# Esame di Calcolo delle Probabilità

(2 ore e 30 minuti)

**Si prega di scrivere in maniera chiara, risposte non leggibili non saranno corrette. In tutti gli esercizi si richiede di illustrare il proprio lavoro.**

**Esercizio 1** (15 punti)**.** *Consideriamo il seguente gioco: lanciamo prima un dado non truccato. poi estraiamo una pallina da un'urna scelta in funzione del risultato del lancio del dado, più precisamente: l'urna $A$ è scelta se esce* 1*,* 2 *o* 3*; $B$ se il dado da come risultato* 4 *o* 5*; $C$ se il risultato è 6. Le urne hanno la seguente composizione:*

- *nell'urna $A$ ci sono 2 palline rosse e 2 gialle;*
- *nell'urna $B$,* 3 *gialle e* 3 *verdi;*
- *nell'urna $C$,* 2 *verdi e* 1 *rossa.*

*(a) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia rossa?*

*(b) Supponiamo di estrarre una pallina verde. Qual e la probabilità che provenga dall'urna $B$?*

*(c) Se si ottiene una pallina gialla, qual è la probabilità che il dado abbia dato come risultato* 3*?*

*(d) Qual è la probabilità di non ottenere una pallina verde sapendo che il dado ha dato come risultato* 3 *o* 6*?*

*(e) I due eventi estrarre dall'urna $C$ e ottenere pallina rossa sono indipendenti?*

**Soluzione.** *Definiamo i seguenti eventi*

- *$A$: si pesca dall'urna $A$ (cioè il dado restituisce* 1*,* 2 *o* 3*);*
- *$B$: si pesca dall'urna $B$ (cioè il dado restituisce* 4 *o* 5*);*
- *$C$: si pesca dall'urna $C$ (cioè il dado restituisce* 6*);*
- *$D_j$: il dado restituisce $j$, $j = 1, \ldots, 6$;*
- *$R$: si estrae una pallina rossa;*
- *$G$: si estrae una pallina gialla;*
- *$V$: si estrae una pallina verde.*

(a) *Vogliamo sapere* $\mathbb{P}(R)$. *Sappiamo che*

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C).$$

*Inoltre abbiamo che*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1/2\\ \mathbb{P}(B) &= 1/3\\ \mathbb{P}(C) &= 1/6\\ \mathbb{P}(R|A) &= 1/2\\ \mathbb{P}(R|B) &= 0\\ \mathbb{P}(R|C) &= 1/3,\end{aligned}$$

*quindi*

$$\mathbb{P}(R) = 1/2 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1/6 = 11/36.$$

(b) *Vogliamo conoscere* $\mathbb{P}(B|V)$. *Usando il teorema di Bayes otteniamo*

$$\mathbb{P}(B|V) = \frac{\mathbb{P}(V|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(V)}.$$

*Sappiamo, banalmente, che* $\mathbb{P}(V|B) = 1/2$ *e che* $\mathbb{P}(B) = 1/3$. *Resta da calcolare* $\mathbb{P}(V)$. *Procedendo come nel punto precedente otteniamo che*

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V|C)\mathbb{P}(C) = 0 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/3 + 2/3 \cdot 1/6 = 5/18.$$

*Otteniamo quindi*

$$\mathbb{P}(B|V) = \frac{1/2 \cdot 1/3}{5/18} = 3/5.$$

(c) *Dobbiamo calcolare* $\mathbb{P}(D_3|G)$. *Procediamo ancora col teorema di Bayes*

$$\mathbb{P}(D_3|G) = \frac{\mathbb{P}(G|D_3)\mathbb{P}(D_3)}{\mathbb{P}(G)}.$$

*Ovviamente* $\mathbb{P}(D_3) = 1/6$ *e* $\mathbb{P}(G|D_3) = \mathbb{P}(G|A) = 1/2$, *inoltre possiamo calcolare* $P(G) = 1 - (\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(R)) = 1 - (11/36 + 5/18) = 15/36$. *Allora*

$$\mathbb{P}(D_3|G) = \frac{1/2 \cdot 1/6}{15/36} = 1/5.$$

(d) *La probabilità cercata è* $\mathbb{P}(V^C|D_3 \cup D_6)$. *Sappiamo che* $\mathbb{P}(V^C|D_3 \cup D_6) = 1 - \mathbb{P}(V|D_3 \cup D_6)$. *Calcoliamo quindi* $\mathbb{P}(V|D_3 \cup D_6)$. *Dalla definizione di probabilità condizionata abbiamo*

$$\mathbb{P}(V|D_3 \cup D_6) = \frac{\mathbb{P}(V \cap (D_3 \cup D_6))}{\mathbb{P}(D_3 \cup D_6)}.$$

*Sappiamo che* $V\cap(D_3\cup D_6) = (V\cap D_3)\cup(V\cap D_6)$. *Per costruzione abbiamo che* $V\cap D_3 = \emptyset$, *quindi* $V \cap (D_3 \cup D_6) = (V \cap D_6)$. *Possiamo calcolare* $\mathbb{P}(V \cap D_6)$ *come segue*

$$\mathbb{P}(V \cap D_6) = \mathbb{P}(V|D_6)\mathbb{P}(D_6) = \mathbb{P}(V|C)\mathbb{P}(D_6) = 2/3 \cdot 1/6 = 2/18.$$

*Quindi abbiamo che*

$$\mathbb{P}(V|D_3 \cup D_6) = \frac{\mathbb{P}(V|C)\mathbb{P}(D_6)}{\mathbb{P}(D_3 \cup D_6)} = \frac{2/18}{1/3} = 2/6,$$

*da cui*

$$\mathbb{P}(V^C|D_3 \cup D_6) = 1 - 2/6 = 4/6.$$

(e) *Sappiamo che* $\mathbb{P}(R|C) = 1/3$ *e abbiamo calcolato che* $\mathbb{P}(R) = 11/36$, *quindi* $\mathbb{P}(R|C) \neq \mathbb{P}(R)$ *per cui* $R$ *e* $C$ *non sono indipendenti.*

**Esercizio 2** (25 punti)**.** *Sia* $X$ *una variabile aleatoria con distribuzione di Pareto di parametro* $\alpha > 0$, *cioè con densità*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & x > 1 \end{cases}$$

(a) *Per quali valori di* $\alpha$ *esiste il valore medio di* $X$*? Calcolarlo*[1]*;*

(b) *Per quali valori di* $\alpha$ *esiste il secondo momento di* $X$*? Calcolare* $Var(X)$*;*

(c) *Determinare la funzione di ripartizione di* $X$*;*

(d) *Sia* $\{X_n\}_n$ *una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione di Pareto di parametro* $\alpha = 1$ *e sia* $Z_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$*.Calcolare la* $\mathbb{P}(Z_n > z)$, $z > 1$, *e poi calcolare la densità di* $Z$*;*

(e) *Mostrare che* $Z_n$ *converge in probabilità a* 1 *per* $n \to \infty$.[2]

**Soluzione.** (a) *Calcoliamo* $\mathbb{E}(X)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^{+\infty} x\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha}}dx = \begin{cases} \infty & \alpha \leq 1 \\ \alpha \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_1^{\infty} & \alpha > 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

*Poiché* $X > 0$ *quasi certamente abbiamo che* $X \in L^1$ *per* $\alpha > 1$ *e, in quel caso,* $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

(b) *Calcoliamo* $\mathbb{E}(X^2)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^{+\infty} x^2\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha-1}}dx = \begin{cases} \infty & \alpha - 1 \leq 1 \\ \alpha \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big]_1^{\infty} & \alpha - 1 > 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha}{\alpha-2} & \alpha > 2 \end{cases}$$

*Abbiamo che* $X \in L^2$ *per* $\alpha > 2$ *e, in quel caso,* $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\alpha}{\alpha-2}$. *Inoltre*

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2.$$

[1] Suggerimento: Si ricorda che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta}}dt$ esiste finito se e solo se $\beta > 1$.

[2] Suggerimento: Osservando che $Z_n > 1$ quasi certamente e utilizzando la definizione di convergenza in probabilità si ottiene che...

(c) *Calcoliamo* $F(t) = \mathbb{P}(X \le t)$.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ \int_1^t \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}dx & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ \frac{\alpha x^{-\alpha}}{-\alpha}\Big]_1^t & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 1 - \frac{1}{t^\alpha} & t > 1 \end{cases}$$

(d) *Iniziamo calcolando* $\mathbb{P}(Z_n > z)$ *per* $z > 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n > z) &= \mathbb{P}(\min\{X_1 \ldots, X_n\} > z) = \mathbb{P}(X_1 > z, \ldots, X_n > z) \\ &= \Pi_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > z) = \mathbb{P}(X_1 > z)^n = (1 - \mathbb{P}(X_1 \le z))^n \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)\right)^n = \frac{1}{t^n}.\end{aligned}$$

*Osservando che* $Z_n$ *è quasi certamente maggiore di* $1$ *abbiamo che la funzione di ripartizione* $F_n$ *di* $Z_n$ *è data da*

$$F_n(t) = \mathbb{P}(Z_n \le t) = 1 - \mathbb{P}(Z_n > t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 1 - \frac{1}{t^n} & t > 1 \end{cases}$$

*Differenziando otteniamo che la densità* $f_n$ *di* $Z_n$ *è*

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ \frac{n}{t^{n+1}} & t > 1 \end{cases}$$

(e) *Vogliamo mostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z_n - 1| > \eta) = 0 \quad \forall \eta > 0.$$

*Poiché* $Z_n > 1$ *quasi certamente abbiamo che* $|Z_n - 1| = Z_n - 1$, *quindi*

$$\mathbb{P}(|Z_n - 1| > \eta) = \mathbb{P}(Z_n - 1 > \eta) = \mathbb{P}(Z_n > \eta + 1) = \frac{1}{(\eta + 1)^n},$$

*in quanto* $\eta + 1 > 1$ *e dove abbiamo utilizzato il risultato al punto precedente. Quindi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z_n - 1| > \eta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\eta + 1)^n} = 0.$$

**Esercizio 3** (10 punti). *Consideriamo un negozio aperto* 365 *giorni l'anno e denotiamo con* $X_j$ *la variabile aleatoria che misura l'incasso ottenuto al* $j$*-esimo giorno dell'anno. Assumiamo che le* $X_j$ *siano indipendenti e identicamente distribuite e abbiano distribuzione uniforme su* $[0, 50]$. *Si dia una stima della probabilità che il negozio incassi tra i* 9.000 *e i* 10.000 *euro in un anno. Si descriva un algoritmo per verificare il risultato ottenuto su R.*

**Soluzione.** *Utilizziamo il teorema del limite centrale. Osserviamo innanzitutto che*

$$\mathbb{E}(X_j) = 25 \quad e \quad Var(X_j) = \frac{1}{12}(50)^2.$$

$$\mathbb{P}(9000 \leq \sum_{j=1}^{365} X_j \leq 10000) = \mathbb{P}\left(\frac{9000 - 365 \cdot 25}{\sqrt{365} \cdot \frac{50}{\sqrt{12}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{365} X_j - 365 \cdot 25}{\sqrt{365} \cdot \frac{50}{\sqrt{12}}} \leq \frac{10000 - 365 \cdot 25}{\sqrt{365} \cdot \frac{50}{\sqrt{12}}}\right)$$
$$\approx \mathbb{P}(-0.45 \leq Z \leq 3.2) = \mathbb{P}(Z \leq 3.2) - \mathbb{P}(Z \leq -0.45)$$
$$= \mathbb{P}(Z \leq 3.2) - (1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.45)) = 0.9993 - (1 - 0.6736) = 0.6729.$$

*Possiamo usare il teorema dei grandi numeri per stimare empiricamente la probabilità. Per esempio col seguente codice R.*

```
n=100000
s=0
for (i in c(1:n)){
  guadagno_annuo=sum(runif(365,min=0,max=50))
  if (guadagno_annuo<=10000 && guadagno_annuo>=9000){
    s=s+1
  }
}
p_empirica=s/n
```

Tabella 1: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t^2/2}\mathrm{d}t$

| $x$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.508 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 0.1 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.

| | Densità | F. di rip. | Media | Varianza |
|---|---|---|---|---|
| $B(n,p)$ | $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ | | $np$ | $np(1-p)$ |
| Ipergeometrica | $p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$ | | $\frac{nr}{b+r}$ | $\frac{nrb(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$ |
| $P(\lambda)$ | $p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ | | $\lambda$ | $\lambda$ |
| $U([a,b])$ | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$ | $\frac{1}{2}(a+b)$ | $\frac{1}{12}(b-a)^2$ |
| $G(p)$ | $p_k = p(1-p)^k$ | $1-(1-p)^{k+1}$ | $\frac{1-p}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| $Esp(\lambda)$ | $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ | $F(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda}^2$ |
| $N(\mu,\sigma^2)$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ | | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| $\Gamma(\alpha,\lambda)$ | $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ | | $\frac{\alpha}{\lambda}$ | $\frac{\alpha}{\lambda^2}$ |