ (fig. 4).

Un'altra caratterizzazione è offerta dal seguente risultato:

Teorema 4.8. (Criterio di Cauchy) *Sia (f_n) una successione di funzioni definite in I . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) (f_n) converge uniformemente;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq \nu$, e ogni $x \in I$.

Dimostrazione. Segue dal Criterio di Cauchy per le successioni numeriche (ved. [2]). □

Osservazione 4.9. I precedenti risultati si possono leggere alla luce dell'Analisi funzionale, la disciplina che studia le funzioni come elementi di spazi astratti. Per semplicità assumiamo I compatto e f_n, f continue. Sullo spazio delle funzioni continue in I , denotato $C^0(I)$, si definisce una *metrica* ponendo

$$d(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| \text{ per ogni } f, g \in C^0(I).$$

Il numero $d(f, g)$ misura la 'distanza' fra f e g . Per il Lemma 4.6 si ha

$$f_n \rightrightarrows f \iff d(f_n, f) \rightarrow 0,$$

ovvero la convergenza uniforme equivale alla convergenza nello spazio $C^0(I)$ dotato della metrica $d(\cdot, \cdot)$. Il Teorema 4.8 invece esprime il fatto che tale spazio è *completo* (ved. [7]).

La convergenza uniforme permette di 'passare al limite' (per $n \rightarrow \infty$) nelle operazioni fondamentali dell'Analisi matematica: limite (in un punto), integrale, derivata.

Teorema 4.10. (Scambio dei limiti) *Siano (f_n) una successione di funzioni definite in I , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in DI$ t.c.*

- (i) $f_n \rightrightarrows f$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$, $l_n \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora esiste $l \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_n l_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per (i) e il Teorema 4.8 esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geq \nu$, $x \in I$ si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Inoltre, per (ii) esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha

$$\max \{|f_n(x) - l_n|, |f_m(x) - l_m|\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pertanto abbiamo

$$|l_n - l_m| \leq |l_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - l_m| < \varepsilon,$$

quindi (l_n) soddisfa la condizione di Cauchy. Per il Criterio di Cauchy per le successioni (ved. [2]) esiste $l \in \mathbb{R}$ t.c. $l_n \rightarrow l$.

Dimostriamo ora che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$. Fissato (un altro) $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \geq \nu$ si ha

$$|l_n - l| < \frac{\varepsilon}{3},$$

e per il Lemma 4.6 e (i)

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fissato $n \geq \nu$, per (ii) esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha

$$|f_n(x) - l_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dunque, per ogni $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta$ abbiamo

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| < \varepsilon,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Un'immediata conseguenza del Teorema 4.10:

Corollario 4.11. *Siano (f_n) una successione di funzioni definite in I , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ t.c.*

- (i) $f_n \rightrightarrows f$;
- (ii) f_n è continua in x_0 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora f è continua in x_0 .

Grazie al Corollario 4.11 abbiamo la conferma che la successione dell'Esempio 4.3 non converge uniformemente: infatti la funzione limite non è continua.

Esempio 4.12. Sia (f_n) definita ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \arctan(nx).$$

Allora $f_n \rightarrow f$, dove

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme, infatti f_n è continua in \mathbb{R} per ogni $n \in \mathbb{N}$ mentre f è discontinua in 0.

Teorema 4.13. (Passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Siano (f_n) una successione di funzioni definite in $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.*

(i) $f_n \rightrightarrows f$;

(ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n è integrabile secondo Riemann e $\int_a^b f_n(x) dx = A_n$.

Allora f è integrabile secondo Riemann e

$$\lim_n A_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, per il Corollario 4.11, f è continua, in particolare integrabile secondo Riemann (ved. [4]). Fissato $\varepsilon > 0$, per (i) e il Lemma 4.6 esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \geq \nu$

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Dunque, per ogni $n \geq \nu$ abbiamo

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon,$$

da cui la tesi. □

L'ipotesi (i) non può essere rimossa:

Esempio 4.14. Sia (f_n) definita ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[\\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, la funzione f_n è integrabile in $[0, 1]$ con

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(n),$$

Inoltre $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{x}$ in $]0, 1]$ e $f_n(0) \rightarrow 0$, con convergenza non uniforme. Infatti la funzione limite non è integrabile in $[0, 1]$.

Esempio 4.15. Sia (f_n) definita ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right[\\ 2n - n^2 x & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right[\\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, f_n è integrabile e

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

(fig. 5). D'altra parte, $f_n(x) \rightarrow 0$ puntualmente (non uniformemente), e chiaramente la tesi del Teorema 4.13 non è verificata in quanto l'integrale della funzione limite è 0.

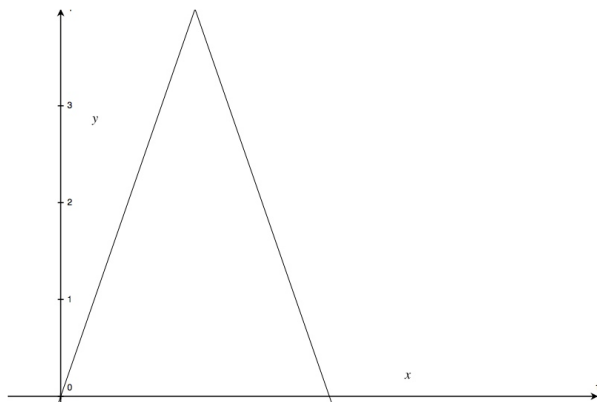


FIGURA 5. L'integrale di f_n è uguale all'area di un triangolo.

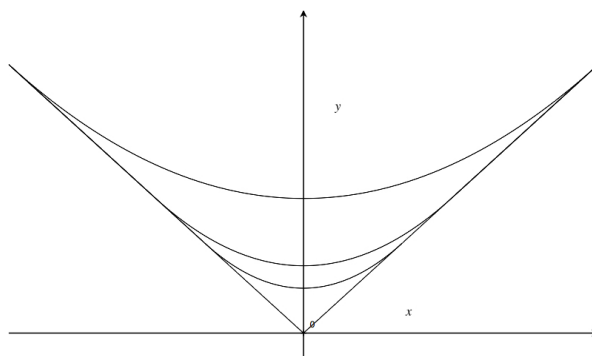


FIGURA 6. La funzione limite $|x|$ non è derivabile in 0.

Il rapporto fra convergenza uniforme e derivazione, più delicato, è regolato dal seguente risultato (che non dimostriamo):

Teorema 4.16. Siano (f_n) una successione di funzioni definite in $[a, b]$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- (i) f_n è derivabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $Df_n \rightrightarrows g$.

Allora esiste $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile t.c. $f_n \rightrightarrows f$ e $Df(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

La derivabilità di f_n e la convergenza uniforme *non* implicano che la funzione limite f sia derivabile:

Esempio 4.17. Sia (f_n) definita ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in [-1, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right[\\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ x & \text{se } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, f_n è derivabile e si ha $f_n(x) \rightrightarrows |x|$ (fig. 6). Tuttavia $x \mapsto |x|$ non è derivabile in 0.

I seguenti risultati (che non dimostriamo) forniscono condizioni sufficienti per la convergenza uniforme, basate sulla *monotonia*:

Teorema 4.18. (Dini) Siano (f_n) una successione di funzioni continue in $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, t.c.

- (i) $f_n \rightarrow f$;
- (ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.

Allora $f_n \rightrightarrows f$.

Teorema 4.19. (Pólya) Siano (f_n) una successione di funzioni continue in $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, t.c.

- (i) $f_n \rightarrow f$;
- (ii) $f_n(x_1) \leq f_n(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, e ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora $f_n \rightrightarrows f$.

Naturalmente, esistono versioni dei Teoremi 4.18 e 4.19 con ipotesi di monotonia non-crescente.

Esempio 4.20. Sia (f_n) definita ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Sappiamo che $f_n(x) \rightarrow e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ved. [2]). Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ la funzione f_n è crescente, quindi per il Teorema 4.19 la convergenza è uniforme su ogni intervallo compatto.

Esercizio 4.21. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right), \quad n \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Esercizio 4.22. Sia (f_n) definita ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = |x|^{\frac{n+1}{n}}.$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme e la derivabilità della funzione limite in 0.

Esercizio 4.23. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_n \int_0^1 \frac{\sin(nx)}{n^2 x} dx.$$

5. SERIE DI FUNZIONI

Esattamente come nel caso delle serie numeriche, una *serie di funzioni* si costruisce a partire da una successione (f_n) di funzioni definite in I . Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo la *somma parziale* di indice k ponendo per ogni $x \in I$

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^k f_n(x).$$

La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

è detta *puntualmente convergente* alla funzione somma $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ se $S_k(x) \rightarrow S(x)$, *uniformemente convergente* se $S_k(x) \rightrightarrows S(x)$. Introduciamo un'ulteriore nozione di convergenza:

Definizione 5.1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è detta *totalmente convergente* se esiste una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ t.c.

- (i) $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ è convergente.

Esempio 5.2. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Essa converge totalmente in \mathbb{R} , come si vede ponendo $M_n = \frac{1}{n^2}$.

Esempio 5.3. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{n^2},$$

definita in $]0, +\infty[$. Sappiamo dall'Esempio 2.11 che essa converge puntualmente. Tuttavia, poiché la funzione $x \mapsto \ln(x)$ non è limitata, la serie non converge totalmente in $]0, +\infty[$. Invece, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $0 < a < b$, si pone

$$M_n = \frac{\max\{|\ln(a)|, |\ln(b)|\}}{n^2},$$

e si vede facilmente che la serie soddisfa la Definizione 5.1 in $[a, b]$.

Si vede facilmente che, se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente, allora essa converge uniformemente (e quindi anche puntualmente) in I :

$$\text{Totale} \Rightarrow \text{uniforme} \Rightarrow \text{puntuale}.$$

Le implicazioni inverse non valgono in generale.

Alcune serie dipendenti da un parametro reale si possono riesaminare come serie di funzioni:

Esempio 5.4. La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ⁵ converge puntualmente in $] -1, 1[$ alla funzione somma

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

Inoltre, per ogni $\delta \in]0, 1[$, essa converge totalmente in $[-\delta, \delta]$.

Dal Corollario 4.11 e dai Teoremi 4.13, 4.16 seguono i prossimi risultati:

Teorema 5.5. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni definite in I , $x_0 \in I$ t.c.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$;
- (ii) f_n è continua in x_0 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora S è continua in x_0 .

Teorema 5.6. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni definite in $[a, b]$ t.c.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$;
- (ii) f_n è integrabile secondo Riemann e $\int_a^b f_n(x) dx = A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora S è integrabile secondo Riemann e

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \int_a^b S(x) dx.$$

Teorema 5.7. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni definite in I , $x_0 \in I$ t.c.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge;
- (ii) f_n è derivabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} Df_n(x)$ converge uniformemente a $T(x)$.

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a una funzione $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile t.c. $DS(x) = T(x)$ per ogni $x \in I$.

La classe più usata di serie di funzioni è quella costituita dalle serie di potenze, definite da

$$(5.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ e (a_n) è una successione di coefficienti in \mathbb{R} ⁶. L'insieme di definizione dei termini della serie è \mathbb{R} . Chiaramente essa converge almeno in x_0 (con somma a_0). La particolarità di questo tipo di serie è che il suo insieme di convergenza è simmetrico rispetto al centro x_0 (a parte gli estremi).

Lemma 5.8. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, (a_n) una successione in \mathbb{R} . Allora esiste $R \in [0, +\infty]$ t.c.

- (i) la serie (5.1) converge puntualmente in $]x_0 - R, x_0 + R[$;
- (ii) la serie (5.1) non converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$;
- (iii) la serie (5.1) converge totalmente in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r \in]0, R[$.

⁵Adottiamo, qui e nel seguito, la convenzione $0^0 = 1$, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

⁶Svolgiamo la teoria delle serie di potenze in \mathbb{R} , ma questa è sostanzialmente analoga in \mathbb{C} (ved. [7]).

Dimostrazione. Sappiamo che (5.1) converge almeno per $x = x_0$. Poniamo dunque

$$(5.2) \quad \mathcal{S} = \left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ converge} \right\},$$

denotando $R = \sup \mathcal{S}$. Supponiamo $R \in]0, +\infty[$ (gli altri casi si studiano in modo analogo).

Dimostriamo (i). Per ogni $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ esiste $r \in \mathcal{S}$ t.c. $|x - x_0| < r < R$ ovvero la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

converge. In particolare, si ha definitivamente $|a_n r^n| < 1$, da cui

$$|a_n (x - x_0)^n| < \left| \frac{x - x_0}{r} \right|^n,$$

e il secondo membro è il termine generale di una serie geometrica convergente (Esempio 5.4). Per il Teorema 2.1, la serie (5.1) converge (assolutamente).

Dimostriamo (ii). Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus]x_0 - R, x_0 + R[$, esiste $r \in]R, |x - x_0|[$ (in particolare $r \notin \mathcal{S}$), così che se (5.1) convergesse, allora convergerebbe anche la serie di termine generale $a_n r^n$, assurdo.

Dimostriamo (iii). Per ogni $r \in]0, R[$ si ha $r \in \mathcal{S}$. Pertanto, la serie (5.1) converge totalmente in $[x_0 - r, x_0 + r]$ (ponendo $M_n = |a_n r^n|$). \square

Il numero R introdotto nel Lemma 5.8 è detto *raggio di convergenza* della serie (5.1). Se $R = 0$, la serie converge solo in x_0 . Se invece $R = +\infty$, la serie converge puntualmente in \mathbb{R} e totalmente in ogni intervallo compatto. Osserviamo che, nel caso $R \in]0, +\infty[$, il Lemma 5.8 non fornisce informazioni sul comportamento della serie nei punti di frontiera $x_0 \pm R$.

I prossimi risultati (in cui adottiamo la convenzione $\frac{1}{0} = +\infty$) forniscono dei metodi per calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Teorema 5.9. *Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, (a_n) una successione in \mathbb{R} , $L \in [0, +\infty]$ t.c.*

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Allora il raggio di convergenza della serie (5.1) è $\frac{1}{L}$.

Dimostrazione. Supponiamo $L \in]0, +\infty[$, e definiamo l'insieme \mathcal{S} come in (5.2). Per ogni $r \in]0, \frac{1}{L}[$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge assolutamente per il Corollario 2.8, in quanto

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n r^n|} = rL < 1.$$

Dunque $r \in \mathcal{S}$. Per ragioni analoghe, scelto ad arbitrio $r > \frac{1}{L}$ si vede che $r \notin \mathcal{S}$. Dunque

$$\sup \mathcal{S} = \frac{1}{L},$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Teorema 5.10. *Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, (a_n) una successione in \mathbb{R} , $L \in [0, +\infty]$ t.c.*

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

Allora il raggio di convergenza della serie (5.1) è $\frac{1}{L}$.

Dimostrazione. Analoga a quella del Teorema 5.9. \square

Esempio 5.11. Consideriamo la *serie esponenziale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dal Teorema 5.10 risulta che il suo raggio di convergenza è $+\infty$. Dunque, la serie converge puntualmente in \mathbb{R} e totalmente in ogni intervallo compatto. Inoltre, ragionando come nell'Esempio 3.14 sappiamo che la sua funzione somma è $x \mapsto e^x$. La stessa conclusione si può raggiungere ponendo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e applicando il Teorema 4.16: si ha $f(0) = 1$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$Df(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x).$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie (ved. [5]) sappiamo che $f(x) = e^x$.

Esempio 5.12. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-3)^n.$$

Si ha

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Per il Teorema 5.9, il raggio di convergenza è 2. La serie converge in $]1, 5[$ (in 5 diverge, in 1 è irregolare).

Un'altra caratteristica notevole delle serie di potenze è la seguente: la serie delle derivate e quella delle primitive di (5.1) sono ancora serie di potenze, precisamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1},$$

con lo stesso raggio di convergenza. Pertanto, se una funzione è nota come somma di una serie di potenze, è possibile derivarla e integrarla sotto tale forma.

Esempio 5.13. Sia $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} x^n.$$

Il raggio di convergenza di questa serie di potenze è 1, per il Teorema 5.10:

$$\lim_n \frac{\ln(n+1)}{n+1} \frac{n}{\ln(n)} = \lim_n \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_n \left[1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \right] = 1.$$

Si ha per ogni $x \in]-1, 1[$

$$Df(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^{n-1},$$

in particolare $Df(0) = 0$.

Esempio 5.14. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

In primo luogo calcoliamo

$$\lim_n \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \lim_n \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4},$$

dunque il raggio di convergenza è 4 (Teorema 5.10). Per $x = 4$ abbiamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n,$$

divergente per il Teorema 2.5 in quanto

$$\lim_n n \left[\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 4^{n+1}} - 1 \right] = \lim_n \frac{-n^2 - 1}{2n^2 + 4n + 2} = -\frac{1}{2}.$$

Per $x = -4$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n,$$

che non converge in quanto i suoi termini non tendono a 0. Pertanto, l'insieme di convergenza è $[-4, 4[$.

Esercizio 5.15. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}.$$

Esercizio 5.16. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}.$$

La funzione f è derivabile? In caso affermativo, quanto vale $Df(0)$?

Esercizio 5.17. Dimostrare il Teorema 5.10.

Esercizio 5.18. Applicare i Teoremi 5.9, 5.10 per dimostrare che il raggio di convergenza della serie geometrica è 1.

Esercizio 5.19. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(1+n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) x^n.$$

6. LA SERIE DI TAYLOR

In quest'ultima sezione affrontiamo il problema inverso rispetto a quello visto fin qui: data una funzione f , trovare una serie di potenze la cui somma sia $f(x)$. Lo strumento principale è un'estensione della formula di Taylor, introdotta in [3].

Definizione 6.1. Siano $f \in C^\infty(I)$, $x_0 \in I$. La serie di Taylor di f centrata in x_0 è la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Se $x_0 = 0$, essa è detta serie di Maclaurin.

Chiaramente la serie di Taylor converge in x_0 con somma $f(x_0)$.

Definizione 6.2. Una funzione $f \in C^\infty(I)$ è detta analitica in $x_0 \in I$ se

- (i) la serie di Taylor di f centrata in x_0 ha raggio di convergenza $R \in]0, +\infty]$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x)$ per ogni $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

Inoltre, f è detta analitica in I se lo è in ogni punto di I .

Dall'Esempio 5.11 sappiamo che la funzione $x \mapsto e^x$ è analitica in \mathbb{R} . Tuttavia, la sola regolarità C^∞ non è sufficiente a garantire l'analiticità di una funzione.

Esempio 6.3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e in particolare $D^n f(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Tuttavia f non è analitica in 0, in quanto la sua serie di Maclaurin converge a 0 in ogni punto di \mathbb{R} , verificando la condizione (i) ma violando (ii).

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente per l'analiticità di una funzione:

Lemma 6.4. Siano $f \in C^\infty(I)$, $M, L > 0$ t.c. $|D^n f(x)| \leq ML^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$. Allora f è analitica in I .

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in I$ e verifichiamo le condizioni della Definizione 6.2. Per ogni $x \in I$, $|x - x_0| \leq \frac{1}{L}$ si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{D^n f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{M}{n!},$$

e il secondo membro è il termine generale di una serie convergente. Pertanto il raggio di convergenza della serie di Taylor di f in x_0 è $R \geq \frac{1}{L}$ e (i) è soddisfatta.

Fissiamo ora $x \in I$, $0 < |x - x_0| < R$. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange (ved. [3]), per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\tilde{x} \in I$ t.c.

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{D^n f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| &= \left| \frac{D^{k+1} f(\tilde{x})}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \right| \\ &\leq \frac{M(LR)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x),$$

così che (ii) è soddisfatta. □

Esempio 6.5. La serie di Maclaurin della funzione $x \mapsto \sin(x)$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

e poiché

$$\lim_n \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{(-1)^n} = 0,$$

il suo raggio di convergenza è $+\infty$. Inoltre, per il Lemma 6.4 la funzione è analitica in \mathbb{R} . Pertanto si può scrivere, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Similmente si dimostra la formula

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Osserviamo che, derivando termine a termine la serie di Maclaurin di $\sin(x)$, si ottiene quella di $\cos(x)$, in accordo col Teorema 5.7 e con l'identità $D \sin(x) = \cos(x)$.

Esempio 6.6. Consideriamo la funzione $x \mapsto \ln(1+x)$. Per il Lemma 6.4 essa è analitica. La serie di Maclaurin è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

e dal Teorema 5.10 risulta che il suo raggio di convergenza è 1. Pertanto si ha, per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

inoltre la serie risulta convergente per $x = 1$ e divergente per $x = -1$ (in accordo con l'identità precedente).

Identità come quelle ottenute negli esempi precedenti sono dette *sviluppi in serie di Taylor* (o di Maclaurin) per le funzioni elementari. Tali sviluppi rendono le funzioni trascendenti (esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche...) calcolabili con approssimazione arbitraria mediante un algoritmo che richiede solo l'esecuzione di somme e prodotti. Inoltre, alcune funzioni che *non ammettono* un'espressione mediante le funzioni elementari, come quelle viste in [4], possono essere rappresentate (e calcolate) mediante sviluppi in serie.

Esempio 6.7. La *funzione degli errori di Gauß* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $Df(x) = e^{-x^2}$. Quest'ultima funzione è analitica e il suo sviluppo in serie di Maclaurin si deduce da quello dell'Esempio 5.11:

$$Df(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}.$$

Integrando termine a termine, per il Teorema 5.6 si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

Esempio 6.8. La *funzione seno integrale* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Anche in questo caso, lo sviluppo in serie della derivata segue dall'Esempio 6.5:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Integrando termine a termine si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

La serie di Taylor si può usare per (ri)-dimostrare alcune note identità relative alle funzioni analitiche. Per esempio

$$(6.1) \quad e^x \cdot e^y = e^{x+y} \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Il prodotto secondo Cauchy delle serie di Maclaurin di e^x , e^y ha termine generale

$$c_n = \sum_{h=0}^n \frac{x^h}{h!} \frac{y^{n-h}}{(n-h)!} = \frac{1}{n!} \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} x^h y^{n-h} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Inoltre, per il Teorema 3.12 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge e ha per somma il prodotto $e^x \cdot e^y$, da cui (6.1).

Osservazione 6.9. La serie di Taylor (che, in quanto serie di potenze, è definita in modo naturale in \mathbb{C} come in \mathbb{R} , ved. [1]) rappresenta anche un utile strumento per estendere le funzioni elementari al campo complesso, senza rinunciare alle loro proprietà fondamentali. Per esempio, per ogni $z \in \mathbb{C}$ poniamo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}.$$

Con questa espressione è agevole dimostrare la *formula di Eulero*:

$$(6.2) \quad e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, sviluppando le funzioni nel punto $z = ix$, si ha

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x), \end{aligned}$$

da cui (6.2) (per un'esposizione completa di questo argomento, ved. [6]). In particolare si ha

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esercizio 6.10. Scrivere lo sviluppo in serie di Maclaurin della funzione $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ e stabilire se essa è analitica.

Esercizio 6.11. Scrivere gli sviluppi in serie di Maclaurin per le funzioni $\sinh(x)$, $\cosh(x)$. Quindi verificare, mediante tali sviluppi, che

$$D \sinh(x) = \cosh(x), \quad D \cosh(x) = \sinh(x).$$

Esercizio 6.12. Usando gli sviluppi in serie di Maclaurin delle funzioni $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, dimostrare che per ogni $x \in]0, 1[$

$$\ln(1-x^2) = \ln(1+x) + \ln(1-x).$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. IANNIZZOTTO, Insiemi numerici.
- [2] A. IANNIZZOTTO, Limiti e continuità.
- [3] A. IANNIZZOTTO, Calcolo differenziale.
- [4] A. IANNIZZOTTO, Calcolo integrale.
- [5] A. IANNIZZOTTO, Equazioni differenziali ordinarie.
- [6] C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica 1, Zanichelli (2015).
- [7] C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica 2, Zanichelli (2016).

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
VIA OSPEDALE 72, 09124, CAGLIARI, ITALY
E-mail address: `antonio.iannizzotto@unica.it`