Problema 1.

Sia $f : A \to B$ una funzione, e siano $S, T \subseteq A$. Si provi che

(1) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

(2) Se f è iniettiva allora $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$

Problema 2.

Dato un intero $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione

$$n \mapsto \begin{cases} n\,p & \text{se } p \text{ non divide } n \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, per quali valori di p la funzione f è iniettiva e/o suriettiva.

Problema 3.

Usando il principio di induzione mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ è divisibile per 6.

Problema 4.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = \dfrac{1 + iz}{iz + i}$.

- Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ per cui $f(z) = z$
- Determinare, nella forma $a + ib$, tutti i numeri complessi dell'insieme $f^{-1}(3 + i)$

Problema 5.

Sia $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 17, 30, 60, 90\}$ con la relazione d'ordine definita da: aRb se e solo se $a \mid b$. Sia $S = \{2, 3, 5, 6\} \subset D$.

(a) Determinare tutti i maggioranti e tutti i minoranti di S in D.

(b) Determinare, se esistono, $\inf(S)$, $\sup(S), \max(S), \min(S)$.

(c) Determinare tutte le catene di D con almeno 5 elementi.

Problema 6.

Determinare tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 28x \equiv_5 32 \\ 20x \equiv_7 25 \end{cases}$$