UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
(Classe LM-40 Matematica)

# La trasformazione di Fourier e la trasformazione di Laplace

**Dispense per il corso di Analisi superiore 1**
**A.A. 2020/2021**
**Docente: Claudia Anedda**

# Indice

# Capitolo 1

# La trasformazione di Fourier

La trasformazione di Fourier è un operatore lineare (di tipo integrale) che, a una funzione di variabile reale e a valori reali o complessi, associa una funzione a valori reali o a valori complessi.
Essa trova molte applicazioni in fisica e ingegneria, soprattutto in elettronica nella teoria dei segnali, dato che permette di decomporre una funzione del tempo (un segnale) in termini di frequenze; viene spesso usata per risolvere equazioni differenziali lineari.

## 1.1 La trasformazione di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

**Definizione 1.1.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $f$ si dice **trasformabile secondo Fourier** (o **Fourier-trasformabile**) se l'integrale*

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{+k} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$[1]

*(detto **integrale di Fourier** di $f$) è convergente per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Facciamo una piccola digressione su

**L'integrale in valore principale.**
Diamo la definizione di **integrale "a valore principale"**, o **integrale "di Cauchy"**, o **valore principale di Cauchy**; grazie alla definizione

[1] V.P. sta per "valore principale".

di valore principale si riesce ad assegnare un valore ad alcuni integrali generalizzati che non sarebbero definiti.

*Valore principale di Cauchy di un integrale finito di una funzione $f$ attorno a un punto $x_0$.*
Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, consideriamo l'integrale (di Riemann) $\int_a^b f(x)\,dx$; sappiamo che, se la funzione integranda $f(x)$ ha una singolarità in un punto $x_0 \in (a, b)$ (cioé non è definita in $x_0$ oppure il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ da destra o da sinistra è $\pm\infty$), allora si definisce l'integrale generalizzato (o improprio) di $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ come[2]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0^+} \int_{x_0+\eta}^b f(x)\,dx.$$

Può succedere che questo limite non esista; se, invece, esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0^+} \int_{x_0+\eta}^b f(x)\,dx\right],$$

esso è detto **valore principale dell'integrale secondo Cauchy** o anche **integrale in valore principale**.
Quindi, data una funzione $f : [a, b] \smallsetminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, si dice che essa è integrabile in $[a, b]$ nel *senso del valore principale* (o *nel senso di Cauchy*) se e solo se essa è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo del tipo $[a, x_0 - \varepsilon]$ e $[x_0 + \varepsilon, b]$ (con $\varepsilon > 0$ "piccolo") e se esiste finito il limite scritto sopra, che viene indicato con

$$V.P. \int_a^b f(x)\,dx$$

(*integrale a valore principale di $f$ esteso all'intervallo* $[a, b]$)[3].

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, si dice che $f$ è integrabile in $(a, b)$ in valore principale (o nel senso di Cauchy ) se è integrabile secondo

[2]Ricordiamo come si definisce l'integrale di funzioni non limitate: per $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ si definisce $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx$ e per $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ si definisce $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

[3]Esistono anche altre notazioni, per esempio $p.v.$ o semplicemente $\mathcal{P}$.

Riemann in ogni intervallo del tipo $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ (con $\varepsilon > 0$ “piccolo”) e se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

e, in tal caso, si ha che l'integrale in valore principale di $f$ esteso ad $(a, b)$ è dato da

$$V.P. \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

*Valore principale di Cauchy di un integrale doppiamente infinito di una funzione $f$.*
Analogamente si definisce il valore principale secondo Cauchy dell'integrale di $f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$: si dice che $f$ è integrabile in $\mathbb{R}$ nel senso del valore principale (o nel senso di Cauchy) se essa è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo del tipo $[-R, R]$ (con $R > 0$) e se esiste finito il limite

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

In tal caso, tale limite è detto *integrale a valore principale di $f$ esteso ad* $\mathbb{R}$ e viene indicato da

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

I valori principali di Cauchy sono importanti nella teoria delle distribuzioni (o funzioni generalizzate), dove essi sono utilizzati per estendere alcuni risultati validi nello spazio $L^2(\mathbb{R})$ allo spazio $L^1(\mathbb{R})$; inoltre, appunto, essi spesso sono chiamati semplicemente “valori principali” nonostante non siano collegati ai valori principali dell'analisi complessa.

Torniamo ora alla trasformazione di Fourier. Osserviamo che una condizione sufficiente di trasformabilità è che $f \in L^1(\mathbb{R})$ (e, in tal caso, l'integrale in valore principale coincide con l'integrale improprio). Infatti, dal fatto che $|e^{-i\omega t}| = 1 \ \forall \omega, t \in \mathbb{R}$, si ha

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t)e^{-i\omega t} \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \quad (1.1)$$[4]

Diamo dunque la definizione di trasformata di Fourier per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$.

**Definizione 1.2.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; la funzione $\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)$ (da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$) definita da*

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

*è detta **trasformata di Fourier** di $f$.*[5]

D'ora in avanti consideriamo funzioni nello spazio $L^1(\mathbb{R})$.[6]

## 1.2 Proprietà della trasformata di Fourier

**Proprietà 1.1.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora:*
*i) se $f$ è a valori reali e pari, allora $\widehat{f}$ è a valori reali e pari;*
*ii) se $f$ è a valori reali e dispari, allora $\widehat{f}$ è a valori immaginari puri e dispari.*

*Dimostrazione.* i) Si ha, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ (osserviamo che, se $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, anche $f(t)\sin(\omega t) \in L^1(\mathbb{R})$),

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt$$

[4] D'ora in avanti denotiamo la norma in $L^1(\mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_1$.

[5] Il nome deriva dal matematico e fisico francese **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830), suo teorizzatore. I simboli più comunemente usati sono $\mathcal{F}[f]$ e $\widehat{f}$, ma soprattutto nei testi applicativi sono utilizzate anche altre notazioni (la più frequente indica le funzioni trasformabili con le lettere minuscole e le loro trasformate con le rispettive lettere maiuscole).

[6] Si può dare una definizione analoga anche per funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x})e^{-i<\omega,\mathbf{x}>}\, d\mathbf{x}, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N,$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $<\omega, \mathbf{x}> = \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i$ è il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^N$.

$$= 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt;$$

in particolare, si ha $\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$.

ii) Si ha, $\forall\omega \in \mathbb{R}$ (anche $f(t)\cos(\omega t) \in L^1(\mathbb{R})$),

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt$$

$$= -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt;$$

□

**Proprietà 1.2.** *La trasformazione di Fourier è un operatore lineare continuo* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$.

*Dimostrazione.* Innanzi tutto, l'operatore $\mathcal{F}$ è ben definito: dalla (1.1) segue che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\,\omega \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}[f] \in L^\infty(\mathbb{R})$ e si ha

$$\|\mathcal{F}[f(t)](\omega)\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega\in\mathbb{R}}\,|\mathcal{F}[f(t)](\omega)| \le \|f\|_1. \tag{1.2}$$

Inoltre, dalla linearità dell'integrale segue che, $\forall\, f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g].$$

La continuità dell'operatore $\mathcal{F}$ segue dalla (1.2). □

La Proprietà 1.2 afferma che l'operatore $\mathcal{F}$ trasforma la convergenza in media integrale[7] in convergenza uniforme q.o.: se $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$, dal fatto che

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_\infty = \text{ ess sup}_{\omega\in\mathbb{R}}|\widehat{f_n} - \widehat{f}| = \text{ ess sup}_{\omega\in\mathbb{R}}|\widehat{(f_n - f)}| \le \|f_n - f\|_1,$$

segue che $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ per $n \to \infty$.

La trasformazione di Fourier ha anche un effetto "regolarizzante" sulle funzioni integrabili (mostriamolo con un esempio).

[7] Ricordiamo che la convergenza negli spazi $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p \le \infty$, è chiamata anche *convergenza in media di ordine* $p$; in questo caso $p = 1$ e si ottiene la convergenza in media (integrale).

**Esempio 1.1.** *Consideriamo la funzione caratteristica* $\chi_{[a,b]}(t)$, *$a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$; la sua trasformata è*

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[a,b]}(t)\right](\omega) = \begin{cases} b-a & se\ \omega = 0 \\ \dfrac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega} & se\ \omega \neq 0 \end{cases},$$

*che è una funzione continua.*
*In particolare, considerando un intervallo simmetrico $[-c, c]$, $c > 0$, si trova che la trasformata dell'*impulso relativo a $[-c, c]$ *è*

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[-c,c]}(t)\right](\omega) = \frac{2\sin(\omega c)}{\omega}.$$

*In questo caso possiamo non distinguere il caso $\omega \neq 0$ e $\omega = 0$: dato che $\lim_{\omega\to 0} \dfrac{2\sin(\omega c)}{\omega} = 2c$ consideriamo la funzione estesa per continuità nell'origine.*

**Esempio 1.2.** *Calcoliamo la trasformata della funzione $f(t) = e^{-|t|}$; sfruttando il fatto che la funzione è pari si ha*

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{1+\omega^2}$$

*che è una funzione di classe $C^1$.*
*Osserviamo che in questo caso si ha*

$$\|\widehat{f}(\omega)\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{2}{1+\omega^2} = 2$$

*e*

$$\|f(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 2,$$

*cioé nella* (1.2) *vale l'uguale.*
*Più in generale, se $f(t) = e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, si ha*

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

**Proprietà 1.3.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\widehat{f}$ è continua.*

*Dimostrazione.* Fissati $\omega$, $h \in \mathbb{R}$, calcoliamo il

$$\lim_{h\to 0} \widehat{f}(\omega + h) = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\omega+h)t}\,dt; \tag{1.3}$$

osserviamo che la funzione integranda è misurabile; inoltre

$$\lim_{h\to 0} f(t)e^{-i(\omega+h)t} = f(t)e^{-i\omega t} \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}$$

e

$$|f(t)e^{-i\omega t}| \leq |f(t)| \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

e $|f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, per il Teorema della convergenza dominata,[8] nella (1.3) si può passare al limite sotto il segno di integrale e risulta

$$\lim_{h\to 0} \widehat{f}(\omega+h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0} f(t)e^{-i(\omega+h)t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \widehat{f}(\omega).$$

□

Dalla Proprietà 1.3 segue che, in effetti, l'operatore $\mathcal{F}$ trasforma la convergenza in media integrale in convergenza uniforme:[9]

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\widehat{f_n} - \widehat{f}| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}}|(f_n - f)\widehat{\ }| \leq \|f_n - f\|_1.$$

Da quanto visto segue che la trasformata $\widehat{f}$ di una funzione $f$ che sta in $L^1(\mathbb{R})$ non sarà necessariamente una funzione in $L^1(\mathbb{R})$; il *Teorema di inversione* (che vedremo nel seguito), però, permette di esprimere $f$ in termini di $\widehat{f}$ se è noto che anche $\widehat{f}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$.

**Proprietà 1.4** (Teorema di Riemann-Lebesgue)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\widehat{f}$ è infinitesima all'infinito, cioè*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

[8] Spesso viene chiamato Teorema di Lebesgue, che di solito è enunciato per una successione di funzioni integrabili, la sua versione "continua" (si veda, per esempio, [1], pag. 281.):
*Sia $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, dove $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ sono intervalli, tale che*
*i) $\forall\, y \in Y$ fissato, la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è misurabile in $X$;*
*ii) esiste una funzione $h(x) \in L^1(X)$ tale che, $\forall\, y \in Y$ si abbia $|f(x,y)| \leq h(x)$ q.o. in $X$;*
*iii) $\forall\, y_0 \in Y$ fissato si abbia $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = f(x,y_0)$ q.o. su $X$.*
*Allora l'integrale $\int_X f(x,y)\,dx$ esiste $\forall\, y \in Y$ e la funzione integrale $F(y) = \int_X f(x,y)\,dx$ è continua in $Y$, cioé si ha*

$$\lim_{y\to y_0} \int_X f(x,y)\,dx = \int_X \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

[9] Ricordiamo che per una funzione continua il sup coincide col sup essenziale.

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. La funzione $\tau \mapsto f(t-\tau)$ da $\mathbb{R}$ a $L^1(\mathbb{R})$ è continua.[10] Osserviamo inoltre che, $\forall\, \omega \neq 0$, si ha

$$e^{-i\omega\left(\tau+\frac{\pi}{\omega}\right)} = -e^{i\omega\tau}.$$

Nella trasformata di Fourier di $f$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{1.4}$$

operiamo allora la sostituzione $t = \tau + \frac{\pi}{\omega}$ ; si ottiene

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} -f\Big(\tau + \frac{\pi}{\omega}\Big) e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \tag{1.5}$$

Sommando membro a membro le (1.4) e (1.5) si ottiene

$$2\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \Big[f(\tau) - f\Big(\tau + \frac{\pi}{\omega}\Big)\Big]\, d\tau,$$

da cui

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\omega)| &= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \Big[f(\tau) - f\Big(\tau + \frac{\pi}{\omega}\Big)\Big]\, d\tau\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big|f(\tau) - f\Big(\tau + \frac{\pi}{\omega}\Big)\Big|\, d\tau.\end{aligned}$$

Passando al limite per $\omega \to \pm\infty$ e usando la continuità per traslazioni in $L^1$ si ha la tesi.[11] □

Dal Teorema di Riemann-Lebesgue e dalla formula di Eulero segue il

**Corollario 1.5.** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt = 0 \quad e \quad \lim_{\omega\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = 0.$$

Il Corollario 1.5 afferma che le funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ convergono a zero in $L^\infty(\mathbb{R})$ per $|\omega| \to \infty$ nella topologia debole*.

[10] Ricordiamo che per le funzioni $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, vale la cosiddetta *continuità in media*, cioé l'operatore di traslazione $\tau_h f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ fissato, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, è continuo: $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})\|_p = 0$.

[11] Una dimostrazione alternativa è fornita in [3].
In molte dimostrazioni del Teorema di Riemann-Legesgue si usa il fatto che lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni infinitamente derivabili con continuità in $\mathbb{R}^N$ a supporto compatto è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

**Proprietà 1.6.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora valgono le seguenti proprietà:*
*i)* $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \dfrac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ *(proprietà di riscalamento o formula del cambiamento di scala);*
*ii)* $\mathcal{F}[\overline{f(t)}](\omega) = \overline{\widehat{f}(-\omega)}$ *(proprietà di coniugio);*
*iii)* $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega a}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$ *(proprietà di traslazione nel tempo o formula del ritardo);*
*iv)* $\mathcal{F}[f(t)e^{iat}](\omega) = \widehat{f}(\omega - a)$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$ *(proprietà di traslazione della frequenza o proprietà di modulazione).*

*Dimostrazione.* i) Si ha

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t}\,dt;$$

posto $at = \tau$, l'integrale diventa

$$\mathcal{F}[f(\tau)](\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\frac{\tau}{a}}\,d\tau & \text{se } a > 0 \\ \dfrac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-i\omega\frac{\tau}{a}}\,d\tau & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

cioé

$$\mathcal{F}[f(\tau)](\omega) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau}\,d\tau,$$

da cui la tesi.

ii) Si ha

$$\mathcal{F}[\overline{f(t)}](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)e^{i\omega t}}\,dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt} = \overline{\widehat{f}(-\omega)}.$$

iii) Si ha

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-i\omega t}\,dt;$$

posto $t - a = \tau$ si ha

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega(\tau+a)}\,d\tau = e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau,$$

da cui la tesi.

iv) Si ha

$$\mathcal{F}[f(t)e^{iat}](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iat}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\omega-a)t}\,dt,$$

da cui la tesi.

$\square$

Osserviamo che, in particolare, dalla proprietà *iii*) si ha $\mathcal{F}[f(t+a)+f(t-a)](\omega) = 2\widehat{f}(\omega)\cos(\omega a)\ \forall\, a \in \mathbb{R}$. Infatti dalla linearità dell'operatore $\mathcal{F}$ si ha

$$\mathcal{F}[f(t+a)+f(t-a)](\omega) = \mathcal{F}[f(t+a)](\omega) + \mathcal{F}[f(t-a)](\omega)$$

e, usando la *iii*):

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[f(t+a)+f(t-a)](\omega) = \widehat{f}(\omega)e^{i\omega a} + \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega a}\\ &= \widehat{f}(\omega)[\cos(\omega a) + i\sin(\omega a) + \cos(\omega a) - i\sin(\omega a)].\end{aligned}$$

**Esempio 1.3.** *Consideriamo la funzione dell'Esempio 1.1 con intervallo simmetrico e* $c = \frac{1}{2}$*; si ottiene la funzione* $f_1(t) = \chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(t)$*, detta* ***porta centrata unitaria****; invece la funzione* $f_\tau(t) = \chi_{\left[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right]}(t) = f_1\left(\frac{t}{\tau}\right)$ *è detta* ***porta centrata****; usando la proprietà di riscalamento con* $a = \dfrac{1}{\tau}$ *si ha*

$$\mathcal{F}\left[f_\tau(t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f_1\left(\frac{t}{\tau}\right)\right](\omega) = \tau\widehat{f}_1(\tau\omega) = 2\frac{\sin\frac{\tau\omega}{2}}{\omega},$$

$\tau > 0$.

**Esempio 1.4.** *Calcoliamo la trasformata di Fourier di* $f(t) = \chi_{[6,10]}(t)$*, che è una* ***porta decentrata*** *(di ampiezza 4 e centro 8); ci si può ricondurre a una porta centrata tramite una traslazione:* $f(t) = f_{\tau=4}(t-8)$.

*Usando la proprietà di traslazione nel tempo e il risultato dell'Esempio 1.1 (intervallo simmetrico con $c = 2$) si trova*

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f_4(t-8)\right](\omega) = e^{-8i\omega}\mathcal{F}[f_4(t)](\omega) = e^{-8i\omega}\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}.$$

**Esempio 1.5.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora anche $f(t)\cos t \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha, dalla linearità di $\mathcal{F}$ e dalla iv)*

$$\mathcal{F}[f(t)\cos t](\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\mathcal{F}[f(t)e^{it}](\omega) + \mathcal{F}[f(t)e^{-it}](\omega)\right\} = \frac{1}{2}\left[\widehat{f}(\omega+1) + \widehat{f}(\omega-1)\right].$$

**Proprietà 1.7** (Formula di moltiplicazione)**.** *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx.$$

*Dimostrazione.* Essendo $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ funzioni limitate, entrambi gli integrali esistono finiti. Applicando lo scambio dell'ordine di integrazione si trova

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\,dx\right)g(t)\,dt = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(t)e^{-itx}\,dx\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-itx}\,dt\right)f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx.$$

□

Osserviamo che nella formula precedente compare, come funzione integranda, il prodotto di una funzione trasformata per una non trasformata; non è quindi chiaro se la variabile dipendente rappresenti il tempo o la frequenza. Tale formula non ha in effetti un'interpretazione naturale in termini di segnali, ma è significativa dal punto di vista matematico.

## 1.3 Trasformazione di Fourier e derivazione

**Teorema 1.8** (Derivata della trasformata di Fourier)**.** *Siano* $f$, $tf \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora* $\widehat{f}$ *è derivabile e si ha*

$$\widehat{f}'(\omega) = -i\mathcal{F}[tf(t)](\omega).$$

*Dimostrazione.* Prima di tutto osserviamo che la funzione $\omega \mapsto f(t)e^{-i\omega t}$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$; inoltre

$$|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

e

$$\left| \frac{d}{d\omega} \left[ f(t)e^{-i\omega t} \right] \right| = \left| -itf(t)e^{-i\omega t} \right| = |tf(t)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Allora, applicando il Teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\widehat{f}'(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-i\omega t}\, dt = -i\mathcal{F}[tf(t)](\omega).$$

□

Iterando più volte la proprietà precedente (detta anche *proprietà di moltiplicazione per t*) si ottiene che: se $f$, $t^n f \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (-i)^n \mathcal{F}[t^n f(t)](\omega). \tag{1.6}$$

**Esempio 1.6.** *Calcoliamo la trasformata di Fourier di*

$$f(t) = \begin{cases} t & \textit{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \textit{altrimenti}; \end{cases}$$

*si ha* $f(t) = tf_2(t)$, *dove* $f_2(t)$ *è la porta centrata di ampiezza* $\tau = 2$. *Usando la formula* (1.6) *e il risultato dell'Esempio 1.3 riguardante la porta centrata si trova*

$$\mathcal{F}\left[tf_2(t)\right](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[f_2(t)\right](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right) = 2i\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}.$$

*Osserviamo che* $tf_2(t)$ *è una funzione a valori reali e dispari, e la sua trasformata è a valori immaginari puri e dispari.*

Vediamo ora che relazione c'è tra la derivata di una funzione e la sua trasformata di Fourier.

**Teorema 1.9** (Trasformata di Fourier della derivata)**.** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *continua con derivata continua a tratti*[12] *e* $f' \in L^1(\mathbb{R})$*. Allora si ha*

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega).$$

*Dimostrazione.* Fissato $\omega \in \mathbb{R}$, dalle ipotesi segue che $f(t)$ e $f(t)e^{-i\omega t}$ sono infinitesime per $t \to \pm\infty$;[13] quindi risulta

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = i\omega\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$

□

Iterando la proprietà precedente con ipotesi di sufficiente regolarità per $f$ ( $f,\, f', \dots, f^{(n-1)} \in L^1(\mathbb{R})$ continue e $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ e continua a tratti $\forall\, n, n \in \mathbb{N}$) si ha

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega). \tag{1.7}$$

Osserviamo che esistono funzioni $f(\omega)$ continue e limitate in $\mathbb{R}$, e infinitesime per $\omega \to \pm\infty$ che non sono trasformate di Fourier di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Risulta, cioé, che l'operatore

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \cap \{f : \lim_{\omega\to\pm\infty} f(\omega) = 0\}$$

non è suriettivo[14].

[12] Una funzione continua con derivata continua a tratti viene detta anche $C^1$ a tratti.

[13] Se, per assurdo, $f(t)$ non fosse infinitesima per $t \to \infty$, allora l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ (o $\int_{-\infty}^0 f(t)\, dt$) non sarebbe convergente (e così si ragiona anche $f(t)\cos(\omega t)$ e $f(t)\sin(\omega t)$). Per maggiori dettagli si veda, per esempio, [3], pag. 246.

[14] Essa è soltanto iniettiva, come verrà osservato più avanti.

**Esempio 1.7.** *Consideriamo la funzione*

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log t} & se\ t > e \\ \dfrac{x}{e} & se\ 0 \leq t \leq e \end{cases}$$

*tale che* $g(t) = -g(-t)$ *se* $t < 0$. *Essa è limitata e continua in* $\mathbb{R}$ *ed è infinitesima all'infinito (infatti si ha* $\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = 0$*), ma non é la trasformata di Fourier di nessuna funzione di* $L^1(\mathbb{R})$. *Infatti, da una parte si ha che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_e^n \frac{g(t)}{t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_e^n \frac{1}{t \log t}\, dt = \lim_{n\to\infty} [\log(\log n)] = +\infty; \quad (1.8)$$

*d'altra parte supponiamo ora per assurdo che esista una funzione* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *tale che* $\widehat{f} = g$. *Allora, essendo* $g$ *una funzione dispari, si avrebbe*

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

*e*

$$g(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt$$

*da cui, sommando membro a membro e usando la formula di Eulero si ricava*

$$g(\omega) = i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt.$$

*Posto* $F(t) = i[f(t) - f(-t)]$, *si ha* $\int_0^{+\infty} |F(t)|\, dt < \infty$; *inoltre*

$$\begin{aligned} g(\omega) &= i \int_{-\infty}^{0} f(t) \sin(\omega t)\, dt + i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt \\ &= -i \int_0^{+\infty} f(-t) \sin(\omega t)\, dt + i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt \\ &= \int_0^{\infty} F(t) \sin(\omega t)\, dt. \end{aligned}$$

*Osserviamo ora che, per* $n \in \mathbb{N}$ *(*$n \geq 3$*), utilizzando il Teorema di Fubini-Tonelli si ha*

$$\int_e^n \frac{g(\omega)}{\omega}\, d\omega = \int_e^n \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\infty} F(t) \sin(\omega t)\, dt = \int_0^{\infty} F(t)\, dt \int_e^n \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)\, d\omega$$

$$= \int_0^\infty F(t)\, dt \int_{et}^{nt} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega$$

*dove, nell'ultimo passaggio, è stato effettuato il cambiamento di variabili $\omega t = y$ (richiamando poi con $\omega$ la variabile di integrazione). Essendo $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leq M < \infty \;\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ e dato che il $\lim_{n\to\infty} \int_{et}^{nt} \frac{\sin x}{x}\, dx$ esiste finito $\forall\, t > 0$*[15] *allora, per il Teorema dell'assoluta continuità*[16] *si trova che il $\lim_{n\to\infty} \int_e^n \frac{g(\omega)}{\omega}\, d\omega$ esiste finito (che contraddice la (1.8)).*

## 1.4 Trasformata di Fourier e convoluzione

**Teorema 1.10.** *Siano $f$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\mathcal{F}[(f \star g)(t)](\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che la trasformata di $f \star g$ (dove $f \star g$ indica il prodotto di convoluzione tra $f$ e$g$) è ben definita, dato che $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$. Applicando il Teorema di Fubini e operando uno scambio dell'ordine di integrazione si ha

$$\mathcal{F}[(f \star g)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star g)(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s)\, ds \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) e^{-i\omega t}\, ds \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) e^{-i\omega(t-s)} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-i\omega s}\, ds \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-i\omega s}\, ds = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega),$$

dove, nel penultimo passaggio, è stata effettuata la sostituzione $t - s = y$. □

[15] Ricordiamo che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}^+$.

[16] Dato un insieme $\Omega$ misurabile e $f \in L^1(\Omega)$, allora $\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ tale che, $\forall\, A \subset \Omega$ con $|A| < \delta$ si abbia $\int_A |f| < \epsilon$.

## 1.5 L'anti-trasformazione di Fourier

Procedendo come per la trasformazione di Fourier, diamo la seguente

**Definizione 1.3.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $f$ si dice* ***anti-trasformabile secondo Fourier*** *(o* ***Fourier-anti-trasformabile****) se l'integrale*

$$\frac{V.P.}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{+k} f(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

*esiste finito per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

Anche in questo caso, dal fatto che $|e^{i\alpha}| = 1 \;\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, segue che le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ sono anti-trasformabili secondo Fourier. Quindi consideriamo funzioni in questo spazio, senza bisogno di considerare gli integrali in valore principale.

**Definizione 1.4.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; la funzione $t \mapsto \mathcal{F}^{-1}[f](t)$ (da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$) definita da*

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

*è detta* ***anti-trasformata di Fourier*** *o* ***trasformata inversa di Fourier*** *di $f$.*[17]

Per capire come si arriva all'inversione della trasformata di Fourier enunciamo il

**Teorema 1.11.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ continua a tratti con derivata continua a tratti. Allora si ha*

$$\frac{V.P.}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^{+k} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}.^{18}$$

[17] Alcuni testi chiamano la trasformata inversa anche **trasformata di Fourier aggiunta** (si veda, per esempio, [8]).

[18] $f(t^+)$ e $f(t^-)$ denotano, rispettivamente, i limiti $\lim_{x\to t^+} f(x)$ e $\lim_{x\to t^-} f(x)$ che, per ipotesi, esistono finiti. L'integrale a primo membro è in valore principale perché non è detto che $\widehat{f}$ sia in $L^1(\mathbb{R})$.

Osserviamo che, se $f$ è continua in $t$, $\dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$.

In generale, la trasformata di Fourier di una funzione integrabile in $\mathbb{R}$ (e dunque trasformabile) non sta in $L^1(\mathbb{R})$, come mostra il seguente

**Esempio 1.8.** *La funzione*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \textit{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{se } t < 0 \end{cases}$$

*sta in $L^1(\mathbb{R})$, ma la sua trasformata*

$$\widehat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega)}\, dt = \left[ -\frac{e^{-t(1+i\omega)}}{1+i\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+i\omega} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

Dall'ultimo teorema discende anche la **formula di dualità**, detta anche **formula di simmetria** o **formula di reciprocità**:

**Corollario 1.12.** *Siano $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e $f$ derivabile in $\mathbb{R}$. Allora, $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\mathcal{F}[\widehat{f}](\omega) = \mathcal{F}^2[f](\omega) = 2\pi f(-\omega).$$ [19]

*Dimostrazione.* La formula del Teorema 1.11 in questo caso diventa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = f(t),$$

cioé

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega;$$

scambiando i ruoli delle variabili $t$ e $\omega$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{i\omega t}\, dt = 2\pi f(\omega);$$

ora, mettendo $-\omega$ al posto di $\omega$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{-i\omega t}\, dt = 2\pi f(-\omega) = \mathcal{F}[\widehat{f}](\omega) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](\omega),$$

cioé la tesi. $\square$

[19] Possiamo esprimere la formula anche in maniera più esplicita: $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)](\omega)](t) = 2\pi f(-t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Talvolta essa è chiamata anche **formula di inversione**, ma è preferibile chiamare in tal modo la formula in cui compare l'operatore $\mathcal{F}^{-1}$.

Il Corollario 1.12, oltre che fornire una regola di calcolo, implica che l'operatore $\mathcal{F}$, se ristretto a un sottospazio di $L^1(\mathbb{R})$ in cui sono verificate le ipotesi, diventa un operatore iniettivo.
In realtà vale qualcosa di più forte: si può dimostrare che, se $f\,, g \in L^1(\mathbb{R})$ sono tali che $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$, allora $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}$, cioè $\mathcal{F}$ è iniettivo sull'intero $L^1(\mathbb{R})$ (e quindi possiamo considerare l'operatore inverso $\mathcal{F}^{-1}$).

Il seguente è chiamato **Teorema di inversione**:

**Teorema 1.13.** *Siano $f$, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora si ha*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t)](\omega)](t) &= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\omega)](t) = f(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \quad q.o.\ \ in\ \mathbb{R}.\end{aligned}$$ [20]

La formula di inversione mostra anche che, in realtà, il calcolo dell'antitrasformata si riduce a quello della trasformata.

Per la trasformata inversa di Fourier valgono proprietà analoghe a quelle della trasformata.

**Esempio 1.9.** *Consideriamo la* ***funzione di Gauss*** $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$*; si ha*

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-i\omega t}\,dt.$$

*Questo integrale non è calcolabile elementarmente. Sappiamo che la gaussiana è integrabile, quindi $f \in L^1(\mathbb{R})$; inoltre $f$ è di classe $C^\infty$, quindi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema della trasformata della derivata, dato che anche $f' \in L^1(\mathbb{R})$:*

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\,dt = [f(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

*Osserviamo che $f'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}} = -tf(t)$; sfruttando allora le proprietà della trasformata della derivata si ha, da una parte*

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right](\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$$

[20]Scritta in modo compatto: $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ nel senso di $L^1(\mathbb{R})$.

*e, dalla* (1.6) *(con* $n = 1$*) e dalla linearità di* $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right](\omega) = -\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = -i\widehat{f}'(\omega).$$

*Quindi risulta* $i\omega\widehat{f}(\omega) = -i\widehat{f}'(\omega)$*, da cui* $\widehat{f}'(\omega) + \omega\widehat{f}(\omega) = 0$*, che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea, la cui soluzione generale è*

$$\widehat{f}(\omega) = ce^{-\frac{\omega^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

*La trasformata di Fourier di* $f$ *coincide allora con la* $f$ *di partenza a meno di una costante moltiplicativa* $c$*:* $\widehat{f}(t) = cf(t)$ *(dove, a primo e secondo membro, abbiamo dato lo stesso nome alla variabile dipendente). Ora, applicando nuovamente la trasformazione di Fourier si ha*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f(t)](\omega)\big](t) &= \mathcal{F}\left[ce^{-\frac{\omega^2}{2}}\right](t)\\ &= \mathcal{F}[cf(\omega)](t) = c\mathcal{F}[f(\omega)](t) = c^2e^{-\frac{t^2}{2}} = c^2f(t).\end{aligned}$$

*Dal fatto che* $f(0) = 1$ *si ha*

$$\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f(t)](\omega)\big](0) = c^2.$$

*Inoltre, per la proprietà di simmetria (si veda il Corollario 1.12) si ha anche*

$$\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f(t)](\omega)\big](t) = 2\pi f(-t),$$

*da cui*

$$\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f(t)](\omega)\big](0) = 2\pi$$

*e, quindi,* $c^2 = 2\pi$*. Si ricava* $c = \sqrt{2\pi}$*, essendo*

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt > 0.$$

*In definitiva, si ha*

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right](\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

*espressione dalla quale si ricava, usando la definizione di trasformata con* $\omega = 0$*, la ben nota formula*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$ [21]

[21] La formula nota per tale integrale, detto *integrale d Gauss*, è solitamente espressa nella forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

*Più in generale, vale la*

$$\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \quad a > 0. \tag{1.9}$$

*Allo stesso risultato si può arrivare anche utilizzando l'integrazione complessa (per comodità prendiamo ora il caso* $a = 1$*): sia* $f(t) = e^{-t^2}$. *Allora*

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, e^{-i\omega t}\, dt = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+i\omega t+i^2\frac{\omega^2}{4})}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(t+i\frac{\omega}{2}\right)^2}\, dt. \tag{1.10}$$

*Posto* $f(z) = e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, *si ha che* $f(z)$ *è intera; allora, considerato il rettangolo* $\gamma$ *di vertici* $(\pm r, 0)$, $\left(\pm r, \frac{\omega}{2}\right)$, $r > 0$, *per il Teorema di Cauchy si ha* $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, *cioè*

$$\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\, dx + \int_0^{\frac{\omega}{2}} e^{-(r+iy)^2}\, dy + \int_r^{-r} e^{-\left(x+i\frac{\omega}{2}\right)^2}\, dx + \int_{\frac{\omega}{2}}^{0} e^{-(-r+iy)^2}\, dy = 0. \tag{1.11}$$

*Il secondo e il quarto termine a primo membro della* (1.11) *tendono a zero quando* $r \to +\infty$*; infatti si ha*

$$|e^{-(\pm r+iy)^2}| = |e^{-r^2 \mp 2iry + y^2}| = e^{y^2-r^2} \to 0$$

*uniformemente in* $\left[0, \frac{\omega}{2}\right]$. *Quindi, passando al limite per* $r \to +\infty$ *in* (1.11) *si trova*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(t+i\frac{\omega}{2}\right)^2}\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt.$$

*Ricordando che*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi},$$ [22]

*dalla* (1.10) *si ritrova la formula* (1.9) *con* $a = 1$.

[22] L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ è detto **integrale di Gauss**; esso fu calcolato per la prima volta da **Johann Friedrich Carl Gauss** (1777-1855) ed è alla base della *distribuzione (di probabilità) normale* (detta anche gaussiana); la funzione integranda, normalizzata in modo tale che il suo integrale in $\mathbb{R}$ sia pari a 1, è chiamata anch'essa funzione *gaussiana*.

**Esempio 1.10.** *Nell'Esempio 1.2 abbiamo calcolato la trasformata di Fourier della funzione* $f(t) = e^{-|t|}$*:* $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$*. Osserviamo che* $\widehat{f}(\omega)$ *è ancora integrabile:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+\omega^2}\, d\omega = [2\arctan\omega]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi,$$

*quindi calcoliamo la trasformata di* $g(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$*:*

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

*Questo integrale rientra nella tipologia di integrali che si possono calcolare utilizzando il Lemma di Jordan e il Teorema dei residui. Se* $\omega > 0$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\, e^{-i\omega t}\, dt &= -2\pi i Res\left(\frac{1}{1+z^2}\, e^{-i\omega z}\,; -i\right)\\ &= -2\pi i \left[\frac{e^{-i\omega z}}{2z}\right]_{z=-i} = \pi e^{-\omega}.\end{aligned}$$

*Se* $\omega < 0$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\, e^{-i\omega t}\, dt &= 2\pi i Res\left(\frac{1}{1+z^2}\, e^{-i\omega z}\,; i\right)\\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{-i\omega z}}{2z}\right]_{z=i} = \pi e^{\omega}.\end{aligned}$$

*Se* $\omega = 0$*, come già calcolato prima, si trova* $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi$*. Riassumendo, si ha*

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \begin{cases} 2\pi e^{-\omega} & se\ \omega > 0 \\ 2\pi & se\ \omega = 0 \\ 2\pi e^{\omega} & se\ \omega < 0 \end{cases} = 2\pi e^{-|\omega|},$$

*cioé*

$$\mathcal{F}[\widehat{f}(t)](\omega) = \mathcal{F}^2[f(t)](\omega) = 2\pi f(-\omega),$$

*che non è altro che la formula di simmetria.*
*Più in generale, se* $g(t) = \dfrac{1}{t^2+a^2}$ *si ha* $\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \dfrac{\pi}{a} e^{-|\omega| a}$.

L'importanza della trasformazione di Fourier (e della trasformazione inversa di Fourier, oltre che delle serie di Fourier) è data dal fatto che essa permette di rappresentare un dato fenomeno in termini di frequenze e ampiezze a partire dalla sua descrizione in termini di spazio-tempo.

Ricordiamo che, data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\tau$-periodica e continua a tratti, la serie di Fourier associata a $f$ è data da

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\tau} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau} t\right),$$

dove

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{\tau} t\right) dt \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau} t\right) dt$$

sono detti *coefficienti di Fourier* di $f$. Tale serie converge $\forall\, t \in \mathbb{R}$ con somma $s(t) = \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ se $f$ soddisfa determinate ipotesi,[23] in particolare se $f$ ha derivata continua a tratti. Analogamente, si può considerare la serie di Fourier in campo complesso

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{i \frac{2\pi n}{\tau} t},$$

dove i coefficienti sono dati da

$$\gamma_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{\tau} t}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}.^{24}$$

Il numero $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{\tau}$ è detto **frequenza fondamentale** o **pulsazione** di $f$, mentre il reciproco del periodo $\dfrac{1}{\tau}$ è detta **frequenza**. Allora la serie di Fourier di $f$ può essere interpretata come la scomposizione di un "segnale"[25] periodico (in questo caso una funzione $f$ continua e di periodo $\tau$) nelle frequenze $n\omega_0$ multiple della frequenza fondamentale

[23] Si veda, per esempio, [3], Capitolo 3.

[24] La relazione che lega i coefficienti di Fourier in forma reale e in forma complessa è la seguente: $a_0 = 2\gamma_0, \quad a_n = \gamma_n + \gamma_{-n}, \quad b_n = i(\gamma_n - \gamma_{-n}), \quad n = 1, 2, \ldots$

[25] Nella cosiddetta "teoria dei segnali", un segnale è una funzione di una o più variabili, che rappresenta una variazione dello stato fisico di un sistema o di una grandezza fisica; per esempio, il suono è un segnale monodimensionale (ampiezza in funzione del tempo

(dette anche **armoniche**[26]). Un segnale continuo e periodico risulta allora completamente determinato dalla sua scomposizione in frequenza, cioé dal valore dei coefficienti $a_n$ e $b_n$ che misurano i contributi della frequenza $n$-esima. Quindi a un segnale continuo e periodico si può associare la sua rappresentazione "in frequenza" (cioé in serie di Fourier) e ricostruirlo a partire da quest'ultima.

È allora abbastanza naturale domandarsi se sia possibile rappresentare "in frequenza" e ricostruire un segnale NON periodico. Il candidato naturale per una tale rappresentazione è legato proprio alla trasformata di Fourier (precisamente, esso è dato dall'anti-trasformata di Fourier). Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ma non è periodica, essa è comunque sviluppabile in serie di Fourier trigonometriche in ogni intervallo $\left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$ e, dunque, $\forall\, t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$ si ha

$$
\begin{aligned}
f(t) = {} & \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)\, dt \\
& + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}t\right)\, dt\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}t\right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}t\right)\, dt\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}t\right).
\end{aligned}
$$

Quindi, data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) integrabile e un numero reale $\tau > 0$, considerando la restrizione di $f$ all'intervallo $\left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$ e prolungando poi tale restrizione a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (di periodo $\tau$), si ha che tale estensione $f_\tau$ ha, come serie di Fourier associata, la

$t$), un'immagine, come una fotografia, è un segnale bidimensionale (luminosità e colore in funzione delle coordinate spaziali $(x, y)$), una sequenza video, come un filmato, è un segnale tridimensionale (luminosità e colore in funzione delle coordinate spaziali e del tempo $(x, y, t)$). Un segnale serve per rappresentare e per trasmettere un'informazione a distanza. In elettronica un segnale viene studiato attraverso un modello matematico o una funzione in cui il tempo (o il suo inverso, la frequenza) è la variabile indipendente.

[26] L'operazione di scomporre una funzione periodica come somma di funzioni periodiche semplici è chiamata *analisi armonica*; il primo termine della somma (in questo caso $a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$) è detta *prima armonica* o *armonica fondamentale*; il termine $n$-esimo è chiamato *armonica $n$-esima*.

seguente

$$f_\tau(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega_\tau t},$$

con $\omega_\tau = \dfrac{2\pi}{\tau}$ (e quindi $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega_\tau}{2\pi}$), cioé (sfruttando l'espressione dei coefficienti)

$$f_\tau(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_\tau \left( \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f_\tau(t) e^{-in\omega_\tau t}\, dt \right) e^{in\omega_\tau t}. \tag{1.12}$$

Pensando la successione $\{n\omega_\tau\}_{n\in\mathbb{Z}}$ come una suddivisione di $\mathbb{R}$ in intervalli di ampiezza $\omega_\tau$ e osservando che $\omega_\tau \to 0^+$ quando $\tau \to +\infty$, la periodicità di $f$ perde significato e se $f$ è abbastanza regolare la parte a destra della (1.12) può essere interpretata come un'approssimazione dell'integrale (cioé, la trasformata di Fourier può essere pensata come caso limite della serie di Fourier quando il periodo tende a infinito, quasi una sorta di suo "analogo continuo"), cioé si ha

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right) e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{1.13}$$

dove si è posto $n\omega_\tau = \omega$; la (1.13), dunque, non è altro che una forma euristica della formula di inversione.
La formula

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(t-x)}\, dt$$

è detta anche **formula integrale di Fourier** per $f$.

In seguito a tali considerazioni si capisce meglio come mai alcuni testi (per esempio [8] e, in generale, i testi di teoria dei segnali) usino una definizione alternativa di trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i\omega t}\, dt.$$

In realtà esiste anche un'altra definizione alternativa (che rende più semplice la formula di inversione e anche la cosiddetta indentità di Plancherel, che vedremo nel seguito):

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

La formula di inversione nella forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

(per funzioni sufficientemente regolari per cui valga l'uguale $\forall\, t \in \mathbb{R}$) rappresenta il segnale $f$ come media pesata delle sue componenti armoniche $t \mapsto \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t}$: risulta che $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ $\widehat{f}(\omega)$ è l'ampiezza della componente di frequenza $\omega$. Allora il segnale può essere rappresentato equivalentemente specificando i valori puntuali $f(t)$ oppure fornendone lo spettro $\widehat{f}(\omega)$; gli operatori $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ possono essere interpretati, rispettivamente, come *analisi* (del segnale nello spazio delle frequenze) e *sintesi* (nell'asse dei tempi).

## 1.6 Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Vogliamo ora estendere l'operatore $\mathcal{F}$ da funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ a funzioni nello spazio $L^2(\mathbb{R})$ (in tal caso, dato che $f(t)e^{-i\omega t}$ non è in generale integrabile se $f \in L^2(\mathbb{R})$, gli integrali saranno intesi in valore principale).

Prima di far ciò introduciamo lo **spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$**[27] **delle funzioni rapidamente decrescenti** o **a decrescenza rapida** definito come

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ e } \forall\, h, k \in \mathbb{N}\ \exists\, C_{h,k} > 0 \\ \text{t.c. } |t^h f^{(k)}(t)| \leq C_{h,k}\ \forall\, t \in \mathbb{R} \Big\}$$

e chiamato **spazio di Schwartz**.[28] Le funzioni appartenenti allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vengono chiamate "rapidamente decrescenti" perché, per definizione, $f$ (e una sua qualunque derivata) è tale che $|f^{(k)}(t)| \leq \frac{C_{h,k}}{|t|^h}$, quindi per $t$ che tende a infinito essa tende a zero più velocemente di una qualunque potenza di $t$.
Osserviamo che $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale (complesso); inoltre, se

[27] Si può definire, analogamente, anche lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ tali che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ multi-indici, esiste $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} |\mathbf{x}^\alpha D^\beta f(\mathbf{x})| < C_{\alpha,\beta}$.

[28] Dal nome del matematico francese **Laurent Schwartz** (1915-2002).

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, segue dalla regola di Leibniz che anche $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; evidentemente, $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Si ha $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})\ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$; il caso $p = \infty$ è immediato: se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora $f \in L^\infty(\mathbb{R})$; infatti, se $h = k = 0$, dalla definizione di spazio di Schwartz esiste $C_{00} > 0$ tale che $|f(t)| \leq C_{00}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
Mostriamo ora che, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora $f \in L^1(\mathbb{R})$; infatti, se $h = n$ (con $n > 1$) e $k = 0$, si ha $|t^n f(t)| \leq C_{n0}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, cioè $|f(t)| \leq \dfrac{C_{n0}}{|t|^n}$.
Allora

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \int_{|t|\leq 1} |f(t)|\, dt + \int_{|t|>1} |f(t)|\, dt \leq 2C_{00} + C_{n0} \int_{|t|>1} \frac{dt}{|t|^n},$$

e l'ultimo integrale è convergente per $n > 1$.
Osserviamo poi che se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, anche le derivate di un qualunque ordine di $f$ stanno in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (e quindi in $L^1(\mathbb{R})$), e dunque tutte le derivate di $f$ sono trasformabili. Inoltre, anche $t^n f(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ \forall\, n$, quindi $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, e quindi la trasformata di $f$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.
Risulta allora che, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, anche $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: infatti abbiamo già mostrato che $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$; mostriamo ora che, per $t \to \infty$, essa tende a zero più velocemente di qualunque polinomio: usando le (1.6) e (1.7) si trova

$$\begin{aligned} |\omega^h \widehat{f}^{(k)}(\omega)| &= |\omega^h (-i)^k \mathcal{F}[t^k f(t)](\omega)| = |\omega^h \mathcal{F}[t^k f(t)](\omega)| \\ &= |(i\omega)^h \mathcal{F}[t^k f(t)](\omega)| = \left| \mathcal{F}\left[\frac{d^h}{dt^h}[t^k f(t)]\right](\omega)\right|; \end{aligned}$$

passando al sup essenziale (che in questo caso coincide col sup) in $\omega \in \mathbb{R}$ a primo e ultimo membro si trova

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\omega^h \widehat{f}^{(k)}(\omega)| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}[g(t)](\omega)| = \|\mathcal{F}[g(t)](\omega)\|_\infty \leq \|g(t)\|_1 = C_{h,k}$$

(dove si è posto $g(t) = \dfrac{d^h}{dt^h}[t^k f(t)]$), da cui segue che $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Concludendo, data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e inoltre $\widehat{f}$ può essere derivata e trasformata infinite volte. In particolare, quindi, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora per $f$ vale la formula di inversione.

Vale il seguente

**Teorema 1.14.** *Data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è possibile associare a $f$ una funzione $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dove $\mathcal{F}[f]$ è la trasformazione di Fourier di $f$. Inoltre, l'operatore $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è una bigezione.*[29]

**Lemma 1.15.** *Siano $f$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Allora*

$$< \widehat{f}, \widehat{g} >_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi < f, g >_{L^2(\mathbb{R})} .$$[30]

*Dimostrazione.* Ricordiamo che $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty$; inoltre, ricordando che $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g]] = g$, si ha

$$\begin{aligned}
< f, g >_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g(t)](\omega)](t)}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left( \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[g(t)](\omega) e^{i\omega t}\, d\omega} \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left( \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}[g(t)](\omega)} e^{-i\omega t}\, d\omega \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}[g(t)](\omega)} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}[g(t)](\omega)} \mathcal{F}[f(t)](\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} < \widehat{f}, \widehat{g} >_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

cioé la tesi, e dove lo scambio dell'ordine di integrazione è giustificato dal Teorema di Fubini (essendo $(t, \omega) \mapsto f(t)\overline{g(\omega)} \in L^1(\mathbb{R}^2)$). □

Possiamo ora enunciare il

**Teorema 1.16** (Teorema di Plancherel[31])**.** *Esiste ed è unica la trasformazione $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ che estende la trasformazione di Fourier definita in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inoltre, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{1.14}$$[32]

[29] In effetti $\mathcal{F}$ risulta essere un isomorfismo fra i due spazi se a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si dà la struttura di spazio di Fréchet usando le seminorme $\|f\|_{h,k} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^h f^{(k)}(x)|$ (per maggiori dettagli, si veda [12]).

[30] $< \cdot, \cdot >_{L^2(\mathbb{R})}$ indica il prodotto scalare nello spazio (di Hilbert) $L^2(\mathbb{R})$, definito come $< f, g > = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt\ \forall\, f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

[31] **Michel Plancherel**, matematico svizzero (1885-1967).

[32] La trasformazione $\mathcal{F}$ risulta essere un isomorfismo tra gli spazi di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Tale risultato segue dal lemma precedente con $f = g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e può essere esteso a tutte le funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ tramite un procedimento di passaggio al limite.
Possiamo riformulare, dunque, il **Teorema di Plancherel in** $L^2(\mathbb{R})$:

**Teorema 1.17** (Teorema di Plancherel in $L^2(\mathbb{R})$)**.** *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ è trasformabile secondo Fourier, allora anche $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e vale la* (1.14)*, detta anche* ***identità d Plancherel****.*

Questo teorema corrisponde all'*identità di Parseval*[33] per le serie di Fourier.[34]

L'identità di Plancherel può anche essere interpretata come formula di conservazione dell'energia: al primo membro della (1.14) compare l'energia del segnale $f$ distribuita lungo l'asse dei tempi con densità temporale $|f(t)|^2$ e al secondo membro l'energia del segnale $f$ distribuita lungo l'asse delle frequenze con densità spettrale $|\widehat{f}(\omega)|^2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega.$$

[33]**Marc-Antoine Parseval des Chênes** (1755-1836), matematico francese.
[34]L'*identità* o *uguaglianza di Parseval* stabilisce che, se $f \in L^2(-\pi, \pi)$, allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|^2_{L^2(-\pi,\pi)},$$

dove i $\gamma_n$ sono i coefficienti di Fourier di $f$.
L'identità di Parseval (che può essere considerata come un analogo del Teorema di Pitagora in spazi di dimensione infinita) vale anche in uno spazio di Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$: se $\{e_n\}$ è una base ortonormale, cioé tale che $\|e_n\| = 1 \; \forall \, n$, $\langle e_n, e_m\rangle = 0 \; \forall \, n \neq m$ e tale che lo spazio vettoriale generato da $\{e_n\}$ è denso in $H$ (uno spazio di Hilbert separabile possiede una base ortonormale), allora $\forall \, x \in H$ si ha

$$\sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Nell'identità di Parseval per le serie di Fourier, lo spazio di Hilbert è $L^2(-\pi, \pi)$ e la base ortonormale è il cosiddetto sistema trigonometrico ortogonale $\{e^{-int}\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Si ha quindi che la somma dei quadrati delle componenti di un vettore in una base ortonormale è uguale al quadrato della lunghezza del vettore.

## 1.7 Un'applicazione all'equazione del calore

Consideriamo un'applicazione della trasformazione di Fourier alle equazioni differenziali alle derivate parziali, cioé a equazioni differenziali in cui la funzione incognita dipende da più variabili e in cui compaiono le sue derivate parziali. Molti fenomeni fisici, ma anche biologici, economici ecc. sono descritti tramite questo tipo di equazioni. Il metodo di Fourier consente di trasformare alcune equazioni differenziali alle derivate parziali lineari in equazioni differenziali ordinarie.[35]

L'**equazione del calore** è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine[36], detta anche *equazione di diffusione* perché descrive l'evoluzione nel tempo della densità $u = u(x, t)$ di una certa quantità come il calore, la concentrazione chimica o altro.
Se la funzione $u(x, t)$ rappresenta la temperatura di un mezzo omogeneo e isotropo calcolata nel punto $x \in \mathbb{R}^3$ e all'istante $t > 0$, la forma generale dell'equazione del calore è $u_t = \Delta u$, dove $\Delta$ denota l'operatore di Laplace.[37] Per semplicità, poniamoci nel caso unidimensionale, prendendo idealmente una sbarra sottile di lunghezza infinita della quale sia nota la temperatura all'istante $t = 0$. Cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ e $u_0'$, $u_0'' \in L^1(\mathbb{R})$[38], tale che:
*i)* $u(\cdot, t)$, $u_x(\cdot, t)$, $u_{xx}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})\ \forall\, t \geq 0$;
*ii)* $\forall\, T > 0\ \exists\, h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $|u(x, t)| \leq h(x)$ q.o. in $\mathbb{R} \times [0, T]$.
Posto $\widehat{u}(\omega, t) = \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega)$, per la (1.7) con $n = 2$ e per la *i)* si ha

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x, t)](\omega) = -\omega^2 \widehat{u}(\omega, t);$$

inoltre, per la *ii)* si può derivare sotto il segno di integrale e, quindi

$$\mathcal{F}[u_t(x, t)](\omega) = \widehat{u}_t(\omega, t).$$

[35] In alcuni casi anche in equazioni algebriche.
[36] Si tratta di un'equazione di tipo parabolico.
[37] L'*operatore di Laplace* o *laplaciano* in $\mathbb{R}^n$ è definito come $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
[38] Per maggiori dettagli si veda [9].

Allora $\widehat{u}$ soddisfa il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{u}_t = -\omega^2 \widehat{u} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ \widehat{u}(\omega, 0) = \widehat{u_0}(\omega) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

in cui compare ora un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Si ricava quindi

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{u_0}(\omega) e^{-\omega^2 t},$$

da cui, dalla (1.9) con $a = \frac{1}{4t}$, si ha

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{u_0}(\omega) \mathcal{F} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right] (\omega)$$

(qui conviene pensare l'operatore $\mathcal{F}$ applicato a una funzione $f$ dipendente, per esempio, da $x$ e non da $t$, dato che $a = \frac{1}{4t}$); per il legame tra convoluzione e trasformata di Fourier (e usando anche la linearità di $\mathcal{F}$) si ha

$$\widehat{u}(\omega, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathcal{F} \left[ (u_0 \star g)(x) \right] (\omega),$$

con $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Tramite il Teorema di inversione si trova quindi la soluzione del problema di Cauchy iniziale:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} (u_0 \star g)(x),$$

cioé

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x - y) e^{-\frac{y^2}{4t}} \, dy. \tag{1.15}$$

Mostriamo ora che la soluzione trovata soddisfa la condizione iniziale[39]: posto

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

si ha che, $\forall\, t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x, t) \, dx = 1. \tag{1.16}$$

Inoltre, la (1.15) si può scrivere come

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x - y) \Phi(y, t) \, dy. \tag{1.17}$$

[39] Per dettagli sul procedimento seguito (che non fa uso delle distribuzioni) si veda [9], pagg. 47-48.

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, dimostriamo ora che

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = u_0(x_0). \tag{1.18}$$

Per la continuità di $u_0(x)$ si ha che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } |u_0(x) - u_0(x_0)| < \varepsilon \text{ se } |x - x_0| < \delta.$$

Allora, se $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, sfruttando la (1.17) e la (1.16) si ha

$$\begin{aligned}|u(x,t) - u_0(x_0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x-y)\Phi(y,t)\,dy - u_0(x_0)\int_{\mathbb{R}}\Phi(y,t)\,dy\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{R}}[u_0(x-y) - u_0(x_0)]\Phi(y,t)\,dy\right|;\end{aligned}$$

operando il cambio di variabile $x-y = z$ nell'ultimo integrale, si ottiene

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| = \left|\int_{\mathbb{R}}[u_0(z) - u_0(x_0)]\Phi(x-z,t)\,dz\right|$$

e, richiamando $y$ la variabile $z$, dalla continuità di $u_0$ segue che

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| = \left|\int_{\mathbb{R}}[u_0(y) - u_0(x_0)]\,\Phi(x-y,t)\,dy\right|$$

$$\leq \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \varepsilon\,\Phi(x-y,t)\,dy + \int_{\{|y-x_0|\geq\delta\}} |u_0(y) - u_0(x_0)|\Phi(x-y,t)\,dy$$

$$= I + J.$$

Risulta, dalla (1.16)

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)\,dy = \varepsilon;$$

inoltre, se $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ e $|y - x_0| \geq \delta$ si ha

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

da cui $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|$. Quindi, sfruttando l'espressione di $\Phi$ risulta

$$J \leq 2\|u_0\|_\infty \int_{\{|y-x_0|\geq\delta\}} \Phi(x-y,t)\,dy \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\int_{\{|y-x_0|\geq\delta\}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{x_0+\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x_0)^2}{16t}}\, dy \leq C \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau \to 0 \quad \text{per } t \to 0^+$$

dove, nel penultimo integrale, si è effettuato il cambio di variabile $y = x_0 + 4\sqrt{t}\tau$ (e dove è indicata sempre con $C$ la costante che ha inglobato, via via, altre costanti). Quindi, per $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ e $t > 0$ sufficientemente piccolo si ha $J \leq \varepsilon$, e la (1.18) è provata.

## 1.8 Un'applicazione all'equazione delle onde

I fenomeni di vibrazione o di propagazione di un'onda sono governati da un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine[40], detta **equazione delle onde**, della forma $u_{tt} - \Delta u = 0$, che rappresenta un modello semplificato per una corda vibrante nel caso $n = 1$, per una membrana vibrante nel caso $n = 2$ e per un corpo elastico nel caso $n = 3$. La funzione $u(x, t)$ rappresenta lo spostamento in qualche direzione, calcolato nel punto $x$ e all'istante $t > 0$.

Poniamoci nel caso unidimensionale e consideriamo la dinamica di una corda di uno strumento musicale, per esempio le vibrazioni della corda di una chitarra, la cui lunghezza è $L > 0$, con estremi fissati. Supponiamo che la corda, nella posizione di equilibrio, occupi l'intervallo $[0, L]$ sull'asse $x$ e che vibri su un piano in direzione perpendicolare all'asse $x$. Se si ipotizza che lo spostamento $u$ della corda sia piccolo rispetto alla lunghezza $L$ (cioé che l'ampiezza delle vibrazioni $\frac{\partial u}{\partial x}$ sia piccola) e se si trascura la perdita di energia cinetica (smorzamento) dovuta agli attriti e alle forze coesive interne alla corda, risulta che l'accelerazione $u_{tt}$ è proporzionale a $u_{xx}$[41]; precisamente si ha

$$u_{xx} = v^2\, u_{tt}, \tag{1.19}$$

dove $v$ (con $v^2 = \dfrac{\rho}{T}$, dove $\rho$ è la densità lineare e $T$ è la tensione della corda) rappresenta la *velocità di propagazione* dell'onda. La (1.19) è detta anche, talvolta, **equazione di d'Alembert**. Con un cambio di

[40] Si tratta di un'equazione di tipo iperbolico.

[41] Per maggiori dettagli si veda [7].

variabile (temporale) ci si può sempre ricondurre all'equazione

$$u_{xx} = u_{tt}.$$

Supponiamo di conoscere lo spostamento e la velocità iniziali, e cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ragionando come nel caso dell'equazione del calore (si veda [9], pag. 189) si trova che la trasformata di Fourier di $u$ soddisfa il problema

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} = -\omega^2 \widehat{u} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ \widehat{u}(\omega, 0) = \widehat{u_0}(\omega) & \text{in } \mathbb{R} \\ \widehat{u}_t(\omega, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per ogni $\omega$ fissato, quella ottenuta è un'equazione differenziale ordinaria, la cui soluzione è (le radici dell'equazione caratteristica sono $\pm i|\omega|$)

$$\widehat{u}(\omega, t) = c_1(\omega) \cos(\omega t) + c_2(\omega) \sin(\omega t)$$

con $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ o, in forma complessa

$$\widehat{u}(\omega, t) = \alpha(\omega) e^{-i|\omega|t} + \beta(\omega) e^{i|\omega|t}$$

con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Usando la soluzione scritta in forma reale, calcolando

$$\widehat{u}_t(\omega, t) = -\omega c_1 \sin(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t)$$

e imponendo le condizioni iniziali si ricava

$$\begin{cases} c_1 = \widehat{u_0} \\ \omega c_2 = 0, \end{cases}$$

da cui

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{u_0}(\omega) \cos(\omega t)$$

e

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u_0}(\omega) \cos(\omega t)](x);$$

oppure, usando la forma esponenziale, si ricava $\alpha = \beta = \frac{\widehat{u_0}}{2}$ e, quindi

$$\widehat{u}(\omega, t) = \frac{\widehat{u_0}}{2} \left[ e^{-i|\omega|t} + e^{i|\omega|t} \right].$$

Allora

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\widehat{u_0}}{2} \left( e^{-i|\omega|t} + e^{i|\omega|t} \right) \right] (x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{u_0}(\omega)}{2} \left( e^{i(x\omega + t|\omega|)} + e^{i(x\omega - t|\omega|)} \right) d\omega, \end{aligned}$$

per $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Osserviamo che il metodo di Fourier consente di risolvere l'equazione delle onde anche se i dati iniziali presentano delle discontinuità.

# Capitolo 2

# La trasformazione di Laplace

Anche la trasformazione di Laplace è una trasformazione di tipo integrale, che trasforma una funzione di variabile reale in una funzione di variabile complessa. Per alcuni aspetti è simile alla trasformazione di Fourier e ha un legame con essa.
Possiede diverse applicazioni, tra le quali il suo utilizzo per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie con condizioni iniziali assegnate.

**Definizione 2.1.** *Sia $f : I \to \mathbb{C}$, dove $I$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ tale che $I \supseteq [0, +\infty)$; $f$ si dice* ***trasformabile secondo Laplace*** *(o* ***Laplace-trasformabile****) se esiste $s \in \mathbb{C}$ tale che la funzione $t \mapsto e^{-st}f(t)$ sia integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}^+$, cioé se $\lim_{k\to+\infty} \int_0^k f(t)e^{-st}\,dt$ esiste finito. In tal caso l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{2.1}$$

*è detto* ***integrale di Laplace*** *di $f$*[1]*.*

Osserviamo che, se l'integrale di Laplace di $f$ è finito per un certo $s_0$ fissato, allora esso converge $\forall\, s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0)$; infatti si ha

$$|f(t)e^{-st}| = e^{-\mathrm{Re}(s)t}|f(t)| \leq e^{-\mathrm{Re}(s_0)t}|f(t)| = \left|e^{-s_0t}f(t)\right|.$$

[1]Alcuni testi (come [3] e [4]) trattano prima la trasformazione di Laplace e poi quella di Fourier.

Se $t \mapsto e^{-st}f(t)$ è integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^+$, $f$ si dice **assolutamente Laplace-trasformabile**. Chiaramente, se $f$ è assolutamente Laplace-trasformabile allora sarà anche Laplace-trasformabile.[2]
Risulta dunque che l'insieme degli $s \in \mathbb{C}$ in cui l'integrale (2.1) è convergente è un semipiano destro di $\mathbb{C}$. Allora si può dare la seguente

**Definizione 2.2.** *Sia $f : I \to \mathbb{C}$, con $[0, +\infty) \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$, trasformabile secondo Laplace.*[3] *Posto*

$$\sigma[f] = \inf\{Re(s) : \; e^{-st}f(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$$

*$\sigma[f]$ è detta **ascissa di convergenza** di $f$.*

La definizione è ben posta; infatti, come già osservato, nell'insieme $\{s \in \mathbb{C} : \; \mathrm{Re}(s) > \sigma[f]\}$ l'integrale (2.1) è convergente. Il semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \; \mathrm{Re}(s) > \sigma[f]\}$ è detto anche **semipiano di convergenza**.
Se $\sigma[f] = -\infty$ tale insieme coincide con tutto il piano complesso.

**Definizione 2.3.** *Sia $f : I \to \mathbb{C}$, $[0, +\infty) \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$, trasformabile secondo Laplace. Per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $Re(s) > \sigma[f]$ la funzione*

$$F(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

*è detta **trasformata di Laplace** di $f$ e viene indicata col simbolo $\mathcal{L}[f](s)$.*[4]

**Definizione 2.4.** *La funzione $f : I \to \mathbb{C}$, $[0, +\infty) \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ è detta **di ordine esponenziale** $\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se è tale che $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ per un certo $M > 0$.*

L'ordine esponenziale è strettamente legato all'ascissa di convergenza. Infatti, se $f$ è di ordine esponenziale $\alpha$ si ha

$$|f(t)e^{-st}| \leq e^{-\mathrm{Re}(s)t}Me^{\alpha t} = Me^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha)t};$$

[2]Non tutti i testi fanno questa distinzione di terminologia, che viene invece sottolineata in [8]. Altri testi ancora chiamano *semplicemente Laplace-trasformabile* quella che in questi appunti è detta funzione Laplace-trasformabile.

[3]La definizione di trasformabilità non richiede che $f$ sia definita in $(-\infty, 0)$, ma per poter poi estendere la definizione alle distribuzioni (si veda, per esempio, il Capitolo 7 in [3]) conviene pensare $f$ definita in tutto $\mathbb{R}$ e nulla in $(-\infty, 0)$.

[4]Il nome è tratto dal matematico, fisico e astronomo francese **Pierre-Simon de Laplace** (1749-1827).

la funzione ottenuta sta in $L^1(\mathbb{R}^+)$ se $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ e, quindi, risulta $\sigma[f] \leq \alpha$.
Osserviamo che una funzione di ordine esponenziale zero è una funzione limitata: $|f(t)| \leq M$.

Facciamo anche notare che esistono funzioni non trasformabili secondo Laplace: presa $f(t) = e^{t^2}$, si ha $\lim_{t\to+\infty} e^{t^2}e^{-st} = +\infty \;\forall\, s \in \mathbb{R}$.

**Esempio 2.1** (funzione di Heaviside)**.** *Consideriamo la* funzione di Heaviside[5], *detta anche* funzione gradino unitario *o* unit step function

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \textit{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{altrimenti,} \end{cases}$$

*che si può denotare anche come $H(t) = \chi_{\mathbb{R}^+}(t)$. Essendo $H(t) \leq 1$, essa è una funzione esponenziale di ordine zero, e l'integrale di Laplace di $H$ converge se Re$(s) > 0$; quindi l'ascissa di convergenza di $H$ è $\sigma[H(t)] = 0$. Calcoliamo la sua trasformata di Laplace:*

$$\mathcal{L}[H](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0.$$

*La funzione $s \mapsto \frac{1}{s}$ è definita (e olomorfa) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ma soltanto nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \; Re(s) > 0\}$ essa è la trasformata di Laplace di $H$.*

**Esempio 2.2** (funzione esponenziale)**.** *Consideriamo la funzione esponenziale $f(t) = e^{at}$, con $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. La trasformata di Laplace di $f$ è definita se $e^{at}e^{-st} = e^{-(s-a)t}$ è integrabile per $t > 0$, cioé se $s \in \mathbb{C}$ è tale che Re$(s-a) > 0$, cioé se Re$(s) > \alpha$. Dunque $\sigma[f] = \alpha$ e nel semipiano definito dall'ascissa di convergenza si ha*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a}.$$

*Osserviamo che per $a = 0$ si ritrova il risultato dell'esempio precedente.*

[5]Dal nome del matematico, fisico e ingegnere inglese **Oliver Heaviside** (1850-1925), famoso per aver applicato la trasformata di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali.

**Esempio 2.3** (funzione caratteristica di intervalli). *Consideriamo la funzione*

$$f(t) = \chi_{[0,h)}(t) = H(t) - H(t-h) = \begin{cases} 1 & \textit{se } 0 \le t < h \\ 0 & \textit{altrimenti,} \end{cases}$$

*detta* impulso di durata $h$. *Si ha*

$$\mathcal{L}[f](s) = \begin{cases} \int_0^h dt = h & \textit{se } s = 0 \\ \int_0^h e^{-st}\, dt = \dfrac{1-e^{-hs}}{s} & \textit{se } s \neq 0. \end{cases}$$

*Dato che* $\lim_{s\to 0} \dfrac{1-e^{-hs}}{s} = h$, $\mathcal{L}[f](s)$ *ha una singolarità eliminabile nell'origine, quindi essa è una funzione intera;* $f$ *è a supporto compatto* [6] *così come* $e^{-st} f(t)$*; quindi* $e^{-st} f(t)$ *è integrabile* $\forall\, s \in \mathbb{C}$*, e dunque* $\sigma[f] = -\infty$*.*

*Dividendo per* $h$ *la funzione impulso di durata* $h$ *si ottiene la funzione* impulso unitario *(di durata* $h$*)* $\delta_h(t) = \frac{1}{h}\, \chi_{[0,h)}(t)$*, chiamata così perché* $\int_0^{+\infty} \delta_h(t)\, dt = 1 \;\forall\, h$*. Si ha*

$$\mathcal{L}[\delta_h](s) = \begin{cases} 1 & \textit{se } s = 0 \\ \dfrac{1-e^{-hs}}{hs} & \textit{se } s \neq 0. \end{cases}$$

*Si ha*

$$\lim_{h\to 0} \delta_h(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } t \neq 0 \\ +\infty & \textit{se } t = 0 \end{cases}$$

$\forall\, t$ *fissato (cioé* $\delta_h \to 0$ *q.o. in* $\mathbb{R}$ *per* $h \to 0$*). Ciononostante, per ogni funzione continua* $\phi(t)$*, per il teorema della media integrale si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_h(t)\, \phi(t)\, dt = \frac{1}{h} \int_0^h \phi(t)\, dt = \phi(t_h)$$

*con* $0 \le t_h \le h$*; quindi*

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_h(t)\, \phi(t)\, dt = \phi(0).$$

[6] Per la definizione di *supporto* di $f$ si veda [6], pag. 105.

*La corrispondenza che a ogni funzione continua $\phi(t)$ (*funzione test*) associa il numero $\phi(0)$ è detta* ***delta di Dirac*** *o* ***impulso di Dirac***;[7] *si può dimostrare che non esiste nessuna funzione $\delta(t)$ per cui si abbia $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,\phi(t)\,dt = \phi(0)$ qualunque sia la funzione $\phi(t)$ continua. In ogni caso, la delta di Dirac viene indicata col simbolo $\delta(t)$ e si pone (impropriamente)*

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,\phi(t)\,dt := \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_h(t)\,\phi(t)\,dt = \phi(0)$$

*(cioé si definisce la delta di Dirac $\delta(t)$ come limite di $\delta_h(t)$ per $h \to 0$; $\delta(t)$ è detta* impulso unitario istantaneo*). La delta di Dirac è una cosiddetta* funzione generalizzata *(la sua definizione rigorosa può essere data nell'ambito della teoria delle distribuzioni). Essa viene utilizzata per rappresentare approssimativamente fenomeni che presentano dei picchi alti e stretti (fenomeni, appunto, impulsivi) e può pensata come la generalizzazione formale del delta di Kronecker.*
*Osservando che $\lim_{h\to 0} \mathcal{L}[\delta_h(t)](t) = 1$ si può immaginare che il candidato naturale a essere la trasformata di Laplace della delta di Dirac sia la funzione identicamente uguale a 1; in effetti è così.*[8]

## 2.1 Proprietà della trasformata di Laplace

**Proprietà 2.1** (Linearità della trasformazione di Laplace)**.** *La trasformazione di Laplace è un operatore lineare: se $f, g$ sono funzioni Laplace-trasformabili con ascissa di convergenza, rispettivamente, $\sigma[f]$ e $\sigma[g]$, allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è trasformabile secondo Laplace $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ nel semipiano degli $s \in \mathbb{C}$ tali che $Re(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$; inoltre si ha*

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s),$$

*con $\sigma[\alpha f + \beta g] \leq \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$.*

[7] **Paul Adrien Maurice Dirac** (1902-1984), fisico, matematico e ingegnere britannico.
[8] Per la dimostrazione rigorosa si rimanda alla teoria delle distribuzioni (si, veda, per esempio, il Capitolo 7 di [3] o di [8], oppure il Capitolo 3 di [10]).

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalla definizione di trasformata di Laplace, dalla linearità dell'integrale e osservando che l'intersezione degli insiemi individuati dalle disuguaglianze $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$ e $\mathrm{Re}(s) > \sigma[g]$ è l'insieme individuato dalla disuguaglianza $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$. □

**Esempio 2.4** (Trasformata delle funzioni trigonometriche)**.** *Consideriamo la funzione esponenziale dell'Esempio 2.2 con $a = \pm i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si ha*

$$\mathcal{L}[e^{\pm i\omega t}](s) = \frac{1}{s \mp i\omega}, \quad Re(s) > 0.$$

*Sfruttando la formula di Eulero e la linearità di $\mathcal{L}$ si ricava*

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad Re(s) > 0.$$

*Analogamente*

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad Re(s) > 0.$$

*In particolare,* $\mathcal{L}[\sin t](s) = \dfrac{1}{s^2 + 1}$ *e* $\mathcal{L}[\cos t](s) = \dfrac{s}{s^2 + 1}$.

**Esempio 2.5** (Trasformata delle funzioni iperboliche)**.** *Consideriamo nuovamente la funzione esponenziale dell'Esempio 2.2 con $a = \pm\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^+$. Si ha*

$$\mathcal{L}[e^{\omega t}](s) = \frac{1}{s - \omega}, \quad Re(s) > \omega$$

*e*

$$\mathcal{L}[e^{-\omega t}](s) = \frac{1}{s + \omega}, \quad Re(s) > -\omega.$$

*Per $Re(s) > \omega$ si ricava*

$$\mathcal{L}[\sinh(\omega t)](s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - \omega} - \frac{1}{s + \omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}, \quad Re(s) > \omega$$

*e*

$$\mathcal{L}[\cosh(\omega t)](s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - \omega} + \frac{1}{s + \omega}\right] = \frac{s}{s^2 - \omega^2}, \quad Re(s) > \omega.$$

*In particolare,* $\mathcal{L}[\sinh t](s) = \dfrac{1}{s^2 - 1}$ *e* $\mathcal{L}[\cosh t](s) = \dfrac{s}{s^2 - 1}$*, definite entrambe per $Re(s) > 1$.*

Abbiamo già accennato al fatto che la funzione $f$ "da trasformare" può non essere definita in $(-\infty, 0)$; infatti la definizione di trasformata coinvolge solo i valori $t \geq 0$ della funzione $f(t)$; questo significa che $f$ può essere modificata arbitrariamente per $t < 0$. Allora, spesso è conveniente porre $f(t) = 0$ per $t < 0$ e, per $f : I \to \mathbb{C}$ con $I \supseteq \mathbb{R}^+$,

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si ha $f_+(t) = H(t)f(t)$; inoltre $H(t) = 1_+$. Le funzioni del tipo $f_+(t)$ (nulle per $t < 0$) vengono chiamate **segnali**. Più precisamente

**Definizione 2.5.** *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ trasformabile secondo Laplace e nulla per valori negativi del suo argomento è detta **segnale**.*

La funzione di Heaviside, per esempio, è un segnale; la delta di Dirac, cioé l'impulso unitario istantaneo, è un segnale localizzato nell'origine (di durata iinfinitesima) di "ampiezza" infinita.

**Esempio 2.6** (Trasformata delle funzioni polinomiali)**.** *Consideriamo la funzione (il segnale) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, nulla per $t < 0$.*
*Se $n = 0$ $f(t) = H(t)$ q.o. in $\mathbb{R}$, e quindi $\mathcal{L}[f(t)](s) = \dfrac{1}{s}$ per Re$(s) > 0$ (dall'Esempio 2.15).*
*Se $n > 0$ procediamo ricorsivamente:*

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n \, dt$$

$$= \left[ -\frac{e^{-st}}{s} t^n \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} \, dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}](s),$$

*essendo $\lim_{t \to +\infty} e^{-st}\, t^n = 0$ per Re$(s) > 0$. Iterando la formula ottenuta si ricava*

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

**Proposizione 2.1.** *Sia $f$ una funzione trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora:*
*i)* $\forall\,\sigma_0 > \sigma[f]$ *la trasformata* $\mathcal{L}[f](s)$ *è limitata in modulo nel semipiano* $\{s \in \mathbb{C} : \; Re(s) > \sigma_0\}$*;*
*ii) si ha* $\lim_{Re(s)\to+\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.

*Dimostrazione.* i) Si ha

$$|\mathcal{L}[f](s)| \le \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(s)\,t}|f(t)|\,dt \le \int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t}|f(t)|\,dt;$$

L'ultimo integrale è convergente per definizione di ascissa di convergenza ed è indipendente da $s$.

ii) Consideriamo una successione $\{s_n\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(s_n) = +\infty$, con $\mathrm{Re}(s_n) \ge \sigma_0 \;\forall\, n$ ($\sigma_0 > \sigma[f]$); allora $\forall\, n$ si ha

$$|e^{-s_n t} f(t)| = e^{-\mathrm{Re}(s_n)t}|f(t)| \le e^{-\sigma_0 t}|f(t)| \quad \text{q.o. in } [0, +\infty),$$

con $e^{-\sigma_0 t}|f(t)| \in L^1(\mathbb{R}^+)$; inoltre $\forall\, t \ge 0$ si ha $\lim_{n\to+\infty} e^{-s_n t} f(t) = 0$ (q.o. in $[0, +\infty)$); quindi, per il Teorema della convergenza dominata si può passare al limite sotto il segno di integrale, da cui segue la *ii*). □

Osserviamo che, come mostrato nell'Esempio 2.3, la tesi non vale se a $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$ si sostituisce la condizione (più debole) $|s| \to +\infty$: infatti, per esempio la funzione (trasformata della funzione impulso di durata $h$) $\frac{1-e^{-hs}}{s} \to +\infty$ se $s \in \mathbb{R}$ e $s \to -\infty$.

**Proprietà 2.2** (Legame tra trasformazione di Laplace e trasformazione di Fourier)**.** *Sia $f$ una funzione trasformabile secondo Laplace (nulla per $t < 0$) con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora, $\forall\,\alpha > \sigma[f]$ la funzione $e^{-\alpha t} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ e, quindi, è trasformabile secondo Fourier. Inoltre si ha*

$$\mathcal{L}[f](\alpha + i\omega) = \mathcal{F}[e^{-\alpha t} f(t)](\omega).$$

*Dimostrazione.* Posto $s = \alpha + i\omega$ si ha

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](\alpha + i\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}[e^{-\alpha t} f(t)]\, dt = \mathcal{F}[e^{-\alpha t} f(t)](\omega) \qquad \text{per } \alpha > \sigma[f].$$

□

La maggior parte delle proprietà della trasformata di Laplace si possono ricavare da quelle della trasformata di Fourier sfruttando la relazione appena enunciata. Nel seguito verranno però dimostrate per via diretta.

**Proprietà 2.3.** *Sia $f$ una funzione trasformabile secondo Laplace, nulla per $t < 0$, con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora si ha:*
*i)* $\mathcal{L}[f(at)](s) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$ $\forall\, a > 0$, *Re*$(s) > a\sigma[f]$ *(proprietà di riscalamento);*
*ii)* $\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$ $\forall\, a > 0$, *Re*$(s) > \sigma[f]$ *(proprietà di traslazione);*
*iii)* $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-\alpha)$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$, *Re*$(s) > \sigma[f]+$*Re*$(\alpha)$.

*Dimostrazione.* i) Si ha, col cambio di variabile $at = \tau$

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(at)\, dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right),$$

dove l'ultimo integrale converge se $\frac{\mathrm{Re}(s)}{a} > \sigma[f]$.

ii) Essendo $f(t) = 0$ per $t < 0$, si ha che $f(t-a) = 0$ per $t < a$; quindi, posto $t - a = \tau$, si ha

$$\mathcal{L}[f(t-a)](s) = \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s),$$

per $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$.

iii) Si ha

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}f(t)\,dt = \mathcal{L}[f(t)](s-\alpha),$$

dove l'ultimo integrale converge per $\mathrm{Re}(s-\alpha) > \sigma[f]$. $\square$

Osserviamo che, nella *i*), il segnale $f(at)$ è *compresso* di $a$ rispetto a $f(t)$ se $0 < a < 1$ e *dilatato* di $a$ rispetto a $f(t)$ se $a > 1$.
Nella *ii*), il segnale $f(t-a)$ è traslato verso destra (esso viene detto anche *segnale ritardato* di $a$ rispetto a $f(t)$) rispetto a $f(t)$; un segnale $f(t+a)$ è detto invece *anticipato* di $a$ rispetto a $f(t)$: esso è traslato verso sinistra rispetto al segnale iniziale.
Nella *iii*), se $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, passare da $f(t)$ a $e^{\alpha t}f(t)$ equivale a "smorzare" il segnale $f(t)$.

**Esempio 2.7.** *Le trasformate di Laplace delle funzioni* $\cos(\omega t)$ *e* $\sin(\omega t)$ *calcolate nell'Esempio 2.4 possono essere trovate anche applicando la proprietà i) di riscalamento (con* $a = \omega$, $\omega > 0$*) a partire dalle trasformate delle funzioni* $\cos t$ *e* $\sin t$*: per la funzione seno, per esempio, da* $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}$ *si ricava*

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}[\sin t]\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad Re(s) > 0.$$

**Esempio 2.8.** *Le trasformate di Laplace delle funzioni trigonometriche insieme alla Proprietà 2.3 iii) permettono anche di calcolare le seguenti trasformate (*$\forall\, a \in \mathbb{C}$*):*

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \quad Re(s) > Re(a)$$

*e*

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos(\omega t)](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \quad Re(s) > Re(a).$$

*Inoltre, per* $Re(s) > \sigma[f]$

$$\mathcal{L}[f(t)\sin(\omega t)](s) = \mathcal{L}\left[f(t)\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right](s)$$

$$= \frac{1}{2i}\{\mathcal{L}[f](s-i\omega) - \mathcal{L}[f](s+i\omega)\}$$

*e*

$$\mathcal{L}[f(t)\cos(\omega t)](s) = \mathcal{L}\left[f(t)\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right](s)$$
$$= \frac{1}{2}\{\mathcal{L}[f](s-i\omega) + \mathcal{L}[f](s+i\omega)\}.$$

**Esempio 2.9.** *Consideriamo il segnale* $f(t) = [\sin(t-\pi)]_+$*; usando la proprietà di traslazione con* $a = \pi$ *si trova*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}.$$

*Osserviamo che il segnale* $f(t)$ *è ritardato di* $\pi$ *rispetto a* $\sin t$*, quindi è nullo per* $t < \pi$*; la somma dei due segnali* $f(t)$ *e* $\sin t$ *coincide con la funzione* $\sin t$ *per* $0 \leq t \leq \pi$ *ed è nulla fuori da tale intervallo (si può vedere facilmente facendo una rappresentazione grafica o considerando il fatto che* $\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha\ \forall\,\alpha$*): per* $t \geq \pi$ *le due funzioni sono, infatti, in "opposizione di fase". Dunque* $f(t) + \sin t = \chi_{[0,\pi)}(t)\sin t$ *e*

$$\mathcal{L}[\chi_{[0,\pi)}(t)\sin t](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) + \mathcal{L}[\sin t](s)$$
$$= \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2} + \frac{1}{1+s^2} = \frac{e^{-\pi s}+1}{1+s^2}.$$

*La funzione* $t \mapsto \chi_{[0,\pi)}(t)\sin t$ *è nulla fuori dall'intervallo compatto* $[0,\pi]$*, quindi la sua ascissa di convergenza è* $-\infty$*.*

**Proprietà 2.4.** *Sia* $f(t)$ *un segnale periodico per* $t \geq 0$ *con periodo* $T$*, cioé tale che* $f(t+T) = f(t)\ \forall\, t \geq 0$ *, e sia* $f \in L^1(0,T)$*. Allora, per* $Re(s) > 0$ *si ha:*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt. \tag{2.2}$$

*Dimostrazione.* Dato che $f$ è periodica di periodo $T$, spezzando l'intervallo di integrazione in un'infinità numerabile di sottointervalli di lunghezza $T$, si ha:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\,dt;$$

col cambio di variabile $t = \tau + kT$ e usando la periodicità di $f$ si ricava

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^T e^{-s\tau - skT} f(\tau + kT)\,d\tau \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \left( \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \right) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

dove, nell'ultimo passaggio, compare la somma della serie geometrica per $|e^{-sT}| < 1$, cioé per $\mathrm{Re}(s) > 0$. $\square$

Osserviamo che l'integrale a secondo membro della (2.2) può essere interpretato come trasformata di Laplace della funzione $\chi_{[0,T]}(t) f(t)$.

**Esempio 2.10.** *Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \textit{se } 2n \le t \le 2n+1,\ n \ge 0,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{altrimenti,} \end{cases}$$

*detta* onda quadra*; essa è la funzione caratteristica del plurintervallo* $\cup_{n\ge 0}[2n, 2n+1]$ *ed è un segnale periodico di periodo 2. Allora, utilizzando la Proprietà 2.4 si ha*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{1 - e^{-s}}{s} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}.$$

## 2.2 Trasformazione di Laplace e derivazione

**Lemma 2.5.** *$\forall\, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ si ha* $\left|\dfrac{e^z - 1}{z}\right| \leq e^{|z|}$.

*Dimostrazione.* La funzione $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ ha una singolarità eliminabile in $z = 0$: $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} e^z = 1$. Essa diventa dunque intera se la si prolunga ponendo $f(0) = 1$ e, sfruttando lo sviluppo esponenziale, si ha

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}(e^z - 1) = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - \frac{1}{z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}.$$

Considerando la somma parziale $n$-esima della serie si ha

$$\left|1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{(n+1)!}\right|$$

$$\leq 1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \cdots + \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \cdots + \frac{|z|^n}{n!}$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, si trova la tesi. $\square$

**Teorema 2.6** (Derivata della trasformata di Laplace)**.** *Sia $f$ una funzione trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora la funzione $\mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \, Re(s) > \sigma[f]\}$. Inoltre, la funzione $t \mapsto tf(t)$ è trasformabile secondo Laplace con stessa ascissa di convergenza $\sigma[f]$, e si ha*

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}[-tf(t)]\, dt,$$

*cioé*

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s).$$

*Dimostrazione.* Fissato $s \in \{\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]\}$ $(s = \sigma_0 + i\omega)$, consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{\mathcal{L}[f(t)](s+h) - \mathcal{L}[f(t)](s)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s+h)t}\,dt - \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right)$$
$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\frac{e^{-ht}-1}{h}\,dt.$$

Osserviamo che, $\forall\, t \geq 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-ht}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-ht}-1}{-ht}(-t) = -t. \tag{2.3}$$

Allora

$$\frac{\mathcal{L}[f(t)](s+h) - \mathcal{L}[f(t)](s)}{h} = \int_0^{+\infty}(-tf(t))e^{-st}\,\frac{e^{-ht}-1}{-ht}\,dt; \tag{2.4}$$

Per poter passare al limite (per $h \to 0$) sotto il segno di integrale si deve poter maggiorare la funzione integranda $g_h(t) = (-tf(t))e^{-st}\,\dfrac{e^{-ht}-1}{-ht}$ che compare nell'ultimo integrale con una funzione $g(t)$ integrabile per $t \geq 0$ e indipendente da $h$.
Osserviamo prima che la funzione $t$ è di ordine esponenziale $\delta\ \forall\, \delta > 0$: infatti $\forall\, \delta > 0$ esiste una costante $C(\delta) > 0$ tale che $t \leq C(\delta)e^{\delta t}\ \forall\, t \geq 0$, cioé tale che

$$te^{-\delta t} \leq C(\delta), \quad t \geq 0. \tag{2.5}$$

Prendiamo ora l'incremento $h$ tale che $|h| < \delta$, con $0 < \delta < \dfrac{\sigma_0 - \sigma[f]}{2}$; usando il Lemma 2.5 e la (2.5) si ha

$$\left|-tf(t)e^{-st}\,\frac{e^{-ht}-1}{-ht}\right| \leq t|f(t)|e^{-\mathrm{Re}(s)t}e^{|ht|}$$
$$\leq C(\delta)e^{\delta t}|f(t)|e^{-\mathrm{Re}(s)t}e^{\delta t} = C(\delta)|f(t)|e^{-(\mathrm{Re}(s)-2\delta)t} \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Allora, passando al limite per $h$ che tende a zero nella (2.4) e usando la (2.3) si trova che $\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s)$ esiste ed è uguale a $\mathcal{L}[-tf(t)](s)$. Inoltre l'integrale a secondo membro della (2.4) converge per $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$, cioè si ricava che $tf(t)$ è Laplace-trasformabile e ha la stessa ascissa di convergenza di $f$. $\square$

Tornando indietro agli esempi già visti, si può osservare che le funzioni trasformate sono olomorfe anche in insiemi più grandi del semipiano di

convergenza.
Il risultato precedente può essere generalizzato alle derivate di ordine superiore ($\mathcal{L}[f](s)$, essendo olomorfa in un aperto $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$, risulta derivabile infinite volte):

**Corollario 2.7.** *Sia $f$ una funzione trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora la funzione $t \mapsto t^n f(t)$ è trasformabile secondo Laplace $\forall\, n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, sempre con ascissa di convergenza $\sigma[f]$, e si ha*

$$\frac{d^n}{ds^n}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}(-1)^n[t^n f(t)]\, dt,$$

*cioé*

$$F^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

**Esempio 2.11.** *Consideriamo la funzione di Heaviside $H(t)$; la sua trasformata è $\mathcal{L}[H(t)](s) = \dfrac{1}{s}$, $Re(s) > 0$. Usando il risultato dell'Esempio 2.6 sulla trasformata delle funzioni polinomiali si ha*

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[H(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n H(t)](s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

**Proposizione 2.2.** *Sia $f$ una funzione trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e sia anche la funzione $\frac{f(t)}{t}$ trasformabile secondo Laplace. Allora si ha:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[f](\tau)\, d\tau, \quad Re(s) > \sigma[f].$$

*Dimostrazione.* Posto $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ e $G(s) = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s)$, dal Teorema 2.6 applicato a $g(t)$ si ha

$$\mathcal{L}\left[tg(t)\right](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[g(t)](s),$$

cioé

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[tg(t)](s) = -G'(s);$$

allora, per un certo $s_0$ tale che $\mathrm{Re}(s_0) > \sigma[f]$, integrando primo e ultimo membro dell'espressione precedente e usando la definizione di funzione primitiva si ha

$$G(s) = -\int_{s_0}^{s} \mathcal{L}[f(t)](\tau)\,d\tau + c. \tag{2.6}$$

L'integrale scritto sopra è un integrale esteso a un cammino nel piano complesso (che potremmo anche indicare con $\int_{\gamma(s_0,s)}$); sempre dal Teorema 2.6 $\mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa per $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$, quindi l'integrale non dipende dal cammino scelto: il cammino di integrazione è una qualunque curva regolare contenuta nel semipiano di convergenza. Per determinare $c$ ricordiamo che, essendo $\frac{f(t)}{t}$ trasformabile secondo Laplace, per la Proposizione 2.1 si ha $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = 0$ (e se $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$ si ha $s \to +\infty + i\mathrm{Im}(s)$, cioé $|s| \to \infty$); allora, passando al limite nella (2.6) si trova

$$0 = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} G(s) = -\int_{s_0}^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](\tau)\,d\tau + c,$$

da cui si ricava

$$c = \int_{s_0}^{+\infty} \mathcal{L}[f](\tau)\,d\tau$$

e, quindi, sostituendo nella (2.6)

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) \\ &= -\int_{s_0}^{s} \mathcal{L}[f](\tau)\,d\tau + \int_{s_0}^{+\infty} \mathcal{L}[f](\tau)\,d\tau \\ &= \int_{s}^{s_0} \mathcal{L}[f](\tau)\,d\tau + \int_{s_0}^{+\infty} \mathcal{L}[f](\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

per $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$, da cui la tesi.

□

**Teorema 2.8** (Trasformata della derivata). *Sia $f(t)$ una funzione definita per $t \geq 0$, continua*[9] *derivabile con derivata continua a tratti,*

[9] Si intende che in $t = 0$ $f$ è continua a destra; inoltre, la si può estendere su tutto $\mathbb{R}$ definendola nulla per $t < 0$.

*trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza* $\sigma[f]$. *Allora, se anche* $f'$ *è Laplace-trasformabile con ascissa di convergenza* $\sigma[f']$, *per ogni* $s$ *tale che* $Re(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$ *si ha*

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+).$$ [10]

*Dimostrazione.* Si ha, eventualmente spezzando l'integrale nei punti in cui $f'$ non è continua,

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k e^{-st} f'(t)\, dt$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left( \left[e^{-st} f(t)\right]_0^k + s \int_0^k e^{-st} f(t)\, dt \right).$$

Per $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f]$ si ha $\lim_{k\to+\infty} e^{-sk} f(k) = 0$; allora si ha

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+),$$

dove $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$.
Inoltre, affinché l'integrale iniziale $\int_0^\delta e^{-st} f'(t)\, dt$ converga si deve richiedere che $\mathrm{Re}(s) > \sigma[f']$, quindi la conclusione vale per $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$. □

Osserviamo che il teorema precedente può essere esteso alle derivate di ordine successivo: se $f$ è di classe $C^n([0, +\infty))$ (questa ipotesi può essere leggermente indebolita) e $f$ e le sue derivate fino all'ordine $n$ sono trasformabili secondo Laplace, allora si ha

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+) \tag{2.7}$$

[10] Alcuni testi (per esempio [10]) citano il *Teorema del valore iniziale*:
Sia $f(t) \in L^1(0, +\infty)$, con $f'$ definita q.o. e $f$, $f'$ Laplace-trasformabili. Allora $f$ tende a un limite finito $f(0_+)$ quando $t \to 0^+$ e $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} s\mathcal{L}[f](s) = f(0^+)$.
Il seguente è detto *Teorema del valore finale*: Sia $f(t) \in L^1(0, +\infty)$, con $f'$ definita q.o. Allora $f$ è Laplace-trasformabile, tende a un limite finito $f(\infty)$ quando $t \to +\infty$, $\sigma[f] \le 0$ (si considerano le funzioni prolungate su tutto $\mathbb{R}$, nulle per $t < 0$) e $\lim_{s\to 0,\ \mathrm{Re}(s)>0} s\mathcal{L}[f](s) = f(\infty)$.
Talvolta, soprattutto nei testi applicativi, i teoremi del valore iniziale e del valore finale (chiamati così proprio perché permettono di calcolare i valori iniziale e finale di un segnale a partire dalla sua trasformata di Laplace) sono enunciati senza richiedere ipotesi sulle funzioni (oppure si richiede direttamente che le funzioni siano di classe $C^1$): nel primo caso, se il $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} s\mathcal{L}[f](s)$ esiste finito, esso coincide con $f(0^+)$; nel secondo caso, se i due limiti $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ e $\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f](s)$ esistono finiti, allora essi coincidono.

per ogni $s$ tale che $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[f'], \dots, \sigma[f^{(n)}]\}$.

**Esempio 2.12.** *Nell'Esempio 2.6 abbiamo calcolato la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = t^n H(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Ora la ricaviamo nuovamente usando la (2.7).*
*Per $n > 0$ si ha*

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots f^{(n-1)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = n!,$$

*dove l'ultima è una derivata destra. Si ha, inoltre, $f^{(n)}(t) = 0$ per $t < 0$; quindi si può scrivere $f^{(n)}(t) = n!H(t)$, da cui si ricava*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[n!H(t)](s) = \frac{n!}{s},$$

*da cui*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

## 2.3 Trasformazione di Laplace e convoluzione

Prima di considerare la trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione di due funzioni di $L^1(\mathbb{R})$, definiamo la convoluzione per funzioni localmente integrabili in $[0, +\infty)$ (e quindi, in particolare, per segnali):

**Definizione 2.6.** *Siano $f$, $g \in L^1_{loc}(0, +\infty)$, con $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La loro convoluzione è definita*[11] *da*

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-y)g(y)\,dy & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Osserviamo che la definizione precedente vale, in particolare, se $f$ e $g$ sono due segnali. Essa non è soltanto una definizione formale; infatti con l'ipotesi che $f$, $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, +\infty)$, $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$, si dimostra che la (2.8) è q.o. finita in $[0, +\infty)$ ed è una funzione localmente

[11] O, analogamente

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(y)g(t-y)\,dy & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

integrabile in tale insieme.
Osserviamo anche che la convoluzione di due funzioni a supporto compatto ha supporto compatto.[12]

Vale il seguente

**Teorema 2.9.** *Siano $f$ e $g$ due segnali trasformabili secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e $\sigma[g]$ rispettivamente. Allora la funzione $f \star g$ è trasformabile secondo Laplace, per ogni $s$ tale che $Re(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$ e si ha*

$$\mathcal{L}[(f \star g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s).$$

*Inoltre si ha*

$$e^{-\alpha t}(f \star g)(t) = e^{-\alpha t} f(t) \star e^{-\alpha t} g(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ t.c. \ \alpha > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}.$$

Analogamente al caso della trasformazione di Fourier, il teorema sulla trasformata della convoluzione si dimostra sfruttando la Definizione 2.6 e usando il teorema di Fubini. Per quanto riguarda l'ascissa di convergenza di $f \star g$, osserviamo che se $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$, allora $f(t)e^{-st}$ e $g(t)e^{-st}$ stanno in $L^1(\mathbb{R}^+)$; allora $f(t)e^{-st} \star g(t)e^{-st} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e si ha

$$\begin{aligned} f(t)e^{-st} \star g(t)e^{-st} &= \int_0^t e^{-s(t-y)} f(t-y) e^{-sy} g(y)\, dy \\ &= \int_0^t e^{-st} f(t-y) g(y)\, dy = e^{-st}(f \star g)(t); \end{aligned}$$

dunque $e^{-st}(f \star g)(t)$ è integrabile se $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$, cioé $\sigma[f \star g] = \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$.

Vale il seguente corollario (della trasformata dell'integrale, o della trasformata della primitiva):

**Corollario 2.10.** *Sia $f \in L^1_{loc}(0, +\infty)$ una funzione trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora anche la funzione $F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ è trasformabile secondo Laplace e si ha*

$$\mathcal{L}[F(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s} \quad Re(s) > \max\{\sigma[f], 0\}.$$

[12] Per maggiori dettagli si veda [6], pag. 104 e seguenti.

*Dimostrazione.* Prima di tutto osserviamo che, dalla (2.8), si ha

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = (H \star f)(t);$$

essendo la funzione $H$ di Heaviside $\mathcal{L}$-trasformabile per $\mathrm{Re}(s) > 0$ e $\mathcal{L}[H(t)](s) = \frac{1}{s}$, dal Teorema 2.9 segue che

$$\mathcal{L}[F(t)](s) = \mathcal{L}[(H \star f)(t)](s) = \mathcal{L}[H(t)](s)\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s).$$

□

Il Corollario 2.10 afferma che la primitiva di una funzione trasformabile secondo Laplace è ancora trasformabile secondo Laplace.
Esso fornisce un altro metodo per calcolare $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s)$ e $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s)$.

**Esempio 2.13.** *Le trasformate di Laplace delle funzioni trigonometriche possono essere dedotte l'una dall'altra utilizzando il Corollario 2.10: da* $\sin(\omega t) = \omega \int_0^t \cos(\omega\tau)\, d\tau$ *si ha*

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{1}{s}\omega\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{1}{s}\frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

*Osservando poi che* $\cos(\omega t) - \cos 0 = -\omega \int_0^t \sin(\omega\tau)\, d\tau$ *(la funzione* $\cos(\omega t)$ *non è nulla nell'origine) si ha*

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) - \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}(-\omega)\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s)$$

$$= -\frac{\omega}{s}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{-\,\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)},$$

*da cui*

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{-\,\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} + \frac{1}{s} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

*Usando il Corollario 2.10 si possono dedurre l'una dall'altra anche le trasformate delle funzioni iperboliche e quelle delle funzioni polinomiali: consideriamo il segnale* $t_+^n$*; si ha*

$$\mathcal{L}\left[\frac{t_+^n}{n}\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[t_+^{n-1}](s)$$

*da cui*

$$\mathcal{L}\left[t_+^n\right](s) = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t_+^{n-1}](s),$$

*che è il risultato già ottenuto nell'Esempio 2.6.*

## 2.4 L'inversione della trasformazione di Laplace

Come per la trasformazione di Fourier, è interessante studiare il problema dell'inversione della trasformata di Laplace: data, cioé, una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma\}$, si vuole determinare una funzione $f$ tale che $\mathcal{L}[f] = F$ (ovvero ottenere un segnale a partire dalla sua trasformata).
Osserviamo innanzi tutto che non tutte le funzioni $F$ olomorfe in un semipiano sono la trasformata di Laplace di una funzione; per esempio $F(s) \equiv 1$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ ma non può verificare la condizione *ii*) della Proposizione 2.1 $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} F(s) = 0$. Inoltre, nell'Esempio 2.3 si è visto che $F(s) = 1$ è la trasformata di Laplace della delta di Dirac (che, però, non è una funzione ma una distribuzione).
Affinché una funzione olomorfa $F(s)$ sia la trasformata di Laplace di una funzione $f$ occorre che $|F(s)|$ tenda a zero abbastanza velocemente quando $|s| \to \infty$ (come sarà enunciato più avanti).

Il seguente teorema fornisce una formula per la trasformata inversa di una funzione $F$ sapendo (a priori) che essa è la trasformata di una funzione $f$:

**Teorema 2.11** (Formula di inversione di Riemann-Fourier)**.** *Sia $F$ la trasformata di Laplace ($F = \mathcal{L}[f]$) di una funzione $f$[13] trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora $\forall\, \alpha > \sigma[f]$ si ha*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to+\infty} \int_{\alpha-ik}^{\alpha+ik} e^{st}\, F(s)\, ds, \tag{2.9}$$

*dove l'integrale è esteso alla retta verticale del piano complesso passante per $\alpha$ e percorsa nel verso delle ordinate crescenti.*

[13] Di fatto, $f(t)$ è un segnale, nulla per $t < 0$.

La (2.9) è detta **formula di inversione di Riemann-Fourier** [14] e la funzione $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ è detta **anti-trasformata di Laplace** o **trasformata inversa di Laplace** di $F$. Tale formula vale per ogni $t \in \mathbb{R}$ ma di fatto l'ultimo membro è diverso da zero solo per $t \geq 0$ (quindi ha senso considerare funzioni $f(t)$ nulle per $t < 0$, cioé segnali).[15]

Vale la seguente

**Proposizione 2.3.** *Sia $f$ un segnale continuo a tratti con derivata continua a tratti, sia $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f$ con ascissa di convergenza $\sigma[f]$. Allora, $\forall\, \alpha > \sigma[f]$ si ha:*

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{k \to +\infty} \int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} e^{st}\, F(s)\, ds = \frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)].$$

La proposizione precedente ci dice quindi che la formula di inversione fornisce $f(t)$ in tutti i punti $t$ in cui $f$ è continua, cioé che un segnale $f$ continuo è completamente determinato dalla sua trasformata di Laplace.

Vale inoltre il seguente risultato:

**Proposizione 2.4.** *Sia $F(s)$ una funzione analitica nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \sigma\}$ e tale che $|F(s)| = O\left(\frac{1}{s^n}\right)$ per $|s| \to \infty$ con $n > 1$. Allora, $\forall\, \alpha > \sigma$ la formula*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k \to +\infty} \int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} e^{st}\, F(s)\, ds$$

*definisce un segnale continuo su $\mathbb{R}$, indipendente da $\alpha$ e tale che*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s).$$

[14] Essa è detta anche *formula inversa di Mellin* o *integrale di Fourier-Mellin* o *integrale di Bromwich*.

[15] Quella della Definizione 2.3 è chiamata, in alcuni testi (per esempio in [4]), *trasformata di Laplace unilatera* e si distingue dalla *trasformata di Laplace bilatera*:
siano $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{C}$ tali che $e^{-st} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$; definiamo

$$a := \inf \left\{ \mathrm{Re}(s) : \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \text{ è assolutamente convergente} \right\}$$

e

$$b := \sup \left\{ \mathrm{Re}(s) : \int_{-\infty}^{0} e^{-st} f(t)\, dt \text{ è assolutamente convergente} \right\}.$$

Se $a < b$, la funzione $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$, $a < \mathrm{Re}(s) < b$, è detta **trasformata di Laplace bilatera di** $f$ e si scrive $\mathcal{L}_{\mathrm{bil}}[f](s) = F(s)$; $a$ e $b$ sono dette **ascisse di convergenza**.

Dal fatto che $f$ è un segnale continuo, segue che $f(0) = 0$.
Inoltre, partendo dall'ipotesi che $f$ sia Laplace-trasformabile e continua con $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$, per determinare $f$ si può usare il legame tra la trasformazione di Laplace e quella di Fourier, e quindi la formula di inversione per la trasformata di Fourier. Dalla Proprietà 2.2 si ha

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t} f(t)](\omega) = \mathcal{L}[f](\alpha + i\omega)$$

e, quindi, applicando l'operatore $\mathcal{F}^{-1}$ si ha

$$e^{-\alpha t} f(t) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{L}[f](\alpha + i\omega)\Big](t) = \mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha + i\omega)\right](t).$$

Si ha

$$\begin{aligned} f(t) = e^{\alpha t}[e^{-\alpha t} f(t)] = e^{\alpha t}\mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha + i\omega)\right](t) \\ = e^{\alpha t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha + i\omega)e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha + i\omega)e^{(\alpha + i\omega)t}\, d\omega. \end{aligned}$$

Col cambio di variabile $s = \alpha + i\omega$ si trova

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(s)e^{st}\, ds,$$

con $\alpha =$Re$(s) > \sigma$.

Prima di considerare alcune funzioni antitrasformabili cerchiamo di ottenere il segnale $f$ a partire dalla sua trasformata $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$ in maniera intuitiva.
Sia $F(s)$ una funzione olomorfa in un semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0\}$, tale che $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$; posto $M(R) = \sup\{|F(s)| : \ |s| = R \text{ e } \mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0\}$, allora $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$. Fissato $s_0$ nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma_0\}$, con $|s_0| < R$, e scelto arbitrariamente $\alpha$ tale che $\sigma_0 < \alpha <$Re$(s_0)$, applichiamo la formula integrale di Cauchy nel dominio delimitato dall'arco di circonferenza $\gamma_R$ di raggio $R$ (contenuto nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq \alpha\}$) e dalla retta verticale $x = \alpha$, che interseca $\gamma_R$ nei punti $\alpha \pm ik$, con $k = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$:

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} -\frac{F(z)}{z - s_0}dz + \int_{\gamma_R}\frac{F(z)}{z - s_0}dz\right). \tag{2.10}$$

Osserviamo che

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{F(z)}{z - s_0} dz \right| \leq l(\gamma_R) \cdot \frac{M(R)}{|R - s_0|} \leq \frac{2\pi R\ M(R)}{R - |s_0|} \to 0$$

per $R \to \infty$ (dove $l(\gamma_R)$ indica la lunghezza di $\gamma_R$ e dove è stato usato il fatto che $|z - s_0| \geq \big||z| - |s_0|\big|$). Dato che $k \to \infty$ per $R \to \infty$, dalla (2.10) si ha

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} \frac{F(z)}{s_0 - z} dz \tag{2.11}$$

cioè

$$F(s_0) = \frac{\text{V.P.}}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{F(z)}{s_0 - z} dz = \frac{1}{2\pi} \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{F(\alpha + iy)}{s_0 - \alpha - iy} dy,$$

dove l'integrale a secondo membro è indipendente da $\alpha$, purché si abbia $\sigma_0 < \alpha <$Re$(s_0)$.

Se $f(t)$ è un segnale Laplace-trasformabile con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e $F(s)$ è la sua trasformata di Laplace, se nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \sigma[f]\}$ $F(s)$ è infinitesima all'infinito, allora la (2.11) vale e, $\forall\, s \in \{s \in \mathbb{C} :\ \text{Re}(s) > \sigma[f]\}$ si ha

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} \frac{F(z)}{s - z} dz \tag{2.12}$$

$\forall\, \alpha$ tale che $\sigma[f] < \alpha <$Re$(s)$. Cerchiamo ora di ottenere (in modo puramente euristico) la formula di inversione di Riemann-Fourier: supponiamo che la trasformazione $\mathcal{L}$ $(f(t) \mapsto F(s))$ sia invertibile con inversa $\mathcal{L}^{-1}$ $(F(s) \mapsto f(t))$ e applichiamo quest'ultima alla (2.12) (supponendo anche di poter portare l'operatore $\mathcal{L}^{-1}$ sotto il segno di integrale). Si trova

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} F(z) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - z} \right] (t)\, dz;$$

ricordando la trasformata di Laplace della funzione esponenziale si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} F(z) e^{zt}\, dz$$

da cui, chiamando $s$ la variabile di integrazione, si trova

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{\alpha - ik}^{\alpha + ik} F(s) e^{st}\, ds, \quad \alpha > \sigma[f].$$

**Esempio 2.14.** *Calcoliamo l'integrale*

$$\frac{V.P.}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{st}}{s}ds,$$

*con* $\alpha > 0$.

*Consideriamo prima il caso* $t \neq 0$*; si tratta di un integrale del tipo che compare nel secondo membro della formula di inversione di Riemann-Fourier con* $F(s) = \dfrac{1}{s}$. *Sappiamo che* $\dfrac{1}{s} = \mathcal{L}[H(t)](s)$*, definita per* $Re(s) > 0$.

*Osserviamo che* $\lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0$*; consideriamo la circonferenza di centro l'origine e raggio* $R$ *e la retta verticale passante per* $x = \alpha$*; indichiamo con* $\gamma_R$ *l'arco di circonferenza percorsa in senso antiorario (a sinistra della retta verticale) dal punto* $\alpha + ik$ *al punto* $\alpha - ik$*, con* $k = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$ *e con* $\widetilde{\gamma}_R$ *l'arco di circonferenza percorsa in senso orario (a destra della retta verticale) dal punto* $\alpha + ik$ *al punto* $\alpha - ik$*. Dal Lemma di Jordan segue che*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{st}}{s}ds = 0 \qquad se\ t > 0 \tag{2.13}$$

*e*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\widetilde{\gamma}_R}\frac{e^{st}}{s}ds = 0 \qquad se\ t < 0. \tag{2.14}$$

*Inoltre, dato che la funzione* $g(s) = \dfrac{e^{st}}{s}$ *è olomorfa in* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *e ha un polo semplice in* $s = 0$*, per il Teorema dei residui si ha*

$$\int_{\alpha-ik}^{\alpha+ik}\frac{e^{st}}{s}ds + \int_{\gamma_R}\frac{e^{st}}{s}ds = 2\pi i Res(g(s);0)$$

*e, per il Teorema di Cauchy, si ha anche*

$$\int_{\alpha-ik}^{\alpha+ik}\frac{e^{st}}{s}ds + \int_{\widetilde{\gamma}_R}\frac{e^{st}}{s}ds = 0.$$

*Quindi, dato che* $k \to \infty \Leftrightarrow R \to \infty$*, dalle* (2.13)*,* (2.14) *e dal fatto che* $Res(g(s);0) = \lim_{s\to 0} s \cdot g(s) = 1$*, si ha*

$$\frac{V.P.}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{st}}{s}ds = \begin{cases} 1 & se\ t > 0 \\ 0 & se\ t < 0. \end{cases}$$

*Analizziamo ora il caso $t = 0$: dobbiamo calcolare*

$$\frac{V.P.}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{1}{s}ds.^{16}$$

*Ricordiamo che la funzione* $\log s$ *è una primitiva di* $\frac{1}{s}$ *nel semipiano* $Re(s) > 0$, *quindi si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}\int_{\alpha-ik}^{\alpha+ik}\frac{1}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}[\log s]_{\alpha-ik}^{\alpha+ik}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}[\log(\alpha+ik) - \log(\alpha-ik)]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}\Big[\log\sqrt{\alpha^2+k^2} + i\,arg(\alpha+ik)$$
$$- \log\sqrt{\alpha^2+k^2} - i\,arg(\alpha+ik)\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

*Riassumendo, si trova*

$$\frac{V.P.}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{st}}{s}ds = \begin{cases} 1 & se\ t > 0 \\ \frac{1}{2} & se\ t = 0 \\ 0 & se\ t < 0. \end{cases}$$

*La formula di inversione di Riemann-Fourier permette dunque di riottenere il segnale* $H(t)\ \forall\, t \neq 0$, *e in* $t = 0$ *si può applicare la Proposizione 2.3: osserviamo che* $\frac{1}{2} = \frac{H(0^+) + H(0^-)}{2}$.

[16] Ricordiamo che nell'integrale in valore principale (in $\mathbb{R}$) non è richiesto che siano convergenti separatamente gli integrali da 0 a $+\infty$ o da $-\infty$ a 0, ma che esista finito il limite (per $k \to \infty$) dell'integrale sull'intervallo simmetrico $[-k, k]$. In questo caso, per esempio, se si spezza l'integrale lungo le due semirette inferiore e superiore si ottengono integrali non convergenti: infatti la funzione $\frac{1}{s}$ ristretta alla retta $\alpha + iy$ si comporta, per $y \to \pm\infty$ come la funzione $\frac{1}{y}$, che non è integrabile negli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$.

## 2.5 Confronto tra la trasformazione di Fourier e la trasformazione di Laplace

Ricordiamo che le due trasformazioni $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$ sono definite, rispettivamente, da

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt, \quad s \in \mathbb{C};$$

$\mathcal{F}$ agisce su funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (definite su tutto $\mathbb{R}$ o, più in generale, definite in $\mathbb{R}^N$, con $\omega \in \mathbb{R}^N$), mentre $\mathcal{L}$ agisce su funzioni $f(t)$ definite sulla semiretta reale $[0, +\infty)$ (anche se, come abbiamo osservato in precedenza, risulta comodo far agire $\mathcal{L}$ su funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, nulle per $t < 0$).
Data $f$ a valori reali, $\mathcal{F}[f](\omega)$ è, in generale, a valori complessi (a meno che $f$ non sia pari), mentre, data $f$ a valori reali, $\mathcal{L}[f](s)$ è a valori reali se $s \in \mathbb{R}$ ed è a valori complessi se $s \in \mathbb{C}$.
$\mathcal{F}[f]$ è definita per funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ (oppure per funzioni in $L^2(\mathbb{R})$)[17], mentre $\mathcal{L}[f]$ è definita anche per funzioni non integrabili, che siano però di un certo ordine esponenziale.
$\mathcal{F}[f](\omega)$ è tanto più regolare quanto più velocemente $f(t)$ tende a zero per $t \to \infty$ (ricordiamo che, dal teorema della derivata della trasformata, se $f, t^n f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f}$ è derivabile $n$ volte, mentre per una generica $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\widehat{f}$ risulta in generale continua ma non derivabile). Invece $\mathcal{L}[f]$ è olomorfa (e quindi derivabile infinite volte) nel semipiano di convergenza (indipendentemente da come $f$ tende a zero all'infinito) purché $f$ sia $\mathcal{L}$-trasformabile.
Per $\mathcal{F}[f]$ vale il Teorema di Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \mathcal{F}[f(t)](\omega) = 0$$

e per $\mathcal{L}[f(t)](s)$ si ha

$$\lim_{\mathrm{Re}(s) \to +\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) = 0.$$

[17] In alternativa, può essere inserita nel contesto delle distribuzioni.

Inoltre, $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$ tende a zero per $|\omega| \to \infty$ tanto più velocemente quanto più $f$ è regolare (dalla formula (1.7) sulla trasformata della derivata); anche $\mathcal{L}[f(t)](s)$ tende a zero per $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$ tanto più velocemente quanto più $f(t)$ (in tutto $\mathbb{R}$, quindi prolungata a zero per $t < 0$) è regolare, ma senza le condizioni di annullamento in zero di $f$ e delle sue derivate non si può concludere nulla sull'ordine di infinitesimo di $\mathcal{L}[f](s)$ all'infinito (dalla (2.7)).
Infine, $f \in L^1(\mathbb{R})$ si può riottenere da $\mathcal{F}[f]$ antitrasformando $\widehat{f}(\omega)$, purché anche $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, mentre $f$ $\mathcal{L}$-trasformabile si può riottenere da $\mathcal{L}[f]$ dalla formula di antitrasformazione purché $\mathcal{L}[f](s)$ tenda a zero per $|s| \to \infty$ almeno come $\dfrac{1}{s^n}$, $n > 1$.

## 2.6 Alcune funzioni Laplace-antitrasformabili

Una particolare classe di funzioni antitrasformabili è costituita dalle funzioni razionali fratte proprie, cioé della forma $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, con $P(s)$, $Q(s)$ polinomi di grado $m$ e $n$ rispettivamente, con $m < n$. Supponiamo che $P(s)$ e $Q(s)$ non abbiano zeri in comune (se così non fosse potremmo sempre ricondurci a questa situazione); se gli zeri $s_1, \ldots, s_k$ di $Q(s)$ sono tutti semplici (cioé se $F(s)$ ha tutti poli semplici)[18] si ha

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s - s_i} \quad \text{dove } A_i = \lim_{s \to s_i} (s - s_i) \frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s \to s_i} \frac{P(s)}{Q'(s)};$$

ricordando la trasformata di Laplace della funzione esponenziale, si ricava

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](t) = \sum_{i=1}^{k} A_i e^{s_i t}. \tag{2.15}$$

Al secondo membro della (2.15) compaiono termini costanti se e solo se uno degli zeri $s_i$ vale zero.

[18] Ogni funzione razionale fratta propria coincide con la somma delle parti caratteristiche degli sviluppi di Laurent relativi agli zeri del polinomio a denominatore, cioé

$$F(s) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{-1}^{(i)}}{s - s_i} = \frac{a_{-1}^{(1)}}{s - s_1} + \cdots + \frac{a_{-1}^{(k)}}{s - s_k},$$

dove $a_{-1}^{(i)}$ è il residuo di $F$ nel polo semplice $s_i$.

Se gli zeri $s_1, \dots, s_k$ di $Q(s)$ hanno molteplicità, rispettivamente $n_i$, $i = 1, \dots, k$, con $n_1 + \dots + n_k = n$ (in tal caso ciascun $s_i$ è un polo di ordine $n_i$ per $F(s)$), si ha

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{(s - s_i)^j},$$

dove

$$A_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \to s_i} \frac{d^{n_i - j}}{ds^{n_i - j}} (s - s_i)^{n_i} \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad i = 1, \dots, k, \ j = 1, \dots, n_i;$$

quindi, ricordando anche l'espressione della trasformata di Laplace per funzioni polinomiali

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^j}, \quad t > 0,$$

e

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{j-1} e^{s_i t}}{(j-1)!}\right](s) = \frac{1}{(s - s_i)^j}, \quad t > 0, \tag{2.16}$$

si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{s_i t}. \tag{2.17}$$

Dal fatto che $\mathcal{L}^{-1}[F](t) = 0$ per $t < 0$ e ricordando come è definita la funzione di Heaviside, è utile osservare che se $f$ è Laplace-trasformabile allora $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]](t) = H(t) f(t)$ in ogni punto di continuità di $H(t) f(t)$ con $t \neq 0$.
Per esempio, $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ se $\mathrm{Re}(s) > 0$ e $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) = H(t)$ se $t \neq 0$; inoltre, essendo $\mathcal{L}[e^{s_0 t}](s) = \frac{1}{s - s_0}$ se $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$, si può esprimere $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_0}\right](t) = H(t) e^{s_0 t}$ se $t \neq 0$.

Da queste considerazioni segue che, se $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ con $Q(s)$ con zeri semplici, la formula (2.15) si può scrivere come

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](t) = H(t) \sum_{i=1}^{k} \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)} e^{s_i t},$$

detta **formula di espansione di Heaviside**.[19]

**Esempio 2.15.** *Calcoliamo l'antitrasformata di Laplace della funzione* $F(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$. *Si tratta di una funzione razionale fratta propria*[20], *il cui denominatore ha due zeri semplici in* $s = 0$ *e* $s = 1$. *Scomponendo* $F(s)$ *in fratti semplici*

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

*si ottiene*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = H(t)e^t - H(t) = H(t)(e^t - 1).$$

**Esempio 2.16.** *Calcoliamo l'antitrasformata di Laplace della funzione* $F(s) = \dfrac{s+2}{s^3 - s^2}$. *Il denominatore ha uno zero semplice* $s_1 = 1$ *e uno zero doppio* $s_2 = 0$ *(*$F(s)$ *ha un polo reale semplice e un polo reale doppio). Determiniamo le costanti* $A$, $B$, $C$ *tali che*

$$\frac{s+2}{s^3 - s^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2};$$

*dai calcoli risulta* $A = 3$, $B = -3$, $C = -2$*; quindi*

$$F(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s^2}$$

[19] Il metodo di calcolare l'antitrasformata di Laplace scomponendo la funzione $F$ in fratti semplici è chiamato anche *metodo* o *sviluppo di Heaviside*. La formula di espansione di Heaviside, così come le formule (2.15) e (2.17), possono anche essere espresse in termini di residui della funzione $F(s)e^{st}$ (si veda, per esempio, [3] o [4])

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](t) = H(t)\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(F(s)e^{st}; s_i).$$

[20] Se $F(s)$ è una funzione razionale fratta impropria, cioé in cui il grado del polinomio a numeratore è maggiore o uguale al grado del polinomio a denominatore, allora (tramite la divisione tra polinomi) essa è della forma $F(s) = T(s) + \frac{P(s)}{Q(s)}$, dove $T(s) \neq 0$ è un polinomio. Osserviamo che l'antitrasformata di $F(s)$ in tal caso non è una funzione ma una distribuzione.

*e*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = H(t)(3e^t - 2t - 3).$$

*Facciamo lo stesso calcolo sommando i residui della funzione $F(s)e^{st}$ in $s_1$ (polo semplice) e in $s_2$ (polo doppio):*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$$

$$= H(t)\left[Res\left(\frac{s+2}{s^3+s^2}e^{st}; s=1\right) + Res\left(\frac{s+2}{s^3+s^2}e^{st}; s=0\right)\right]$$

$$= H(t)\left\{\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\frac{s+2}{s-1}e^{st}\right] + \lim_{s\to 1}\frac{s+2}{s^2}e^{st}\right\} =$$

$$= H(t)\left\{\lim_{s\to 0}\left[\frac{-3}{(s-1)^2}e^{st} + \frac{s+2}{s-1}e^{st}\right] + 3e^t\right\} = H(t)(3e^t - 2t - 3).$$

**Esempio 2.17.** *Calcoliamo l'antitrasformata di Laplace della funzione $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$; essa ha due poli (semplici) complessi e coniugati $s_{1,2} = \pm i$. Dunque si ha*

$$\frac{1}{s^2+1} = \frac{A}{s+i} + \frac{B}{s-i}$$

*con*

$$A = \lim_{s\to -i}(s+i)\frac{1}{s^2+1} = -\frac{1}{2i} \quad e \quad B = \lim_{s\to i}(s-i)\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2i}.$$

*Quindi*

$$F(s) = -\frac{1}{2i(s+i)} + \frac{1}{2i(s-i)}$$

*e*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = H(t)\left(-\frac{1}{2i}e^{-it} + \frac{1}{2i}e^{it}\right) = H(t)\sin t;$$

*infatti nell'Esempio 2.4 si era trovato che $\mathcal{L}[\sin t](s) = \dfrac{1}{s^2+1}$.*

## 2.7 Applicazioni della trasformata di Laplace ad equazioni differenziali

La trasformata di Laplace è una trasformazione integrale nata per studiare equazioni differenziali, ma si è poi rivelata uno strumento utile anche per lo studio di equazioni integrali, equazioni differenziali con ritardo, circuiti elettrici e segnali.
Mentre la trasformata di Fourier viene utilizzata per la risoluzione di vari problemi formulati in $\mathbb{R}$ (o, più in generale, in $\mathbb{R}^n$), la trasformata di Laplace è usata in problemi ambientati nella semiretta reale positiva e accompagnata spesso da dati iniziali.
Inoltre la trasformata di Laplace consente di operare anche con funzioni a crescita esponenziale, che non sono trasformabili secondo Fourier nemmeno in ambito delle distribuzioni.

Nel seguito sono riportati alcuni esempi di applicazione della trasformata di Laplace alla risoluzione di problemi di Cauchy che coinvolgono equazioni lineari a coefficienti costanti.

**Esempio 2.18.** *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + 2y = 4 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

*($t \geq 0$) osserviamo che*

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) \qquad e \qquad \mathcal{L}[4](s) = \frac{4}{s}\,.$$

*Passando alle trasformate di Laplace nell'equazione si ottiene quindi (indicando con $Y(s)$ la trasformata di Laplace di $y(t)$)*

$$sY(s) + 2Y(s) = \frac{4}{s}$$

*da cui*

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

*Essendo*

$$\frac{4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2}$$

*si trova la (unica) soluzione del problema originale (infatti nei passaggi precedenti è stata sfruttata anche la condizioni iniziale)*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+2)}\right](t) = 2 - 2e^{-2t},$$

*come si può verificare risolvendo col metodo tradizionale.*

**Esempio 2.19.** *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

*passando alle trasformate di Laplace e indicando con $Y(s)$ la trasformata di Laplace di $y(t)$, dal Teorema 2.8 e dalla* (2.7) *si ha*

$$s^2 Y(s) - 3s - 1 + 4(sY(s) - 3) + 3Y = 0,$$

*da cui $Y(s)(s^2 + 4s + 3) = 3s + 13$ e, quindi*

$$Y(s) = \frac{3s + 13}{(s+1)(s+3)}.$$

*Decomponendo in fratti semplici $Y(s) = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+3}$ si ottiene $A = 5$ e $B = -2$:*

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3}.$$

*Quindi si ricava*

$$y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}.$$

**Esempio 2.20.** *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

*passando alle trasformate di Laplace si ha $Y(s)(s^2 + 2s + 1) = 1$ e, quindi*

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2},$$

*da cui, dalla* (2.16) *(o usando la formula dei residui di $F(s)e^{st}$) si ha*

$$y(t) = te^{-t}.$$

**Esempio 2.21.** *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 1 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \end{cases}$$

*passando alle trasformate di Laplace e indicando con* $Y(s)$ *la trasformata di Laplace di* $y(t)$*, dal Teorema 2.8 e dalla (2.7) si ha*

$$s^2Y(s) - 2s + 1 - 4(sY(s) - 2) + 3Y = \frac{1}{s},$$

*da cui* $Y(s)(s^2 - 4s + 3) = \dfrac{1}{s} + 2s - 9$ *e, quindi*

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 9s + 1}{s(s-1)(s-3)}.$$

*Decomponendo in fratti semplici* $Y(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s-3}$ *si ottiene* $A = \dfrac{1}{3}$, $B = 3$ *e* $C = -\dfrac{4}{3}$*:*

$$Y(s) = \frac{1}{3s} + \frac{3}{s-1} - \frac{4}{3(s-3)}.$$

*La soluzione del problema di Cauchy è, allora,*

$$y(t) = \frac{1}{3} + 3e^t - \frac{4}{3}e^{3t}.$$

**Esempio 2.22.** *Consideriamo il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \sin t \quad t \in [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = \alpha, \quad y'(0) = y'(\pi) = \beta. \end{cases}$$

*Si tratta dell'equazione dell'oscillatore armonico soggetto a una forza agente; osserviamo che le condizioni iniziali sono delle condizioni di periodicità.*
*Passando alle trasformate l'equazione diventa*

$$s^2Y(s) - \alpha s - \beta + \omega^2 Y = \frac{1}{s^2+1},$$

*da cui*

$$Y(s) = \frac{\alpha s^3 + \beta s^2 + \alpha s + \beta + 1}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)}$$
$$= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+\omega^2)} + \frac{\alpha s}{s^2+\omega^2} + \frac{\beta}{s^2+\omega^2}. \tag{2.18}$$

*Consideriamo prima $\omega = 0$, mostrando che in tal caso il problema non è ben posto; si ha*

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)s^2} + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2}.$$

*Antitrasformando si ricava*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)s^2}\right](t) + \alpha + \beta t.$$

*Ricordando il Teorema 2.9 osserviamo che*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[\sin t](s)\mathcal{L}[t](s)\right](t);$$

*quindi, posto $f(t) = \sin t$ e $g(t) = t$:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[(f \star g)(t)](s)\right](t) = (f \star g)(t).$$

*Quindi, esplicitando il prodotto di convoluzione tra $\sin t$ e $t$ (usando la* (2.8) *e anche la proprietà commutativa) si ha*

$$y(t) = \int_0^t (t-y)\sin y\, dy + \alpha + \beta t,$$

*da cui, usando le proprietà della convoluzione*

$$y'(t) = \int_0^t \sin y\, dy + \beta.$$

*Imponendo le condizioni iniziali in $t = \pi$, però, si trova*

$$\int_0^\pi \sin y(\pi - y)\, dy + \alpha + \beta\pi = \alpha,$$

*da cui*

$$\int_0^\pi \sin y(\pi - y)\, dy + \beta\pi = 0$$

*e, rispettivamente,*
$$\int_0^\pi \sin y\, dy = 0,$$
*dove l'ultima relazione è falsa.*

*Consideriamo ora il caso* $\omega \neq 0$*; applicando la trasformata inversa nella* (2.18)*, usando nuovamente il legame tra la trasformazione di Laplace e la convoluzione e ricordando che* $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ *e* $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ *si trova*
$$y(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin[\omega(t-y)] \sin y\, dy + \alpha\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega}\sin(\omega t), \qquad (2.19)$$
*da cui*
$$y'(t) = \int_0^t \cos[\omega(t-y)] \sin y\, dy - \alpha\omega\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t).$$
*Imponendo le condizioni iniziali in* $t = 0$ *si trovano (ovviamente) due identità (infatti le condizioni in* $t = 0$ *sono già state usate passando alle trasformate), mentre imponendo le condizioni in* $t = \pi$ *si ricava*
$$\alpha\cos(\omega\pi) + \frac{\beta}{\omega}\sin(\omega\pi) + \frac{1}{\omega}\int_0^\pi \sin[\omega(\pi-y)]\sin y\, dy = \alpha$$
*e*
$$-\alpha\omega\sin(\omega\pi) + \beta\cos(\omega\pi) + \frac{1}{\omega}\int_0^\pi \cos[\omega(\pi-y)]\sin y\, dy = \beta;$$
*Si ottiene dunque il seguente sistema di due equazioni nelle incognite* $\alpha$ *e* $\beta$*:*
$$\begin{cases} \alpha[1-\cos(\omega\pi)] - \dfrac{\beta}{\omega}\sin(\omega\pi) = \dfrac{1}{\omega}\int_0^\pi \sin[\omega(\pi-y)]\sin y\, dy \\ \alpha\omega\sin(\omega\pi) + \beta[1-\cos(\omega\pi)] = \int_0^\pi \cos[\omega(\pi-y)]\sin y\, dy. \end{cases}$$
*Il determinante del sistema*
$$\begin{vmatrix} 1-\cos(\omega\pi) & -\frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} \\ \omega\sin(\omega\pi) & 1-\cos(\omega\pi) \end{vmatrix} = 2[1-\cos(\omega\pi)]$$
*risulta diverso da zero se e solo se* $\omega \neq 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ *e, in tal caso, il problema assegnato ammette l'unica soluzione data dalla* (2.19)*.*

*Nel caso $\omega = 2k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (se $k = 0$ torniamo al caso $\omega = 0$), la soluzione deve avere la stessa periodicità del termine noto dell'equazione. È noto che*[21] *l'equazione $y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t)$ con condizioni di periodicità in generale non ammette soluzione se $\omega^2 = 4k^2$, a meno che $f(t)$ non sia della forma $e^{2int}$, con $n^2 \neq k^2$: in tal caso, ne avrà infinite. Dato che, in questo caso $f(t) = \sin t$ e $n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, il problema ammette infinite soluzioni. Infatti il sistema diventa*

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2k} \int_0^\pi \sin[2k\pi - 2ky] \sin y \, dy \\ 0 = \int_0^\pi \cos[2k\pi - 2ky] \sin y \, dy, \end{cases}$$

*cioé*

$$\begin{cases} \int_0^\pi \sin(2ky) \sin y \, dy = 0 \\ \int_0^\pi \cos(2ky) \sin y \, dy = 0, \end{cases}$$

*che è verificato come si può constatare usando le proprietà del sistema trigonometrico ortogonale in $(-\pi, \pi)$.*

**Esempio 2.23.** *Consideriamo il seguente problema di Cauchy, simile a quello dell'esempio precedente, ma in cui non è richiesto che la soluzione sia periodica:*

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

*Sfruttando i calcoli fatti nell'Esempio 2.22 con $\omega = 2$, $\alpha = \beta = 1$. si trova*

$$Y(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 2}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

*Il denominatore della frazione ottenuta ha quattro zeri semplici, quindi $Y(s)$ si potrebbe scomporre nella somma di quattro fratti semplici, ma il fatto che ci siano due coppie di zeri complessi e coniugati permette di usare un altro metodo: cerchiamo $A$, $B$, $C$ e $D$ tali che*

$$\frac{s^3 + s^2 + s + 1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4};$$

[21] Si veda, per esempio, [11], pag. 247, oppure [5], pag. 421.

*si trova* $A = 0$*,* $B = \frac{1}{3}$*,* $C = 1$ *e* $D = \frac{2}{3}$*, cioé risulta*

$$Y(s) = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{s+2/3}{s^2+4};$$

*ricordando allora le trasformate di Laplace delle funzioni trigonometriche si trova*

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right] \\ &= \frac{1}{3}\sin t + \cos(2t) + \frac{1}{3}\sin(2t). \end{aligned}$$

*più in generale risulta utile osservare (ricordando l'Esempio 2.8) che*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a(s-s_0)+b}{(s-s_0)^2+c}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[a\frac{(s-s_0)}{(s-s_0)^2+c} + \frac{b}{c}\frac{c}{(s-s_0)^2+c}\right] \\ &= \left[a\cos(ct) + \frac{b}{c}\sin(ct)\right]e^{s_0t}. \end{aligned}$$

# Bibliografia


[1] T.M. Apostol, *Mathematical analysis*, Second Edition, Pearson College Div (1974).

[2] L.V. Ahlfors, *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Third Edition, McGraw-Hill (1979).

[3] G.C. Barozzi, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli (2001).

[4] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi matematica*, McGraw-Hill (2011).

[5] M. Bramanti, *Metodi di analisi matematica per l'ingegneria*, Esculapio (2017).

[6] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, New York (2011).

[7] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience Publishers, Inc., New York (1953).

[8] G. Di Fazio, M. Frasca, *Metodi matematici per l'ingegneria*, Monduzzi (2009).

[9] L.C. Evans, *Partial differential equations*, AMS (2010).

[10] F. Gazzola, F. Tomarelli, M. Zanotti, *Analisi complessa, trasformate, equazioni differenziali*, Esculapio (2015).

[11] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 2*, seconda edizione Zanichelli (2015).

[12] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill Inc., New York (1991).