ANALISI MATEMATICA I - CORSO DI LAUREA IN FISICA

IL CALCOLO INTEGRALE

prof. Antonio Greco

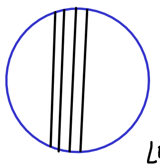
8 - 19 GENNAIO 2021

6 LEZIONI (12,5%)

VE 8 GEN 2021

IL CALCOLO INTEGRALE

UNO DEI PRECURSORI FU ARCHIMEDE, FAMOSO PER IL CALCOLO DELL'AREA DEL CERCHIO E DI ALTRE FIGURE NOTEVOLI. CON L'INTRODUZIONE DELLA GEOMETRIA ANALITICA, I SUOI METODI SI SONO POTUTI APPLICARE CON MAGGIORE GENERALITÀ. IN PARTICOLARE, BONAVENTURA CAVALIERI, CONTEMPORANEO DI GALILEO, CONCEPÌ LE FIGURE PIANE COME COSTITUITE DA INFINITE PARTI (SEGMENTI) DETTE « INDIVISIBILI »



LE SUE IDEE SONO INCORPORATE NEL MODERNO CALCOLO INTEGRALE. ANCORA NELL'OTTOCENTO, FOURIER (THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR) SOSTIENE CHE « L'INTEGRALE È UN'AREA ».

INVECE, PER ULISSE DINI (FONDAMENTI PER LA TEORICA DELLE FUNZIONI DI VARIABILI REALI) LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE PASSA ATTRAVERSO IL CONCETTO DI PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE DATA.

DEFINIZIONE: UNA FUNZIONE DERIVABILE $F:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ SI DICE PRIMITIVA, O ANCHE ANTIDERIVATA DI UNA FUNZIONE $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ SE RISULTA $F'(x)=f(x)$ PER OGNI $x\in(a,b)$.

ESEMPI: LA FUNZIONE $F(x)=\operatorname{arctg} x$ È UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ SULL'INTERVALLO $(-\infty,+\infty)$ PERCHÉ RISULTA $F'(x)=$

$$=\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x=\frac{1}{1+x^2}=f(x) \text{ PER OGNI } x\in\mathbb{R}.$$

OSSERVAZIONE: ANCHE LA FUNZIONE $F_1(x)=1+\operatorname{arctg} x$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ PERCHÉ RISULTA

$$F_1'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

SIMILMENTE, LA FUNZIONE $F_c(x)=c+\operatorname{arctg} x$, CON $c\in\mathbb{R}$, È UNA PRIMITIVA DI $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

PROPOSIZIONE: SE $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ È UNA PRIMITIVA DI $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, ALLORA LA FUNZIONE $F_c(x)=c+F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI f QUALUNQUE SIA $c\in\mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE: RISULTA $\dfrac{d}{dx}F_c(x)=F'(x)$ E, PER IPOTESI, $F'(x)=f(x)$. LA TESI SEGUE.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Primitive

Test

La tabella qui sotto riporta, nella prima colonna, alcune funzioni. Per ciascuna f occorre indicare, contrassegnando la casella corrispondente, se esiste una funzione $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (in tal caso, si dice che F è una *primitiva* di f).

Scrivere nell'ultima colonna l'espressione di una tale funzione $F(x)$ (se la funzione f ammette primitiva).

Funzione $f(x)$	Ammette primitiva	Espressione di $F(x)$ (se esiste)
x	☒ Sì / No ☐	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	☒ Sì / No ☐	$\frac{1}{3}x^3$
e^x	☒ Sì / No ☐	e^x
e^{-x}	☒ Sì / No ☐	$-e^{-x}$
$2\,\lvert x\rvert$	☒ Sì / No ☐	(1) $\lvert x\rvert\, x$
$[x]$ (parte intera)(2)	☐ Sì / No ☒	

(1) Vedere il problema 1 della serie [301]
(2) Trovare $F'(0^-)$ col teorema di Lagrange

PER TROVARE UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE $f(x) = 2|x|$ SEGUIAMO IL SUGGERIMENTO E CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $F(x) = |x|\, x$.

SAPPIAMO DAL 10/12 CHE $F'(0) = 0$. OSSERVIAMO ORA CHE $F(x) = \begin{cases} x^2, & \text{SE } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{SE } x < 0 \end{cases}$

PERCIÒ $F(x)$ È DERIVABILE ANCHE PER $x \neq 0$, E SI TROVA CHE $F'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{SE } x \geq 0 \\ -2x, & \text{SE } x < 0 \end{cases}$

RICORDANDO CHE $|x| = \begin{cases} x, & \text{SE } x \geq 0 \\ -x, & \text{SE } x < 0 \end{cases}$

POSSIAMO SCRIVERE $F'(x) = 2|x|$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. DUNQUE LA FUNZIONE $F(x) = |x|\, x$ È UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE $f(x) = 2|x|$ SULL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$.

PER AFFRONTARE L'ULTIMA DOMANDA, SEGUIAMO IL SUGGERIMENTO. INDICATA CON $F(x)$ UN'EVENTUALE PRIMITIVA (INCOGNITA) DELLA FUNZIONE $f(x) = [x]$, PER IL TEOREMA DI LAGRANGE (CONSEGUENZA "A" DEL 18/12) POSSIAMO DIRE CHE SE ESISTE IL $\lim_{x \to 0^-} F'(x)$ ALLORA SI HA

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(h)}{h} = \lim_{x \to 0^-} F'(x).$$

PER PROSEGUIRE, SOSTITUIAMO A $F'(x)$ LA FUNZIONE $f(x) = [x]$

MA 12 GEN 2021

AVENDO STUDIATO IN DETTAGLIO LA FUNZIONE $f(x) = [x]$, SAPPIAMO CHE $\lim_{x \to 0^-} F'(x) = \lim_{x \to 0^-} [x] = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$.

D'ALTRO CANTO, ESSENDO $F(x)$ PER IPOTESI UNA PRIMITIVA DI $f(x) = [x]$, DEVE RISULTARE $F'(x) = [x]$ PER OGNI x, E QUINDI, IN PARTICOLARE, $F'(0) = [0] = 0$.

IL TEOREMA DI LAGRANGE CI ASSICURA CHE, SE ESISTE UNA PRIMITIVA $F(x)$ DELLA FUNZIONE $f(x) = [x]$, ALLORA

$$F'(0) = \lim_{x \to 0^-} F'(x)$$

MA QUESTO È IN CONTRASTO CON I RISULTATI PRECEDENTI, SECONDO I QUALI $F'(0) = 0$ E $\lim_{x \to 0^-} F'(x) = -1$. PERCIÒ POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA FUNZIONE $f(x) = [x]$ NON AMMETTE PRIMITIVA. CON LO STESSO RAGIONAMENTO SI DIMOSTRA CHE LE FUNZIONI CHE PRESENTANO DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE (SALTI) NON HANNO PRIMITIVE.

<u>OSSERVAZIONE:</u> IL RAGIONAMENTO PRECEDENTE RICHIEDE DI SAPERE CHE ESISTE IL LIMITE $\lim_{x \to x_0} F'(x)$. TALVOLTA QUESTO LIMITE NON ESISTE: $F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{SE } x \neq 0 \\ 0, & \text{SE } x = 0. \end{cases}$

SI TROVA CHE $F'(0) = 0$ ED IL $\lim_{x \to 0} F'(x)$ NON ESISTE.

L'INTEGRALE INDEFINITO

L'INTEGRALE INDEFINITO DI UNA FUNZIONE $f(x)$ È L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI $f(x)$ E SI INDICA CON IL SIMBOLO $\int f(x)\,dx$.

SAPPIAMO DA VENERDÌ 8 GENNAIO CHE, A PARTIRE DA UNA QUALUNQUE PRIMITIVA $F(x)$ SE NE POSSONO OTTENERE INFINITE PONENDO $F_C(x) = F(x) + C$, CON $C \in \mathbb{R}$. VERIFICHIAMO CHE NON VI SONO ALTRE PRIMITIVE ALL'INFUORI DI QUESTE.

<u>PROPOSIZIONE</u>: SE $F, G: (a,b) \to \mathbb{R}$ SONO DUE PRIMITIVE DI UNA STESSA $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, ALLORA LA DIFFERENZA $F(x) - G(x)$ È COSTANTE IN (a,b).

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: PER IPOTESI, RISULTA $F'(x) = f(x) = G'(x)$ PER OGNI $x \in (a,b)$. MA ALLORA $\frac{d}{dx}\left(F(x) - G(x)\right) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$.

PER LA CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI A DERIVATA NULLA (CONSEGUENZA "C" DEL TEOREMA DI LAGRANGE, LEZIONE DEL 18/12) LA DIFFERENZA $F(x) - G(x)$ È COSTANTE, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

IN CONCLUSIONE, L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI UNA DATA FUNZIONE $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ O È VUOTO, OPPURE SI OTTIENE SOMMANDO LE COSTANTI $C \in \mathbb{R}$ AD UNA QUALUNQUE PRIMITIVA $F(x)$.

MA 12 GEN 2021

PERTANTO L'INTEGRALE INDEFINITO DI UNA FUNZIONE $f(x)$ SI SCRIVE SOLITAMENTE CON LA NOTAZIONE

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

AD ESEMPIO, CON RIFERIMENTO ALLE FUNZIONI DEL TEST [401] POSSIAMO SCRIVERE:

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

AD ESEMPIO, LA FUNZIONE $\frac{1}{2}x^2 - 7$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x) = x$, E NON VI SONO ALTRE PRIMITIVE ALL'INFUORI DELLE FUNZIONI $\frac{1}{2}x^2 + C$ CON $C \in \mathbb{R}$.

SIMILMENTE, POSSIAMO SCRIVERE

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

$$\int 2|x|\,dx = |x|\,x + C$$

MA 12 GEN 2021

INTEGRALI IMMEDIATI

SE PRENDIAMO $\alpha \neq -1$, POSSIAMO SCRIVERE:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

PER $\alpha = -1$ ABBIAMO, INVECE,

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$$

FORMULA APPLICABILE NELL'INTERVALLO $(0, +\infty)$ COME PURE NELL'INTERVALLO $(-\infty, 0)$.

SI HA, INOLTRE:

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

E ANCORA, SE $b \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, POSSIAMO SCRIVERE

$$\int b^x \, dx = \frac{b^x}{\log b} + C$$

ME 13 GEN 2021

INTEGRALI QUASI IMMEDIATI

SAPENDO CHE $\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))\, g'(x)$

POSSIAMO SCRIVERE

$$\boxed{\int F'(g(x))\, g'(x) \, dx = F(g(x)) + C}$$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO $F(t) = \log|t|$

SI HA, ALLORA:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \log|g(x)| + C$$

ESEMPIO:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx =$$

$$= - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = - \log|\cos x| + C$$

ESEMPIO:

$$\int \frac{1}{x \log x} \, dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x} \, dx = \log|\log x| + C$$

PASSIAMO ADESSO A CONSIDERARE LA FUNZIONE $F(t) = \frac{1}{2} t^2$, COSICCHÉ SI PUÒ SCRIVERE:

$$\int g(x)\, g'(x) \, dx = \frac{1}{2} g^2(x) + C$$

ESEMPIO:

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$$

ESEMPIO:

$$\int \frac{\log x}{x} \, dx = \int \frac{1}{x} \log x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} (\log x)^2 + C = \frac{1}{2} \log^2 x + C$$

NELLO STESSO ORDINE DI IDEE, SI PUÒ PRENDERE $F(t)=\frac{1}{3}t^3$ COSICCHÉ SI HA

$$\int g^2(x)\, g'(x)\, dx = \frac{1}{3} g^3(x) + C$$

ESEMPIO:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

CAMBIAMO PUNTO DI VISTA: LASCIAMO $F(t)$ GENERICA, E PRENDIAMO $g(x)=mx$ CON $m \neq 0$. SI HA ALLORA

$$\int F'(mx)\, m\, dx = F(mx) + C$$

QUESTA RELAZIONE CONSENTE DI SVOLGERE L'INTEGRALE $\int f(mx)\, dx$ A CONDIZIONE DI SAPERE CHE $\int f(t)\, dt = F(t) + C$:

POSSIAMO INFATTI SCRIVERE

$$\int f(mx)\, dx = \frac{1}{m} F(mx) + C$$

ESEMPIO: $\int e^{mx}\, dx = \frac{1}{m} e^{mx} + C$

ESEMPIO: $\int \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{-\cos mx}{m} + C$

ESEMPIO: $\int \frac{1}{2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

ME 13 GEN 2021

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

SUPPONIAMO CHE $\boxed{\int f(t)\, dt = F(t) + C}$

E CONSIDERIAMO LA FUNZIONE COMPOSTA $F(g(x))$, DOVE LA FUNZIONE $t = g(x)$ È DERIVABILE NELL'INTERVALLO CONSIDERATO ED HA LA DERIVATA DIVERSA DA ZERO, COSICCHÉ ESISTE LA FUNZIONE INVERSA $x = g^{-1}(t)$.

PER LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA, SI HA $\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))\, g'(x)$

E QUINDI

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

$$= \left(F(t) + C\right)_{t=g(x)} = \left(\int f(t)\, dt\right)_{t=g(x)}$$

QUINDI LE PRIMITIVE DELLA FUNZIONE $f(g(x))\, g'(x)$ CORRISPONDONO A QUELLE DELLA FUNZIONE $f(t)$ TRAMITE LA SOSTITUZIONE $t = g(x)$.

IN PRATICA, PUÒ ESSERE CONVENIENTE TRASFORMARE L'INTEGRALE $\int f(t)\, dt$ IN

$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$. LA LORO UGUAGLIANZA ESPRIME LA REGOLA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

ESEMPIO: SVOLGIAMO L'INTEGRALE

$\int \sqrt{3-2t}\, dt$ CON LA SOSTITUZIONE $t = \frac{3-x}{2}$

LA CUI INVERSA È $x = 3-2t$. PER LA REGOLA APPENA VISTA, SI HA:

$$\int \sqrt{3-2t}\, dt = \int \sqrt{x}\, \frac{-1}{2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{3} x^{3/2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}(3-2t)^{3/2} + C$$

VERIFICA: $\frac{d}{dt}\left\{ -\frac{1}{3}(3-2t)^{3/2} \right\} =$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{3}{2}(3-2t)^{1/2} \cdot (-2) = \sqrt{3-2t}$$

ESEMPIO: PER SVOLGERE L'INTEGRALE

$\int \operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha$ USIAMO INNANZITUTTO LE IDENTITÀ TRIGONOMETRICHE. DALLE FORMULE DI ADDIZIONE (16 DICEMBRE) PONENDO $\alpha = \beta$ SI OTTIENE

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \end{cases}$$

DALLA PRIMA DI ESSE SI RICAVA $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$ E QUINDI

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

POSSIAMO ALLORA SCRIVERE $\int \operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha =$

$$= \int \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\, d\alpha = \int \frac{1}{2}\, d\alpha - \int \frac{1}{2}\cos 2\alpha\, d\alpha$$

PER ANDARE AVANTI, OSSERVIAMO CHE

$\int \frac{1}{2}\, d\alpha = \frac{\alpha}{2} + C$. IN GENERALE,

SI HA $\int m\, d\alpha = m\alpha + C$ QUALUNQUE SIA LA COSTANTE m. RESTA DA SVOLGERE L'INTEGRALE $\int \cos 2\alpha\, d\alpha$, CHE È QUASI IMMEDIATO.

CON LA SOSTITUZIONE $2\alpha = x$, LA CUI INVERSA È $\alpha = \frac{x}{2}$, SI TROVA $\int \cos 2\alpha\, d\alpha =$

$$= \int (\cos x)\, \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha + C.$$

FINALMENTE, POSSIAMO SCRIVERE $\int \operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha =$

$$= \int \frac{1}{2}\, d\alpha - \int \frac{1}{2}\cos 2\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\alpha + C$$

$$= \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C$$

INCIDENTALMENTE, ABBIAMO USATO LA LINEARITÀ DELL'INTEGRALE:

SE $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ E $\int g(x)\, dx = G(x) + C$, ALLORA, COMUNQUE SI PRENDANO DUE COSTANTI λ E μ, SI HA CHE

$$\int \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda F(x) + \mu G(x) + C$$

$$= \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx.$$ È UNA CONSEGUENZA IMMEDIATA DEL FATTO CHE

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda F(x) + \mu G(x)\right) = \lambda F'(x) + \mu G'(x)$$

INTEGRALI BANALI

ABBIAMO VISTO CHE $\int m \, dx = mx + C$

IN PARTICOLARE, CON $m = 1$ SI HA

$$\int dx = x + C$$

E CON $m = 0$ SI HA $\int 0 \, dx = C.$

INOLTRE, SE $F(x)$ È UNA FUNZIONE DERIVABILE, SI HA

$$\int F'(x) \, dx = F(x) + C$$

SI DICE CHE «L'INTEGRAZIONE È L'OPERAZIONE INVERSA DELLA DERIVAZIONE».

OSSERVAZIONE: LA VARIABILE DI INTEGRAZIONE È UNA VARIABILE MUTA, COME L'INDICE DI SOMMA IN UNA SOMMATORIA. DUNQUE:

$$\int m \, d\alpha = \int m \, dx,$$

$$\int \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = \int \operatorname{sen} x \, dx,$$

$$\int e^t \, dt = \int e^x \, dx.$$

VARIABILE MUTA SIGNIFICA CHE 1) SI PUÒ USARE QUALUNQUE LETTERA, E 2) ESSA NON HA UN VALORE PARTICOLARE AL DI FUORI DEL SEGNO DI INTEGRALE.

GI 14 GEN 2021

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

SCATURISCE, GRAZIE ALLA LINEARITÀ DELL'INTEGRALE, DALLA REGOLA DI DERIVAZIONE DEL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI: CONSIDERIAMO DUE FUNZIONI DERIVABILI $F(x)$ E $G(x)$.

POSTO $f(x) = F'(x)$ E $g(x) = G'(x)$, SAPPIAMO CHE $\left(F(x)G(x)\right)' =$

$f(x)G(x) + F(x)g(x)$ E QUINDI

$$f(x)G(x) = \boxed{\left(F(x)G(x)\right)'} - F(x)g(x).$$

SE IL PRODOTTO $F(x)g(x)$ AMMETTE PRIMITIVA, ALLORA, PER LA LINEARITÀ DELL'INTEGRALE, POSSIAMO SCRIVERE

$$\int f(x)G(x)\,dx = \boxed{\int \left(F(x)G(x)\right)' dx} + \\ - \int F(x)g(x)\,dx$$

E QUINDI, PIÙ SEMPLICEMENTE,

$$\boxed{\int f(x)G(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int F(x)g(x)\,dx}$$

(REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI).

ESEMPIO: PONENDO $f(x) = \operatorname{sen} x$ E $G(x) = x$

SI TROVA $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$ VERIFICA:

$$\frac{d}{dx}\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x\right) =$$

$$= -\cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x = x \operatorname{sen} x$$

ESEMPIO: CON $f(x) = \cos x$ E $G(x) = x^2$ SI

TROVA $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x \, dx$

$= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx =$

$= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \left(-x \cos x + \operatorname{sen} x \right) + C$

$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$

$= \left(x^2 - 2 \right) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + C$

GI 14 GEN 2021

L'INTEGRALE DEFINITO

I PRINCIPALI FRAINTENDIMENTI SONO DUE:

1) « L'INTEGRALE È UN'AREA »

2) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

STUDIAMO LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE DEFINITO DATA DA BERNHARD RIEMANN NEL 1854, CHE È ATTUALMENTE UTILIZZATA.

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ED UNA QUALUNQUE SUDDIVISIONE (O PARTIZIONE) DELL'INTERVALLO $[a,b]$ IN n PARTI, ANCHE DISUGUALI, MEDIANTE PUNTI x_k. SI PONE $x_0 = a$, $x_n = b$, E $x_{k-1} < x_k$ PER OGNI $k = 1, \dots, n$. PER OGNI SUDDIVISIONE, PRENDIAMO (SUL PIANO TEORICO) UN PUNTO ARBITRARIO ξ_k IN CIASCUNO DEGLI n INTERVALLI $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$

E CONSIDERIAMO LA SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$.

CI CHIEDIAMO SE AMMETTE LIMITE FINITO AL TENDERE A ZERO DELLA QUANTITÀ

$$\delta_P = \max_{k=1,\dots,n} \left(x_k - x_{k-1} \right)$$

DETTA « NORMA DELLA DECOMPOSIZIONE »

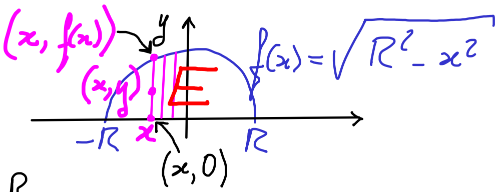
SE ESISTE $\ell \in \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE

$$\left| \ell - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

PER TUTTE LE DECOMPOSIZIONI DELL'INTERVALLO $[a,b]$ SODDISFACENTI $\delta_P < \delta$, INDIPENDENTEMENTE DALLA SCELTA DEI PUNTI $\xi_k \in I_k$, LA FUNZIONE f SI DICE INTEGRABILE SECONDO RIEMANN, E SI PONE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ell$$

QUESTA DEFINIZIONE RAPPRESENTA UNA SORTA DI RITORNO AL PASSATO: SI PENSI, AD ESEMPIO, AGLI « INDIVISIBILI » DI CAVALIERI, CIOÈ PENSARE UNA FIGURA PIANA COME SOMMA DI SEGMENTI.



$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ SI INTENDEVA COME SOMMA $\left(\int\right)$ DEI PRODOTTI $f(x)\cdot dx$, AREE DEGLI INDIVISIBILI. CIÒ NON È RIGOROSO, MA LA NOTAZIONE È RIMASTA IN USO.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA (MOTIVO DEL FRAINTENDIMENTO N. 1): SE f È REGOLARE, E RISULTA $f(x) \geq 0$ PER OGNI $x \in [a,b]$, ALLORA È INTEGRABILE, E L'INTEGRALE $\int_a^b f(x)\,dx$ ESPRIME L'AREA DI $E = \{(x,y) \mid x \in [a,b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$

GI 14 GEN 2021

PIÙ PRECISAMENTE, LA CONTINUITÀ IN $[a,b]$ È UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'INTEGRABILITÀ.

VE 15 GEN 2021

UN'ALTRA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN È LA MONOTONIA DELLA FUNZIONE INTEGRANDA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. SFIDA: CERCARE DI DIMOSTRARLO. CONSEGUENZA: LA FUNZIONE PARTE INTERA $f(x) = [x]$ È INTEGRABILE SU QUALUNQUE INTERVALLO.

UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER L'INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN È CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA SIA LIMITATA. SFIDA: CERCARE DI DIMOSTRARLO. CONSEGUENZA: LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{x}$ NON È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SULL'INTERVALLO $[0, b]$. PER LA VERITÀ, $f(x)$ NON È NEMMENO DEFINITA NEL PRIMO ESTREMO. IN CASI COME QUESTO SI RICORRE ALLA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE IMPROPRIO O GENERALIZZATO, DATA ATTRAVERSO IL LIMITE

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

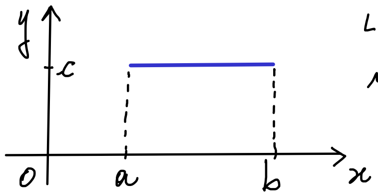
UNO DEI POCHI CASI IN CUI LA DEFINIZIONE SI PUÒ APPLICARE DIRETTAMENTE È QUELLO IN CUI $f(x) = c$ (COSTANTE REALE). IN SINTESI, TUTTE LE SOMME DI CAUCHY–RIEMANN HANNO LO STESSO VALORE. INFATTI, QUALUNQUE SIA LA PARTIZIONE, E COMUNQUE SI PRENDANO I PUNTI ξ_k, SI TROVA $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$

$$= c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c\,(b-a)$$

PERTANTO LE SOMME DI CAUCHY-RIEMANN AMMETTONO (BANALMENTE) LIMITE FINITO PER $\delta_P \to 0$, E SI TROVA:

$$\boxed{\int_a^b c \, dx = c\,(b-a)}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: SE $c>0$,



L'INTEGRALE ESPRIME L'AREA DEL RETTANGOLO DI BASE $b-a$ E ALTEZZA c.

LUNGI DAL POTERSI APPLICARE DIRETTAMENTE, NELLA MAGGIOR PARTE DEI CASI, LA DEFINIZIONE ISPIRA I METODI DI CALCOLO NUMERICO: SCELTI OPPORTUNAMENTE GLI INTERVALLI $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ E I PUNTI $\xi_k \in I_k$, UNA PARTICOLARE SOMMA

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

PUÒ DARE UN VALORE NUMERICO APPROSSIMATO DELL'INTEGRALE.

LA DEFINIZIONE È PARTICOLARMENTE ADATTA PER DIMOSTRARE LE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO.

1. LINEARITÀ: PRESE DUE FUNZIONI INTEGRABILI $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, E DUE NUMERI $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ RISULTA INTEGRABILE, E

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

IL RISULTATO SCATURISCE DAL FATTO CHE

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\lambda f(\xi_k) + \mu g(\xi_k)\big)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \mu \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

PASSANDO AL LIMITE PER $\delta_P \to 0$

VE 15 GEN 2021

2. MONOTONIA: SE $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILI, E SE $f(x) \le g(x)$ PER OGNI $x \in [a,b]$ ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

LA TESI SEGUE DAL FATTO CHE

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

E LA DISUGUAGLIANZA SI CONSERVA PER $\delta_P \to 0$.

APPLICAZIONE: SICCOME $e^{-x^2} \le \frac{1}{e}$ PER $x \ge 1$, SI TROVA $\int_1^2 e^{-x^2}\,dx \le \int_1^2 \frac{1}{e}\,dx = \frac{1}{e}$

CASO PARTICOLARE: PONENDO $f(x) = 0$ (COSTANTE) TROVIAMO CHE SE $g(x) \ge 0$ IN $[a,b]$ ALLORA $\int_a^b g(x)\,dx \ge 0$.

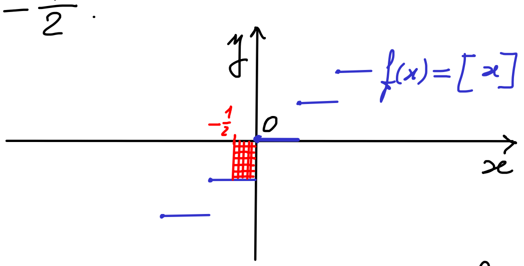
3. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $f : [a,b] \to$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN, ALLORA ANCHE LA FUNZIONE $|f(x)|$ LO È. MA ALLORA, SICCOME $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ PER OGNI $x \in [a,b]$, PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE SI HA $-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le$ $\le \int_a^b |f(x)|\,dx$. QUESTE DUE DISUGUAGLIANZE SI POSSONO ANCHE SCRIVERE COME UN'UNICA DISUGUAGLIANZA:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

4. ADDITIVITÀ: SE UNA FUNZIONE f È INTEGRABILE SUGLI INTERVALLI $[a,b]$ E $[b,c]$, ALLORA È INTEGRABILE ANCHE SULL'INTERVALLO $[a,c]$ E SI HA CHE
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.}$$

VISTA QUESTA PROPRIETÀ, SI DEFINISCE $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
E
$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.}$$
COSÌ FACENDO, L'UGUAGLIANZA $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ VALE QUALUNQUE SIA L'ORDINE DEI TRE NUMERI a, b, c, E ANCHE SE SUSSISTE QUALCHE UGUAGLIANZA FRA DI ESSI.

APPLICAZIONE:
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [x]\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [x]\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} [x]\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-1)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx =$$
$$= (-1)\left\{0 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right\} + 0\cdot\left(\tfrac{1}{2} - 0\right) = -\tfrac{1}{2}.$$



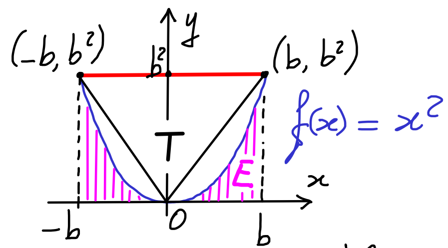
L'AREA DEL RETTANGOLO ROSSO È $-\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

VE 15 GEN 2021

IL TEOREMA PIÙ IMPORTANTE È DETTO « TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE ». UNA PRIMA FORMULAZIONE AFFERMA CHE SE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN E AMMETTE PRIMITIVA, CIOÈ ESISTE UNA FUNZIONE $F \in C^0([a,b])$ TALE CHE $F'(x) = f(x)$ PER OGNI $x \in (a,b)$, ALLORA
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

QUESTO RISULTATO, DETTO TALVOLTA « TEOREMA DI VALUTAZIONE », CONSENTE, AD ESEMPIO, DI RIOTTENERE UNO DEI CLASSICI RISULTATI DI ARCHIMEDE:



L'AREA DEL TRIANGOLO T È $2b \cdot \frac{b^2}{2} = b^3$

L'AREA DELLA FIGURA DELIMITATA DALLA PARABOLA BLU E DAL SEGMENTO ROSSO È $\frac{4}{3}b^3$.

QUESTO VALORE LO POSSIAMO OGGI RIOTTENERE SOTTRAENDO L'AREA DI E DA QUELLA DEL RETTANGOLO CHE CONTIENE LA FIGURA, E CIOÈ CALCOLANDO $2b\cdot b^2 - \int_{-b}^{b} x^2\,dx$. PER IL TEOREMA DI VALUTAZIONE SI TROVA $\int_{-b}^{b} x^2\,dx =$
$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_{-b}^{b} = \frac{1}{3}\left\{b^3 - (-b)^3\right\} = \frac{2}{3}b^3$$
E QUINDI
$$2b\cdot b^2 - \int_{-b}^{b} x^2\,dx = 2b^3 - \frac{2}{3}b^3 = \frac{4}{3}b^3$$

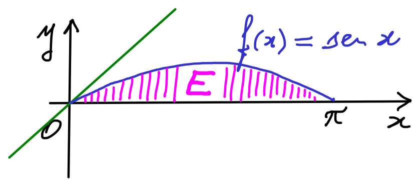
PROBLEMI [402]

1) LA FUNZIONE $f(x) = \operatorname{sen} x$ È CONTINUA E QUINDI INTEGRABILE SULL'INTERVALLO $[0,\pi]$. INOLTRE, LA FUNZIONE $F(x) = -\cos x$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$. PERCIÒ POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI VALUTAZIONE E SCRIVERE $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx =$

$= F(\pi) - F(0) =$

$= -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 - (-1)$

$= 2$. INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:



L'AREA DELLA FIGURA PIANA $E = \{(x,y) \mid x \in [0,\pi] \text{ e } 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$ VALE 2.

OSSERVAZIONE: CON LO STESSO PROCEDIMENTO SI TROVA CHE

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = F(\pi) - F(-\pi) = 0$$

PERCHÉ $F(x) = -\cos x$ È UNA FUNZIONE PARI. IL RISULTATO NON RAPPRESENTA L'AREA DI NESSUNA FIGURA PIANA (NON DEGENERE).

OSSERVAZIONE: IN GENERALE, SE $f(x)$ È UNA FUNZIONE DISPARI, INTEGRABILE SECONDO RIEMANN, SI HA

$$\int_{-b}^{b} f(x) \, dx = 0.$$

MA 19 GEN 2021

PER CALCOLARE L'INTEGRALE $\int_{-2/3}^{2/3} \sqrt{2-3x}\, dx$ SEGUIAMO IL SUGGERIMENTO ED EFFETTUIAMO LA SOSTITUZIONE $\boxed{t = 2-3x}$, LA CUI INVERSA È $x = \frac{2-t}{3}$, DA CUI SEGUE $dx = -\frac{1}{3}dt$. QUINDI

$$\int_{-2/3}^{2/3} \sqrt{2-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\int_4^0 \sqrt{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^4 \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}t^{3/2}\Big]_0^4 =$$

$$= \frac{2}{9}\left(4^{3/2} - 0\right) = \frac{2}{9}\left(4^{1/2}\right)^3 = \frac{2}{9}2^3$$

$$= \frac{16}{9}.$$

IN ALTERNATIVA, SI PUÒ CERCARE INNANZITUTTO L'INTEGRALE INDEFINITO $\int \sqrt{2-3x}\, dx$

$$= -\frac{2}{9}(2-3x)^{3/2} + C$$

PERCHÉ $\frac{d}{dx}(2-3x)^{3/2} = -3\cdot\frac{3}{2}(2-3x)^{1/2}$,

E POI APPLICARE IL TEOREMA DI VALUTAZIONE:

$$\int_{-2/3}^{2/3} \sqrt{2-3x}\, dx = -\frac{2}{9}(2-3x)^{3/2}\Big]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} =$$

$$= -\frac{2}{9}\left\{\left(2-3\,\frac{2}{3}\right)^{3/2} - \left(2+3\,\frac{2}{3}\right)^{3/2}\right\} =$$

$$= -\frac{2}{9}\left\{-4^{3/2}\right\} = \frac{2}{9}\cdot 8 = \frac{16}{9}$$

MA 19 GEN 2021

SEGUENDO IL SUGGERIMENTO, OSSERVIAMO CHE L'INTEGRALE $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{1}{2x+7}\,dx$ NON È BEN DEFINITO IN QUANTO IL DENOMINATORE $2x+7$ SI ANNULLA NEL PUNTO $x_0 = -\frac{7}{2}$, CHE È IL PUNTO MEDIO DELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE, QUINDI LA FUNZIONE INTEGRANDA NON È DEFINITA IN TALE PUNTO, ED È ILLIMITATA SUGLI INTERVALLI $[-4, x_0)$ E $(x_0, -3]$. SOLO PER CURIOSITÀ, CALCOLIAMO $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+7} = \frac{1}{2}\log|2x+7| + C$.

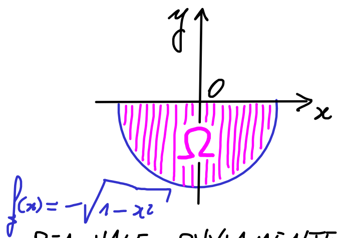
IL RISULTATO SUSSISTE SULL'INTERVALLO $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$ E SULL'INTERVALLO $\left(-\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

IN GENERALE, L'INTEGRAZIONE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE $\frac{P(x)}{Q(x)}$ SI PUÒ RICONDURRE (METODO DI CHARLES HERMITE) ALL'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI DELLA FORMA $\frac{1}{mx+q}$, $\frac{1}{1+x^2}$ E $\frac{2x}{1+x^2}$. SI BADI CHE

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \log(1+x^2) + C$$

IL PRESUPPOSTO DEL METODO È LA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI $Q(x) = a_n(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ DOVE $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ SONO LE n RADICI DEL POLINOMIO $Q(x)$.

2) SAPPIAMO CHE LA DISUGUAGLIANZA $x^2+y^2 \leq 1$ È SODDISFATTA DALLE COORDINATE (x,y) DEI PUNTI DEL CERCHIO CENTRATO NELL'ORIGINE E DI RAGGIO 1.



DUNQUE LA FIGURA Ω È IL SEMICERCHIO INFERIORE, E LA SUA AREA VALE, OVVIAMENTE, $\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}$.

RICORDANDO L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE NEGATIVA, POSSIAMO SCRIVERE $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)dx = -\frac{\pi}{2}$. ALLO STESSO RISULTATO SI GIUNGE CON LA SOSTITUZIONE $x = \operatorname{sen} t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

 MA 19 GEN 2021

3) ESSENDO $\log x$ UNA FUNZIONE CRESCENTE, SI HA CHE $0 = \log 1 < \log 2 \leq \leq \log x \leq \log e = 1$ PER OGNI $x \in [2, e]$. QUINDI $1 \leq \frac{1}{\log x} \leq \frac{1}{\log 2}$.

PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRANDA, POSSIAMO SCRIVERE

$$\int_2^e \frac{1}{\log x}\,dx \geq \int_2^e 1\,dx = e - 2 >$$

$$> 2{,}7 - 2 = 0{,}7 > 0{,}6 = \frac{3}{5}$$

DUNQUE LA DISUGUAGLIANZA SUSSISTE.

INTEGRALI IMPROPRI, DETTI ANCHE INTEGRALI GENERALIZZATI

1) CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ CHE SIA INTEGRABILE SU TUTTI GLI INTERVALLI DEL TIPO $[a+\varepsilon, b]$ CON $\varepsilon \in (0, b-a)$. SE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

SI DEFINISCE L'INTEGRALE IMPROPRIO $\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

ESEMPIO: CALCOLIAMO $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ IN SENSO IMPROPRIO. SI TROVA:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log x\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\log \varepsilon\right)$$

$= +\infty$, QUINDI SI PUÒ SCRIVERE

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty \quad \text{(IN SENSO IMPROPRIO)}$$

QUANDO IL SUDDETTO LIMITE HA UN VALORE FINITO, SI DICE CHE $f(x)$ È INTEGRABILE, O ANCHE SOMMABILE, IN SENSO IMPROPRIO.

MA 19 GEN 2021

ESEMPIO: CALCOLIAMO L'INTEGRALE IMPROPRIO $\int_0^1 \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log x \, dx$.

PER LA REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI, SI HA $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx =$

$$x \log x - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \log x - \int dx = x \log x - x + C$$

$$= x(\log x - 1) + C,$$ E QUINDI

$$\int_\varepsilon^1 \log x \, dx = \{1 \cdot (\log 1 - 1) + - \varepsilon(\log \varepsilon - 1)\} =$$

$$= \{-1 - \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon\}.$$ RICORDANDO CHE $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \log \varepsilon = 0$ (8/1/21)

SI CONCLUDE CHE $\int_0^1 \log x \, dx = -1$

IN SENSO IMPROPRIO.

2) LO STESSO PROCEDIMENTO CONDUCE A DEFINIRE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

E ANCHE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\,dx$$

ESCLUSO IL CASO IN CUI I DUE LIMITI SIANO INFINITI E DISCORDI.