Test

La tabella qui sotto riporta, nella prima colonna, alcune successioni.

Per ciascuna successione occorre indicare, contrassegnando la casella corrispondente, se si tratta di una successione convergente, divergente o indeterminata.

Scrivere nell'ultima colonna il limite della successione considerata (se la successione ammette limite).

Successione	convergente	divergente	indeterminata	suo limite (se esiste)
$2n$	□	□	□	
$-3n$	□	□	□	
$\frac{1}{n}$	□	□	□	
$-\frac{2}{3n}$	□	□	□	
$(-1)^n$	□	□	□	
$(-1)^{2n}$	□	□	□	

Problemi

1) Indichiamo con $\sqrt{t}$, come di consueto, la radice quadrata del numero reale $t \geq 0$. In altri termini, il simbolo $\sqrt{t}$ rappresenta quell'unico numero reale non negativo il cui quadrato è uguale a t. Determinare tutti i numeri reali x tali che $\sqrt{x^2} = |x|$.

2) Verificare, applicando la definizione di limite, che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

3) Stabilire se la successione

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

ammette limite, e, in caso affermativo, calcolare il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Test

La tabella qui sotto riporta, nella prima colonna, alcune successioni.

Per ciascuna successione occorre indicare, contrassegnando la casella corrispondente, se si tratta di una successione convergente, divergente o indeterminata.

Scrivere nell'ultima colonna il limite della successione considerata (se la successione ammette limite).

Successione	convergente	divergente	indeterminata	suo limite (se esiste)
2^n	□	□	□	
$\left(\frac{1}{10}\right)^n$	□	□	□	
$\dfrac{n+1}{n}$	□	□	□	
$\dfrac{n}{n+1}$	□	□	□	
$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$	□	□	□	
$\sqrt[n]{3}$	□	□	□	

Problemi

1) Trovare il limite della successione (a_n) appresso definita:
$$a_n = \frac{n^2 + 10^{10}\, n - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 7n^2}.$$
Suggerimento: dividere il numeratore e il denominatore per n^2.

2) Trovare il limite della successione (b_n) data da
$$b_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n.$$
Suggerimento: sfruttare l'uguaglianza
$$\sqrt{n^2+3n} - n = \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+3n} + n}{\sqrt{n^2+3n} + n}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+3n} + n\right)}{\sqrt{n^2+3n} + n}.$$

Test

La tabella qui sotto riporta, nella prima colonna, alcune successioni.

Per ciascuna successione occorre indicare, contrassegnando la casella corrispondente, se si tratta di una successione convergente, divergente o indeterminata.

Scrivere nell'ultima colonna il limite della successione considerata (se la successione ammette limite).

Successione	convergente	divergente	indeterminata	suo limite (se esiste)
1^n	□	□	□	
$n^2 - 10^{10}\, n$	□	□	□	
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+70}$	□	□	□	
$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$	□	□	□	
$[n]$ (parte intera di n)	□	□	□	
$\left[\dfrac{n^2 + (-1)^n}{10^{-10}\, n - \sqrt{3} + n^2}\right]$	□	□	□	

Suggerimento: si indichi con la lettera e il limite della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$, che esiste ed è finito (numero di Nepero). Posto $k = n - 1$, si noti che $1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$ per ogni $k \geq 1$.

Problemi

I coefficienti binomiali si definiscono come segue:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad (1)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{\,0, \dots, n\,\}$.

1) Usando la definizione (1), stabilire per quali numeri naturali n e k sussiste l'uguaglianza

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \qquad (2)$$

2) Introducendo l'indice di somma $i = n - k$, stabilire per quali numeri naturali n sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

3) Semplificando la (1), stabilire per quali valori interi di $n \geq 1$ e di $k \in \{\,1, \dots, n\,\}$ sussiste l'uguaglianza

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}. \qquad (3)$$

4) Calcolare numericamente $\binom{100}{2}$ servendosi della (3).

5) Usando la formula di Newton(*), scrivere lo sviluppo di $(1+1)^n$.

(*) La formula era già nota agli Arabi nel Duecento: v. Kline, Storia del pensiero matematico, Einaudi, cap. XIII, par. 6, pag. 318.

Test

La tabella qui sotto riporta, nella prima colonna, alcune serie.

Per ciascuna serie occorre indicare, contrassegnando la casella corrispondente, se si tratta di una serie convergente, divergente o indeterminata.

Scrivere nell'ultima colonna la somma della serie considerata (se la serie non è indeterminata).

Serie	convergente	divergente	indeterminata	somma
$\sum_{k=0}^{+\infty} 0$	$\square$	$\square$	$\square$	
$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}$	$\square$	$\square$	$\square$	
$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$	$\square$	$\square$	$\square$	
$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$	$\square$	$\square$	$\square$	
$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$	$\square$	$\square$	$\square$	
$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$	$\square$	$\square$	$\square$	

Problema

Per ciascun valore del parametro $x \in \mathbb{R}$, stabilire il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Test

La tabella qui sotto riporta, nella prima colonna, alcune funzioni.

Per ciascuna funzione occorre indicare, contrassegnando le caselle corrispondenti, se si tratta di una funzione pari, dispari, oppure né pari né dispari.

Funzione	pari	dispari	né pari, né dispari
$f(x) = 1$ (costante)	☐	☐	☐
$f(x) = x$	☐	☐	☐
$f(x) = x^2$	☐	☐	☐
$f(x) = \sqrt{x}$	☐	☐	☐
$f(x) = e^x$	☐	☐	☐
$f(x) = \cosh x$	☐	☐	☐
$f(x) = [x]$ (parte intera)	☐	☐	☐
$f(x) = 0$ (costante)	☐	☐	☐

Problemi

1a) Indicato con ε un numero reale positivo arbitrario, stabilire se esiste un numero reale N tale che per ogni $x > N$ risulti
$$\frac{1}{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

1b) Trovare il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$.

2a) Trovare tutti i numeri reali x tali che $x^2 \geq x$.

2b) Trovare il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$.

3a) Indicata con $[x]$ la parte intera del numero reale x (cioè il più grande intero z tale che $z \leq x$), stabilire per quali numeri reali x sussiste la disuguaglianza
$$2^{[x]} \leq 2^x.$$

3b) Trovare il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Funzioni razionali

Problemi

1) Trovare, separatamente, i limiti per $x \to \pm\infty$ del numeratore e del denominatore delle seguenti funzioni razionali:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}; \ g(x) = \frac{x^2-4x^3}{x^2+1}; \ h(x) = \frac{x^2-4x^3}{x^3+1}.$$

2) Trovare i limiti per $x \to \pm\infty$ delle funzioni razionali f, g e h come sopra definite.

3) Trovare un coefficiente $m \in \mathbb{R}$ in modo tale che risulti

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - mx\right) = 0.$$

Suggerimento: vedere il problema n. 2 della serie [104].

4) Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$, stabilire se la funzione $f(x) = [x]$ (parte intera di x) è continua da sinistra nel punto di ascissa x_0.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Funzioni inverse

Problemi

1) Determinare il dominio e tracciare il grafico della funzione $f(x) = x + 1 - e^{\log x}$.

2) Determinare il dominio e tracciare il grafico della funzione $g(x) = 1 - \log(e^x)$.

3) Determinare la funzione inversa della funzione $h(x) = \operatorname{senh} x$, cioè ricavare la x dall'uguaglianza

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

Suggerimento: passare all'incognita $t = e^x$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
La derivata

Problemi

1) Poniamo $f(x) = |x|x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   a) Stabilire, applicando la definizione, se la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

   b) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

   c) Tracciare il grafico della funzione f.

2) Fissato un parametro $R \in (0, +\infty)$, poniamo $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

   a) Determinare il dominio e tracciare il grafico della funzione $y(x)$. Suggerimento: elevare ambo i membri al quadrato.

   b) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = R/\sqrt{2}$. Suggerimento: si può usare la geometria analitica.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Funzione gaussiana

Problema

Tracciare il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$:

1) determinare il dominio;

2) accertare la parità;

3) studiare la monotonia;

4) determinare il segno di $f(x)$;

5) trovare gli eventuali asintoti;

6) trovare le intersezioni con gli assi cartesiani;

7) scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Funz. circolari inverse

Problemi

1) Indichiamo con f la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   a) Tracciare il grafico della funzione $f(x)$ per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Suggerimento: vedere la lezione del 16 dicembre 2020.

   b) Trovare la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$ (suggerimento: vedere la lezione di venerdì 11/12/2020) e tracciare il grafico di f^{-1}.

2) Indichiamo con g la funzione $g(x) = \cos x$ per $x \in [0, \pi]$.

   a) Tracciare il grafico della funzione $g(x)$ per $x \in [0, \pi]$.

   b) Trovare la derivata della funzione inversa $g^{-1}(y) = \arccos y$ e tracciare il grafico di g^{-1}.

3) Indichiamo con h la funzione $h(x) = \operatorname{tg} x$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

   a) Tracciare il grafico della funzione $h(x)$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

   b) Trovare la derivata della funzione inversa $h^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ e tracciare il grafico di h^{-1}.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Primitive

Test

La tabella qui sotto riporta, nella prima colonna, alcune funzioni. Per ciascuna f occorre indicare, contrassegnando la casella corrispondente, se esiste una funzione $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (in tal caso, si dice che F è una *primitiva* di f).

Scrivere nell'ultima colonna l'espressione di una tale funzione $F(x)$ (se la funzione f ammette primitiva).

Funzione $f(x)$	Ammette primitiva	Espressione di $F(x)$ (se esiste)
x	☐ Sì / No ☐	
x^2	☐ Sì / No ☐	
e^x	☐ Sì / No ☐	
e^{-x}	☐ Sì / No ☐	
$2\,\lvert x\rvert$	☐ Sì / No ☐	(1)
$[x]$ (parte intera)(2)	☐ Sì / No ☐	

(1) Vedere il problema 1 della serie `[301]`
(2) Trovare $F'(0^-)$ col teorema di Lagrange

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Calcolo integrale

Problemi

1) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \text{ (suggerimento: usare il teorema di valutazione)}$$

$$\int_{-2/3}^{2/3} \sqrt{2-3x}\, dx \text{ (suggerimento: sostituzione } t = 2-3x)$$

$$\int_{-4}^{-3} \frac{1}{2x+7}\, dx \text{ (suggerimento: l'integrale è ben definito?)}$$

2) Calcolare l'area del semicerchio Ω individuato nel piano xy dalle seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Suggerimento: non è necessario ricorrere al calcolo integrale.

3) Utilizzando la monotonia dell'integrale rispetto alla funzione integranda, stabilire se sussiste la seguente disuguaglianza:

$$\int_2^e \frac{1}{\log x}\, dx > \frac{3}{5}.$$