

Esame di Calcolo delle Probabilità

(2 ore e 30 minuti)

Si prega di scrivere in maniera chiara, risposte non leggibili non saranno corrette. In tutti gli esercizi si richiede di illustrare il proprio lavoro.

Esercizio 1 (20 punti). *Consideriamo il seguente gioco: abbiamo due urne A e B indistinguibili dall'esterno che contengono delle palline colorate. Le urne hanno la seguente composizione:*

- *nell'urna A ci sono 2 palline rosse, 2 gialle, 2 verdi;*
- *nell'urna B, 2 palline rosse, 3 gialle, e 4 verdi.*

Scegliamo a caso una delle due urne e peschiamo una delle palline.

- (a) *Qual è la probabilità che la pallina estratta sia gialla?*
- (b) *Supponiamo di estrarre una pallina gialla. Qual è la probabilità che provenga dall'urna B? Si descriva un algoritmo per stimare questa probabilità utilizzando R.*
- (c) *Estraiamo una pallina e osserviamo che è gialla. Per ottenere più informazioni estraiamo una seconda pallina dall'altra urna e osserviamo che è verde. Qual è la probabilità che la prima urna da cui abbiamo estratto fosse l'urna A?*
- (d) *I due eventi estrarre dall'urna B e ottenere pallina gialla sono indipendenti?*

Soluzione. *Definiamo i seguenti eventi*

- *A: si pesca dall'urna A;*
- *B: si pesca dall'urna B;*
- *R: si estrae una pallina rossa;*
- *G: si estrae una pallina gialla;*
- *V: si estrae una pallina verde.*

(a) *Usando il teorema delle probabilità totali otteniamo che*

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G|B)\mathbb{P}(B) = 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/2 = 1/3.$$

(b) *Usiamo il teorema di Bayes*

$$\mathbb{P}(B|G) = \frac{\mathbb{P}(G|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(G)}.$$

Usando il risultato al punto precedente abbiamo che

$$\mathbb{P}(B|G) = \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/3} = 1/2.$$

Possiamo usare il teorema dei grandi numeri per stimare empiricamente la probabilità. Per esempio col seguente codice R.

```

1  urnaA=c('v','v','r','r','g','g');
2  urnaB=c('v','v','v','v','r','r','g','g','g');
3  urne=c('A','B');
4  n=100000
5  s=0;
6  nG=0
7  for(i in c(1:n)){
8      urna_scelta=sample(urne,size=1);
9      if (urna_scelta=='A'){
10         pallina_estratta=sample(urnaA,size=1);
11     }
12     else{
13         pallina_estratta=sample(urnaB,size=1);
14     }
15     if (pallina_estratta=='g'){
16         nG=nG+1;
17     }
18     if (pallina_estratta=='g' && urna_scelta=='B'){
19         s=s+1;
20     }
21 }
22 p_empirica=s/nG

```

(c) Definiamo i seguenti eventi

- A_1 : la prima pallina è stata estratta dall'urna A (e di conseguenza la seconda da B);
- B_1 : la prima pallina è stata estratta dall'urna B (e di conseguenza la seconda da A);
- G_1 : la prima pallina estratta è gialla;
- V_2 : la seconda pallina estratta è verde.

Vogliamo calcolare $\mathbb{P}(A_1|G_1 \cap V_1)$. Usiamo il teorema di Bayes

$$\mathbb{P}(A_1|G_1 \cap V_1) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap V_1|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(G_1 \cap V_1)}.$$

Il primo termine $\mathbb{P}(G_1 \cap V_1|A_1)$ è la probabilità di estrarre prima una pallina gialla da A e poi una verde da B. Possiamo vedere le due estrazioni come indipendenti per cui

$$\mathbb{P}(G_1 \cap V_1|A_1) = \mathbb{P}(G|A)\mathbb{P}(V|B) = 1/3 \cdot 4/9 = 4/27.$$

Ovviamente $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A) = 1/2$. Resta da calcolare $\mathbb{P}(G_1 \cap V_2)$. Dal teorema delle probabilità totali e ragionando come prima otteniamo

$$\mathbb{P}(G_1 \cap V_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap V_2|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(G_1 \cap V_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) = 1/3 \cdot 4/9 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/2 = 7/54.$$

Da cui

$$\mathbb{P}(A_1|G_1 \cap V_1) = \frac{4/27 \cdot 1/2}{7/54} = 4/7.$$

(d) Sappiamo che $\mathbb{P}(G|B) = 1/3$, quindi

$$\mathbb{P}(G \cap B) = \mathbb{P}(G|B)\mathbb{P}(B) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6.$$

Inoltre $\mathbb{P}(G)\mathbb{P}(B) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$. Allora G e B sono indipendenti.

Esercizio 2 (20 punti). Consideriamo lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dove $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{A} è la σ -algebra dei Borelliani, e \mathbb{P} è la probabilità uniforme su $[0, 1]$. Definiamo le variabili aleatorie $\{X_n\}$ come

$$X_n(\omega) = n^{1/3} 1_{[0, \frac{1}{\sqrt{n}})}(\omega) = \begin{cases} n^{1/3} & 0 \leq \omega < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$$

(a) Si calcolino le densità discrete e le funzioni di ripartizione di X_n e si dimostri che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$;

(b) Si calcoli $\mathbb{E}(|X_n|^p)$ con $p \geq 1$. Per quali $p \in [1, \infty)$ si ha che $X_n \xrightarrow{L^p} 0$?

(c) Si dimostri che $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$.

Soluzione. (a) Sappiamo che $X_n(\Omega) = \{0, n^{1/3}\}$, quindi ci basta calcolare $p(0) = \mathbb{P}(X_n = 0)$ e $p(n^{1/3}) = \mathbb{P}(X_n = n^{1/3})$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = n^{1/3}) &= \mathbb{P}(\{\omega \in [0, 1] : X_n(\omega) = n^{1/3}\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in [0, 1] : \omega < \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Di conseguenza $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Calcoliamo ora la funzione di ripartizione $F_n(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t)$. Essendo la variabile aleatoria discreta la funzione di ripartizione è costante a tratti con salti nei valori assunti da X_n , per cui

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \leq t < n^{1/3}, \\ 1 & t \geq n^{1/3}. \end{cases}$$

Calcoliamo ora $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \leq t < \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/3}, \\ 1 & t \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/3}, \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Quest'ultima è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria costante uguale a 0, per cui $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

(b) Calcoliamo $\mathbb{E}(|X_n|^p)$

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = 0^p p(0) + |n^{1/3}|^p p(n^{1/3}) = 0 + \frac{n^{p/3}}{\sqrt{n}} = n^{p/3-1/2} = n^{\frac{2p-3}{6}}.$$

Abbiamo che $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ se $\mathbb{E}(|X_n|^p) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Questo accade solo se $\frac{2p-3}{6} < 0$, cioè se $p < 3/2$.

(c) Mostriamo ora che $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$. Vogliamo calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ per ogni $\omega \in [0, 1]$. Sia $\omega = 0$, osserviamo che $1_{[0, \frac{1}{\sqrt{n}})}(0) = 1$ per ogni n . Ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/3} = \infty.$$

Sia ora $\omega > 0$, allora esiste un \bar{n} tale che per ogni $n > \bar{n}$ si ha che $\omega > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Da questo otteniamo che per ogni $n > \bar{n}$ vale $1_{[0, \frac{1}{\sqrt{n}})}(\omega) = 0$ e quindi (per ogni $n > \bar{n}$) si ha che $X_n(\omega) = 0$. Ne segue che, se $\omega \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Abbiamo ottenuto che

$$A = \{\omega \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0\} = (0, 1]$$

e quindi $\mathbb{P}(A) = 1$ che è equivalente a $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$.

Esercizio 3 (10 punti). La macchina M_1 , costituita dagli apparecchi A , B , e C disposti in serie, non è più funzionante se almeno uno dei tre si guasta. La macchina M_2 , costituita dagli apparecchi A , B , e C disposti in parallelo, smette di funzionare se tutti e tre si guastano. Gli apparecchi sono uguali e indipendenti. Detta T la variabile aleatoria che misura il tempo di vita (in anni) di ciascun apparecchio si ha che $T \sim \text{Esp}(0.3)$. Considerando le due macchine indipendenti si calcolino la seguenti probabilità

(a) Entrambe le macchine continuano a funzionare dopo un anno di vita;

(b) Almeno una delle macchine continua a funzionare dopo un anno di vita.

Soluzione. Chiamiamo T_A , T_B , e T_C le variabili aleatorie che misurano i tempi di vita di A , B , e C , rispettivamente. Inoltre siano T_1 e T_2 le variabili aleatorie che misurano i tempi di vita di M_1 e M_2 .

Calcoliamo la legge di T_1 usandone la funzione di ripartizione.

$$1 - F_{T_1}(t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(\min(T_A, T_B, T_C) > t) = \mathbb{P}(T_A > t, T_B > t, T_C > t)$$

Dall'indipendenza dei componenti e dalle leggi di T_A , T_B , e T_C otteniamo

$$1 - F_{T_1}(t) = \mathbb{P}(T_A > t)\mathbb{P}(T_B > t)\mathbb{P}(T_C > t) = (e^{-\lambda t})^3 = e^{-3\lambda t},$$

con $\lambda = 0.3$. Ne deduciamo che $T_1 \sim \text{Esp}(3\lambda)$.

Calcoliamo ora la funzione di ripartizione di T_2

$$F_{T_2}(t) = \mathbb{P}(T_2 \leq t) = \mathbb{P}(\max(T_A, T_B, T_C) \leq t) = \mathbb{P}(T_A \leq t)\mathbb{P}(T_B \leq t)\mathbb{P}(T_C \leq t),$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato l'indipendenza di T_A , T_B , e T_C . Ricordando la legge di T_A , T_B , e T_C abbiamo

$$F_{T_2}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^3.$$

(a) Poiché abbiamo assunto le macchine indipendenti abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > 1, T_2 > 1) &= \mathbb{P}(T_1 > 1)\mathbb{P}(T_2 > 1) \\ &= (1 - F_{T_1}(1))(1 - F_{T_2}(1)) \\ &= e^{-3\lambda} \left(1 - (1 - e^{-\lambda})^3\right) \approx 0.32 \end{aligned}$$

(b) Sappiamo che $(\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\})^c = \{T_1 > 1\}^c \cap \{T_2 > 1\}^c = \{T_1 \leq 1\} \cap \{T_2 \leq 1\}$. Allora

$$1 - \mathbb{P}(\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\}) = \mathbb{P}((\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\})^c) = \mathbb{P}(T_1 \leq 1)\mathbb{P}(T_2 \leq 1),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'indipendenza di T_1 e T_2 . Quindi

$$\mathbb{P}(\{T_1 > 1\} \cup \{T_2 > 1\}) = 1 - F_{T_1}(1)F_{T_2}(1) = 1 - (1 - e^{-3\lambda})(1 - e^{-\lambda})^3 \approx 0.99.$$

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.
F. di rip.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$U([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$